



**HAL**  
open science

## L'approche C-Nem : une alternative aux éléments finis pour l'étude des procédés

Lounes Illoul, Philippe Lorong, Julien Yvonnet, Francisco Chinesta

► **To cite this version:**

Lounes Illoul, Philippe Lorong, Julien Yvonnet, Francisco Chinesta. L'approche C-Nem : une alternative aux éléments finis pour l'étude des procédés. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01492452

**HAL Id: hal-01492452**

**<https://hal.science/hal-01492452v1>**

Submitted on 20 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# L'approche C-Nem : une alternative aux éléments finis pour l'étude des procédés

**Lounes Illoul\* – Philippe Lorong\* – Julien Yvonnet\*\* – Francisco Chinesta\***

*\* Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés – UMR CNRS 8106  
Ecole Nationale Supérieure d'arts et Métiers  
151, Bd de l'Hôpital, 75 013 Paris  
Tel. : 01 44 24 62 85 / Fax : 01 44 24 64 68*

*philippe.lorong@paris.ensam.fr*

*\*\* Université de Marne-la-vallée, Laboratoire de Mécanique,  
5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-vallée cedex 2*

---

*RÉSUMÉ. La C-Nem ("Constrained Natural element method") propose une interpolation élaborée à partir du diagramme de Voronoï contraint associé : i) à un nuage de nœuds répartis sur le domaine à étudier et, ii) à une description de la frontière de ce domaine (ensemble de facettes triangulaires planes en 3D). Les fonctions de base de cette interpolation sont locales en espace et interpolantes (la propriété du delta de kronecker est vérifiée).*

*Dans cette article, nous rappelons les fondements de l'approche C-Nem et donnons quelques comparaisons avec l'approche éléments finis en élasticité. Deux exemples de simulation de procédés (extrusion et cisailage) sont également donnés.*

*ABSTRACT. The C-Nem ("Constrained Natural element method") proposes an interpolation constructed upon a constrained Voronoi diagram deduced from: i) a cloud of nodes spread on the studied domain and, ii) a description of the boundary of this domain (a set of plane triangular facets in 3D). The used shape functions are local in space and the interpolation of the fields is nodal the delta Kronecker property is satisfied). In this article, we reconsider the bases of the C-Nem approach and we give some comparisons with the finite elements approach in elasticity. Two examples of extrusion and blanking are also given to conclude.*

*MOTS-CLÉS : C-Nem, Transformations finies, Simulation numérique, Diagramme de Voronoï contraint*

*KEYWORDS: C-Nem, Finite transformations, Numerical simulation, Constrained Voronoi Diagram*

## 1. Introduction

Les méthodes sans maillage proposent des techniques de construction d'interpolations dont la qualité dépend principalement de la densité du nuage de nœuds sur lequel elles s'appuient (Nayroles *et al.*, 1992, Belytschko *et al.*, 1994). Ces méthodes tentent de remédier aux difficultés inhérentes à la construction de maillages, maillages qui doivent répondre à des critères de qualité géométrique imposés par les approches éléments finis.

La NEM (Natural Element Method), propose une interpolation élaborée à partir du diagramme de Voronoï associé au nuage des nœuds répartis sur le domaine étudié. Cette interpolation utilise des fonctions de base *locales en espace et interpolantes*. L'introduction d'une description de la frontière du domaine permet d'étendre l'approche NEM à des domaines non-convexes en utilisant le diagramme de Voronoï contraint. L'approche ainsi obtenue a été nommée C-Nem pour "Constrained Natural element method" (Yvonnet *et al.*, 2004). La C-Nem est à mi-chemin des approches éléments finis et des approches sans maillage : elle est basée sur une construction géométrique mais cette construction est systématique et n'inclut aucun critère de qualité. Cette facilité permet, lors de la simulation de problèmes en transformations finies, de pouvoir garder les nœuds initiaux lors de la réactualisation de l'interpolation (dans un contexte de formulation Lagrangienne actualisée) sans avoir à les déplacer ou à les supprimer pour permettre à des éléments d'avoir une forme acceptable.

Après avoir précisé les principes de la C-Nem, nous donnons des exemples destinés à montrer la validité de l'approche et à montrer son potentiel pour la simulation de problèmes où de grandes déformations sont présentes, typiquement ceux rencontrés lors de l'étude des procédés de fabrication (cisaillement, extrusion, coupe, ...).

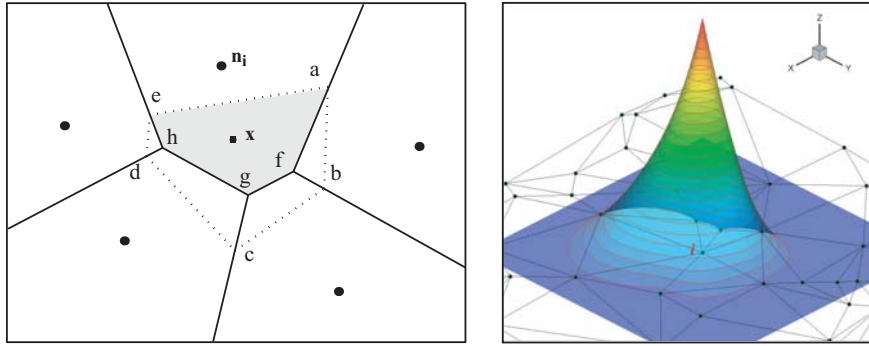
## 2. Principes de la C-Nem

Les fonctions d'interpolation introduites dans la NEM (Natural Element Method) sont les coordonnées naturelles de Sibson (Sambridge *et al.*, 1995, Sukumar *et al.*, 1998). Pour un ensemble de nœuds  $S = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  dans  $\mathfrak{R}^{dim}$ , ( $dim \in \{2, 3\}$ ), le diagramme de Voronoï est la subdivision de  $\mathfrak{R}^{dim}$  en sous-domaines  $T_i$  (les cellules de Voronoï) définis par :

$$T_i = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{dim} : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \forall j \neq i\} \quad [1]$$

La triangulation de Delaunay (tétraèdrisation en 3D) est le dual du diagramme de Voronoï.

La fonction d'interpolation  $\phi_i$  associée à un nœud  $n_i$  est définie, en un point  $\mathbf{x}$ , par le rapport  $\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{[afghe]}{[abcde]}$  (Fig. 1(a)).  $[afghe]$  est l'aire (volume en 3D) de recouvrement entre la cellule  $T_i$  et la cellule  $T_{\mathbf{x}}$  qui serait associée à  $\mathbf{x}$  si  $\mathbf{x}$  avait été un nœud.  $[abcde]$  est l'aire de cette cellule  $T_{\mathbf{x}}$ . La fonction d'interpolation ainsi construite



**Figure 1.** Fonction d'interpolation : Construction en 2D (a) – Aspect (b)

est locale en espace. Son support est défini par l'ensemble des cercles (sphères en 3D) circonscrits aux triangles (tétraèdres en 3D) de Delaunay connectés au nœud  $i$ .  $\phi_i$  vérifie les propriétés de positivité, d'interpolation nodale, et de partition de l'unité (Sukumar *et al.*, 1998) :

$$0 \leq \phi_i(\mathbf{x}) \leq 1 \quad , \quad \phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad [2]$$

L'interpolation  $u^h(\mathbf{x})$  d'une fonction  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  (scalaire, ou tensorielle) est alors définie, sur l'ensemble du domaine, par :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad , \quad \mathbf{u}_i \text{ valeur nodale de } \mathbf{u} \quad [3]$$

Les fonctions  $\phi_i$  vérifient également la relation :  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i$  (Sibson, 1980) qui combinée à [2] implique une interpolation exacte des champs linéaires. Enfin, une autre propriété importante est que l'interpolant NEM est linéaire sur la frontière du domaine (Sukumar *et al.*, 1998) lorsque celui-ci est convexe. L'extension de la NEM aux domaines non convexes se fait en introduisant une description de la frontière et en utilisant le diagramme de Voronoï contraint (dual du maillage de Delaunay contraint). La description de la frontière du domaine est réalisée grâce à un ensemble de facettes triangulaires planes. Le maillage de Delaunay contraint est construit avec le programme TetGen (Quality Tetrahedral Mesh Generator (Si *et al.*, 2005)).

L'utilisation du diagramme de Voronoï contraint permet, pour les domaines fortement non convexes, d'éviter l'influence indésirable entre nœuds en vis à vis sur la frontière (Yvonnet *et al.*, 2004). Les nouvelles cellules  $T_i^C$  sont définies par :

$$T_i^C = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(x, x_i) < d(x, x_j), \forall j \neq i, [x, n_i] \cap \Gamma = [x, n_j] \cap \Gamma = \emptyset \} \quad [4]$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine et  $[a, b]$  le segment reliant les points  $a$  et  $b$ . Cette définition revient à définir un critère de visibilité entre le point  $\mathbf{x}$  et  $n_i$  ou  $n_j$ . Quant à l'interpolation sur le domaine elle s'écrit désormais :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in V(\mathbf{x})} \phi_i^C(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad [5]$$

où  $V(\mathbf{x})$  est l'ensemble des nœuds visibles de  $\mathbf{x}$  et  $\phi_i^C(\mathbf{x})$  est la fonction d'interpolation construite grâce au diagramme contraint. Les fonctions  $\phi_i^C$  vérifient les mêmes propriétés que les fonctions  $\phi_i$ .

*Aspects complémentaires :*

- Afin de pouvoir définir toutes les variables, quelles soient primales (déplacement, température) ou duales (contraintes, déformations plastiques, ...), aux nœuds nous utilisons l'intégration nodale stabilisée introduite par Chen (Chen *et al.*, 2002). Pour chaque nœud  $n_i$  le gradient nodal stabilisé d'une fonction  $f^h$  (déplacement ou température) est défini par :

$$\tilde{\nabla} f_i^h = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \nabla f^h(\mathbf{x}) d\Omega \quad \Omega_i \text{ domaine associé au nœud } n_i \quad [6]$$

$\Omega_i$  peut être la cellule du de Voronoï associée à  $n_i$  en 2D ou, en 3D, le volume précédemment introduit et composé des quarts de tétraèdres connectés à  $n_i$ .

- La construction du maillage de Delaunay contraint en 3D exige parfois une modification locale de la description de la frontière : ajout de points (points de Steiner) et modification de la triangulation (Schönhardt, 1928). Les nouveaux points sont toujours placés sur des triangles de la frontière initiale. Dans la C-Nem, ils sont asservis linéairement à la cinématique des 3 nœuds du triangle sur lequel ils sont placés.

- Une partition du domaine est nécessaire pour le calcul des matrices élémentaires contribuant aux matrices globales issues de la forme faible du problème traité. En 2D les cellules de Voronoï constituent une partition naturelle du domaine étudié. En 3D, pour des domaines fortement non convexes, ce n'est plus le cas (cellules "dégénérées" pour certains nœuds de la frontière). La partition adoptée est alors déduite des volumes "élémentaires" formés par l'ensemble des quarts de tétraèdre connectés à chaque nœud.

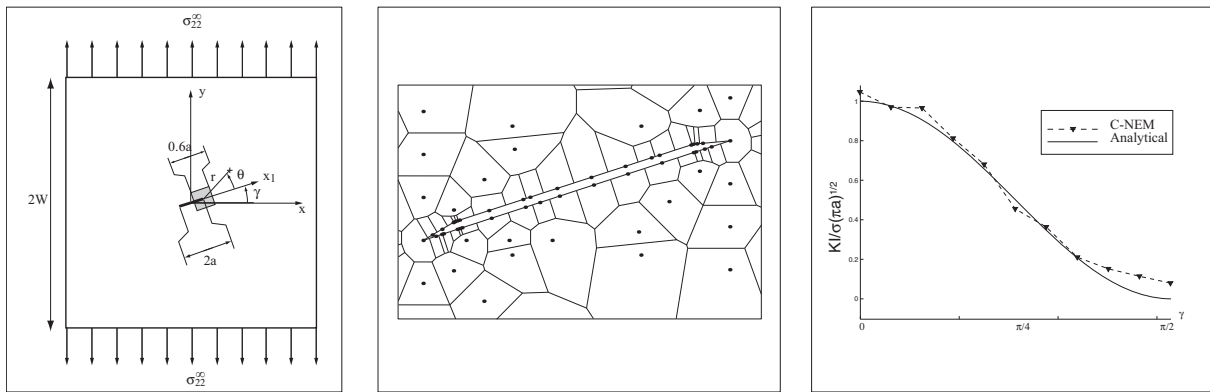
### 3. Exemples d'applications de la C-Nem

- Etude du facteur d'intensité de contrainte au voisinage d'une fissure

Cet exemple porte sur l'étude du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  présent en pointe d'une fissure inclinée (angle  $\gamma$ ) pour une plaque élastique en contraintes planes (Fig. 2(a)).  $K_I$  a été calculé grâce à la méthode proposée par (Yau *et al.*, 1980). Une comparaison entre la solution exacte ( $K_I = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi a} \cos^2 \gamma$ ) et les valeurs de  $K_I$  calculées à l'aide de la C-Nem sont donnés sur la figure 2(c). La courbe peut être améliorée en augmentant la densité des nœuds en pointe de fissure ou au travers d'un enrichissement de l'interpolation en pointe de fissure grâce à la propriété de partition de l'unité de l'interpolation NEM (Melenk *et al.*, 1996).

- Analyse modale

Nous donnons dans le tableau 1 une comparaison, vis à vis d'une solution de référence (modèle avec 900.000 nœuds), des fréquences propres obtenues avec :



**Figure 2.** *Plaque carrée avec une fissure inclinée (a) – Diag. de Voronoï contraint au voisinage de la fissure (b) – Facteur d'intensité de contraintes en fonction de  $\gamma$  (c)*

- colonne 5 : la C-Nem,
- colonne 3 : modèle éléments finis avec maillage de Delaunay,
- colonne 4 : modèle éléments finis avec forme des éléments optimisée.

La structure étudiée est une poutre de dimensions  $0,1m \times 0,1m \times 1m$  encastée à une de ses extrémités ( $E = 2.10^{11}Pa$ ,  $\nu = 0,266$ ,  $\rho = 7800kg.m^{-3}$ ). Les éléments finis utilisés sont des tétraèdres à 4 nœuds. Pour les 3 modèles, les nœuds sont à la même position et au nombre de 8059. Cet exemple montre l'influence de la qualité du

Mode	Référence (Hz)	EF (delaunay)	EF (optimisé)	C-Nem
Mode 1 ( flexion)	81,1	4,2%	3,1%	-2,86%
Mode 2 (flexion)	487,02	4,1%	3,0%	-2,89%
Mode 3 (torsion)	728,81	11,5%	6,3%	-6,73%
Mode 4 (longi.)	1263,8	0,06%	0,04%	-0,38%
Mode 5 ( flexion)	1283,6	4,01%	2,9%	-2,43%

**Tableau 1.** *Comparaison des fréquences propres EF/C-Nem*

maillage sur la solution éléments finis (comparaison colonnes 3 et 4) et situe la C-Nem à un niveau similaire de celui du modèle éléments finis avec maillage optimisé.

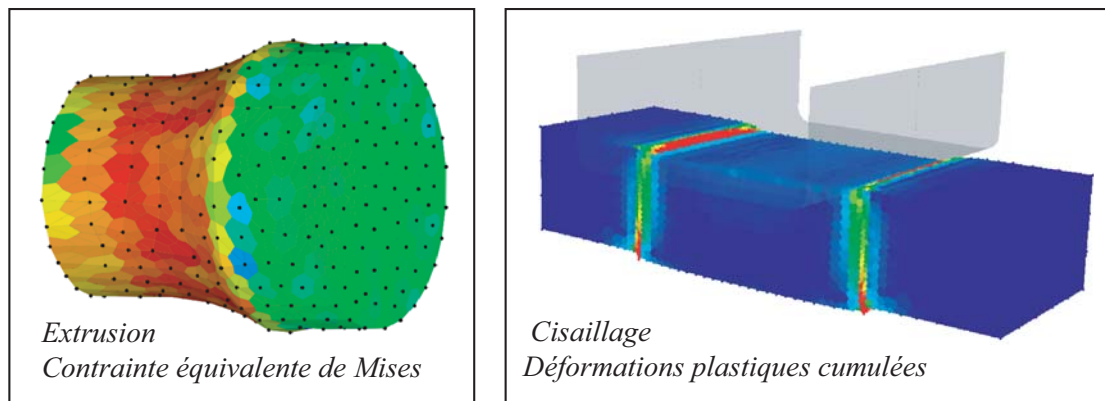
#### • Simulation des procédés

Nous donnons pour finir, à titre d'illustration, deux exemples de simulations réalisées en transformations finies (Figure 3). Ces deux simulations ont été menées avec un schéma d'intégration temporel explicite (différences centrées), le modèle de comportement utilisé pour le matériau est celui de Johnson-Cook.

## 4. Conclusion

Comme le montrent les simulations présentées, l'approche C-Nem en 3D est désormais opérationnelle. Cependant, si les distorsions sur la frontière sont importantes





**Figure 3.** Exemple de simulations en transformations finies

l'intégrité de sa description n'est plus assurée. Ceci rend la construction du maillage de Delaunay contraint impossible. Il est alors nécessaire d'adapter la frontière. Cette adaptation est en cours de réalisation et devrait être opérationnelle prochainement.

## 5. Bibliographie

- Belytschko T., Lu Y., Gu L., « Element-free Galerkin methods », *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, vol. 37, p. 229-256, 1994.
- Chen J., Yoon Y., Wu C., « Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods », *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, vol. 53, p. 2587-2615, 2002.
- Melenk J., Babùska I., « The partition of unity finite element method : basic theory and applications », *Comp. Meth. Applied Mech. and Eng.*, vol. 139, p. 289-314, 1996.
- Nayroles B., Touzot G., Villon P., « Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements », *Computational mechanics*, vol. 10, p. 307-318, 1992.
- Sambridge M., Braun J., McQueen H., « Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbours », *Geophys. J. Int.*, vol. 122, p. 837-857, 1995.
- Schönhardt E., « Über die zerlegung von dreieckspolyedern in tetraeder », *Math. Annalen*, 1928.
- Si H., Gärtner K., « Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations », in , B. B.W. HANKS, Springer (ed.), *14th International Meshing Roundtable*, p. 147-163, 2005.
- Sibson R., « A vector identity for the Dirichlet tessellations », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 87, p. 151-155, 1980.
- Sukumar N., Moran B., Belytschko T., « The natural elements method in solid mechanics », *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, vol. 43, p. 839-887, 1998.
- Yau J.-F., Wang S.-S., Corten H. T., « A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity », *J. Applied Mech. ASME*, vol. 47, p. 335-341, 1980.
- Yvonnet J., Ryckelynck D., Lorong P., Chinesta F., « A new extension of the natural element method for non convex and discontinuous domains : the constrained natural element method (C-NEM) », *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, vol. 60, p. 1451-1474, 2004.