



HAL
open science

Finalités, conditions, intérêts et limites d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur. Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction institutionnelle adressée aux enseignants du primaire

Magali Hersant

► **To cite this version:**

Magali Hersant. Finalités, conditions, intérêts et limites d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur. Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction institutionnelle adressée aux enseignants du primaire. Recherches en éducation, 2010, Hors série (1), pp.60-70. hal-01492158

HAL Id: hal-01492158

<https://hal.science/hal-01492158>

Submitted on 20 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Recherches en éducation

HS1 | 2010

Savoirs et collaborations entre enseignants et chercheurs en éducation

Finalités, conditions, intérêts et limites d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur. Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction institutionnelle adressée aux enseignants du primaire

Goals, conditions, interests and limits of a researcher and teachers collaboration: an example in mathematics

Magali Hersant



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/ree/8718>

DOI : 10.4000/ree.8718

ISSN : 1954-3077

Éditeur

Nantes Université

Référence électronique

Magali Hersant, « Finalités, conditions, intérêts et limites d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur. Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction institutionnelle adressée aux enseignants du primaire », *Recherches en éducation* [En ligne], HS1 | 2010, mis en ligne le 01 juin 2010, consulté le 31 mars 2022. URL : <http://journals.openedition.org/ree/8718> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/ree.8718>



Recherches en éducation est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

**Finalités, conditions, intérêts et limites
d'une collaboration enseignants, formateurs et chercheur.
Un exemple en mathématiques à propos d'une injonction
institutionnelle adressée aux enseignants du primaire**

Magali Hersant¹

Résumé

En 2002, une injonction institutionnelle demande aux enseignants du primaire de réaliser une nouvelle forme de problème en mathématiques : les « problèmes pour chercher ». Pour accompagner cette injonction, nous avons mis en place un groupe de travail avec des enseignants et formateurs dans le but de développer des situations didactiques de ce type. L'article porte sur l'étude rétrospective de cette collaboration. Après avoir précisé les qualités des participants, leurs finalités communes et leurs motivations singulières ainsi que la méthodologie de travail utilisée dans le groupe et les cadres théoriques de référence, nous étudions à partir de l'exemple de l'évolution d'une situation comment les savoirs issus des expériences des enseignants et les savoirs issus de la recherche ont permis de faire évoluer cette situation didactique. Puis, à partir d'un extrait de séance, nous pointons quelques limites au travail réalisé avec les enseignants. Enfin, nous revenons, dans une discussion, sur les finalités et conditions d'une telle collaboration.

En 2002, en France, les nouveaux programmes de mathématiques pour l'école primaire adressent aux enseignants une injonction nouvelle : mettre en place dans leur classe des « problèmes pour chercher » (cf. annexe 1). Cette injonction institutionnelle constitue une réelle nouveauté par rapport aux programmes précédents dans la mesure où les apprentissages visés ne concernent pas directement des savoirs curriculaires mais portent sur « apprendre à chercher » des problèmes de mathématiques et visent plutôt des pratiques des mathématiques et des savoirs relatifs à la dimension expérimentale des mathématiques, à l'argumentation et à la preuve.

Une étude des manuels et des références destinés aux enseignants effectuée en 2004 (Hersant, 2005) montre le peu de ressources disponibles dans le champ. Par ailleurs, à la même époque, les savoirs issus de la recherche concernant l'enseignement et l'apprentissage de ces problèmes singuliers sont peu nombreux. Afin d'accompagner la réalisation de cette injonction institutionnelle et de produire des documents ressources pour un ensemble large de professionnels du premier degré, j'ai donc engagé² une recherche collaborative avec des professeurs du premier degré et des formateurs de l'IUFM³ des Pays de la Loire sous la forme d'un « groupe recherche-action »⁴ inscrit au plan départemental de formation⁵ avec pour objectif

¹ Maître de conférences, IUFM des Pays de la Loire et membre du CREN, université de Nantes.

² Dans ce texte, il est important de pouvoir distinguer ce qui concerne exclusivement l'auteur de l'article et ce qui concerne le groupe de recherche constitué ; à cette fin le « je » et le « nous » sont respectivement utilisés.

³ Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

⁴ Groupe IREM de Nantes - IUFM des Pays de la Loire « Problèmes pour chercher ».

⁵ Sur le plan institutionnel, à partir de 2006, ce travail s'inscrit dans la recherche « Pratiques et mise en textes des savoirs » (INRP, IUFM des Pays de la Loire, IUFM d'Aquitaine) dirigée par C. Orange.

de développer des situations didactiques de type « problèmes pour chercher » pour des classes ordinaires de cycle 3 (élèves de 8 à 10 ans).

Dans cet article, il s'agit de porter un regard distancié sur le travail de ce groupe pour étudier spécifiquement ce que peut apporter une collaboration entre enseignants et enseignant-chercheur, mais aussi pour en identifier des limites. Après avoir présenté le dispositif de travail avec les enseignants, j'illustrerai d'abord comment les différents savoirs et sensibilités peuvent se conjuguer à partir de l'analyse de l'évolution d'une situation élaborée par le groupe. Ensuite, l'étude d'une phase de conclusion d'un problème en classe me permettra de pointer des limites de cette collaboration dans le domaine de la formation et de la transmission de situations didactiques.

1. Dispositif et cadres de travail avec les enseignants

Le noyau du « groupe recherche-action » mis en place en 2004 comprend six personnes qui représentent quatre catégories d'enseignants : une enseignante polyvalente de CE2⁶ (désigné par PE dans ce texte) qui participe aux travaux du groupe au titre de la formation continue ; un enseignant de mathématiques formateur à temps plein à l'IUFM des Pays de la Loire (désigné par F dans ce texte) ; trois maîtres-formateurs⁷ (MF) qui se partagent entre leur classe et la formation d'enseignants ; moi-même (C), enseignant-chercheur à l'IUFM des Pays de la Loire qui partage mon temps entre la formation d'enseignants et la recherche en didactique des mathématiques⁸. F et MF participent au titre de la formation de formateurs.

L'ensemble de ces personnes œuvre pour un objectif commun de développement et d'analyse de situations didactiques de type *problèmes pour chercher* à l'école élémentaire dans le contexte d'une injonction institutionnelle nouvelle adressée aux enseignants. Au niveau individuel, les enseignants (PE et MF) ont pour objectif de développer leur pratique des « problèmes pour chercher ». C'est aussi un des objectifs du travail du groupe ; rappelons en effet qu'il s'agit d'un groupe recherche-action inscrit au plan départemental de formation. Mais l'implication de chacune des personnes est aussi liée à des motivations plus personnelles.

■ Un objectif commun, des motivations singulières

- Répondre à des questions sur les savoirs en jeu et les apprentissages possibles

Dans la continuité de mes travaux (Hersant, 2001 ; Perrin-Glorian & Hersant, 2003), ce dispositif constitue une occasion d'étudier des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage d'un savoir mal défini dans deux directions non indépendantes. D'abord, le processus d'institutionnalisation des savoirs dans la classe est ici particulièrement questionné. En effet, l'institutionnalisation de savoirs relatifs à la résolution de problèmes qui est reconnue difficile (cf. par exemple, Hersant, 2004) est ici rendue extrêmement délicate car les savoirs mathématiques en jeu ne sont pas clairement définis dans les documents d'accompagnement. Ces documents distinguent seulement cinq objectifs, sans les hiérarchiser, ce qui ne peut que contribuer à rendre difficile le processus d'institutionnalisation pour les enseignants (comment choisir parmi ces cinq objectifs ? à quels savoirs mathématiques renvoient ces objectifs ?).

⁶ Élèves de 8 ans.

⁷ Un maître-formateur est un enseignant du premier degré en charge d'une classe et dont une partie du temps est dévolue à la formation et à l'accompagnement des stagiaires professeurs des écoles. Il est titulaire d'un CAFIPEMF (Certificat d'Aptitudes aux Fonctions d'Instituteur / Professeur des Ecoles Maître-Formateur).

⁸ En France, le statut d'enseignant-chercheur correspond, d'une certaine façon, à un mi-temps enseignement, mi-temps recherche. Un enseignant-chercheur en IUFM est donc aussi formateur d'enseignants, ce qui lui donne un statut particulier dans une telle recherche : formateur comme d'autres collègues mais aussi chercheur.

Ensuite, de façon dialectique, en référence au cadre de la problématisation (Orange, 2005), je m'intéresse aux apprentissages possibles à partir de ces « problèmes pour chercher » pour des élèves de 8 - 10 ans. En effet, certains des objectifs assignés à ces problèmes concernent des apprentissages que l'on peut qualifier de « méthodologiques » (objectif 3) et il y a peu de résultats en didactique des mathématiques à propos de ces questions au niveau du cycle 3. Mais est-il possible d'apprendre sur la résolution de problème en mathématiques en général ? On peut comprendre ainsi la proposition de Poya (Polya, 1957) : « *If you adress these questions and suggestions to yourself, they may help you to solve your problem.* » (p.XIX). Mais les « méthodes » de résolution des problèmes mathématiques sont aussi épistémologiquement liées au « type » et au domaine de problème, même si certains identifient des « savoirs transversaux » (Grenier & Payan, 2003) à la résolution de problèmes. Un autre objectif concerne le développement de compétences argumentatives chez les élèves (objectif 4), mais comment traduire ces compétences en savoirs ?

Ces questions relatives aux apprentissages mathématiques des élèves sont partagées avec F qui proposait des problèmes d'optimisation, sous forme de défi, à ses élèves de 11 - 12 ans lorsqu'il était enseignant de mathématiques. Il y trouvait un intérêt, mais il constate la difficulté à identifier précisément les savoirs en jeu dans ces problèmes.

- *Prendre de la distance sur ses pratiques, développer ses pratiques*

Pour PE et MF, il s'agit de prendre du temps pour réfléchir à leur enseignement lors d'un travail d'équipe rassemblant « experts »⁹ et « collègues de terrain » qui permet de croiser différents regards sur une même situation didactique. En particulier, PE souhaite réfléchir sur sa pratique des problèmes qui renvoie trop, à son avis, à l'utilisation de techniques opératoires sans autre travail mathématique. Au-delà d'une mise en conformité aux nouveaux programmes, la démarche des enseignants est aussi tournée vers leurs élèves : ils souhaitent pouvoir leur proposer des situations qui les poussent à réfléchir plutôt qu'à appliquer des « recettes toutes prêtes », ils souhaitent permettre à leurs élèves de développer une autre image des mathématiques et ainsi, peut-être, réconcilier certains d'entre eux avec cette discipline. De plus, les MF, comme F et C, espèrent tirer de ce travail des éléments pour la formation des stagiaires, autant en ce qui concerne les situations elles-mêmes que les apprentissages des élèves.

■ **Éléments-cadres du travail du groupe**

La représentation de l'activité de recherche en mathématiques et de son apprentissage, que F et moi partageons, sert de cadre au travail du groupe. Cette représentation qui est explicitée aux enseignants est la suivante (Hersant & Thomas, 2009) : « *Nous souhaitons permettre à tous les élèves de s'engager dans la résolution du problème et de faire des mathématiques un peu différentes de celles qu'ils fréquentent le plus souvent (au sens de la plupart du temps dans une classe) pour contribuer à réassurer certains élèves « modestes » en mathématiques et, plus généralement, à élargir la représentation que les élèves ont des mathématiques. [...] Enfin, par leur nature et leur formulation, ces problèmes permettent de dépasser l'opposition juste/faux pour entrer dans une démarche de problématisation (Orange, 2005) qui articule trois possibilités : pertinent au regard des contraintes du problème, non pertinent et optimal (meilleure solution possible). Nous avons aussi choisi ces problèmes car ils permettent de travailler au cycle 3 sur l'argumentation et la preuve en accord avec notre représentation de l'activité de recherche en mathématiques. Il nous semble en effet essentiel que les élèves rencontrent dès l'école primaire, puis en 6ème et 5ème, des situations de mathématiques où ils sont amenés à argumenter, sans quoi leur idée de la preuve mathématique risque de se réduire à celle de démonstration formelle. Pour nous, l'activité de recherche d'un problème de mathématiques est une articulation entre « expériences mathématiques » (au sens de Chevillard, 1992), conjectures et preuves qui situe la résolution de problèmes mathématiques comme une activité expérimentale complémentaire de la maîtrise d'un certain nombre de savoirs plus techniques (Perrin, 2007).»*

⁹ Le terme « expert » est utilisé ici de façon très naïve.

■ **Méthodologie de travail du groupe**

Le corpus de problèmes mathématiques qui sert de base aux situations élaborées par le groupe et mises en œuvre dans les classes est constitué de problèmes proposés par F. Assez rapidement et pour des raisons didactiques, nous avons convenu de nous limiter à des problèmes d'optimisation.

La méthodologie de travail du groupe s'apparente à celle d'une ingénierie didactique (Artigue, 1990 ; Artigue et Perrin-Glorian, 1991 ; Perrin-Glorian, à paraître). Elle correspond à des allers-retours entre analyse préalable, analyse *a priori* et analyse *a posteriori*, réalisés lors de réunions et en référence à des expérimentations des situations en classe. Toutefois, les membres du groupe non chercheurs participent aux différentes phases d'élaboration de la situation, ce qui permet en particulier de tenir compte, *a priori*, de contraintes des enseignants. Ainsi, à partir d'un premier énoncé d'un problème que nous adaptons, nous élaborons un scénario. Lorsque ce scénario nous semble satisfaisant, un des enseignants du groupe le teste dans sa classe. La séance ou les séances sont intégralement filmées par C ou F qui assistent à la mise en œuvre, observent les élèves et souvent (en particulier lorsqu'il s'agit d'un premier scénario) participent à la séance de façon plus ou moins importante (aide à la constitution des groupes ou décision avec l'enseignant de modifier le scénario en fonction des productions des élèves, prise en main de la classe sur demande de l'enseignant...). Quelquefois d'autres enseignants du groupe assistent aussi aux séances. L'analyse de la réalisation du scénario, à partir de vidéos, de productions d'élèves et d'« impressions » des personnes présentes fait l'objet d'un travail du groupe qui vise à améliorer la situation en vue d'une nouvelle expérimentation. Des entretiens avec les enseignants, à partir de vidéos réalisées dans leur classe, sont quelquefois réalisés. Des tests sont proposés aux élèves pour évaluer leurs connaissances à l'issue de la ou des séances.

2. Complémentarité des connaissances et développement de situations didactiques

Le groupe est composé de personnes ayant des expériences et, donc, des connaissances différentes, et complémentaires, concernant les mathématiques, la gestion d'une classe, les élèves et leurs apprentissages mathématiques,

la représentation de ce que c'est que « faire des mathématiques ». Cette diversité et cette complémentarité sont fructueuses pour le développement de situations didactiques destinées à des classes ordinaires, à condition que chacun s'autorise à exercer pleinement ses connaissances sans se figer dans un rôle prédéfini par son statut, comme je le montre ici à partir d'un exemple.

Dans cette partie, je vais illustrer cette idée en prenant l'exemple du développement d'une situation didactique relative à un problème connu sous le nom de « No Three in a Line » que nous nommons « Pas trois points alignés » où il s'agit de placer le plus de points possible sur les intersections d'une grille de n lignes et n colonnes sans jamais en aligner trois. Le problème n'est pas résolu pour les « grandes » valeurs de n (voir <http://mathworld.wolfram.com/No-Three-in-a-Line-Problem.html>). L'enjeu de la situation didactique est de faire basculer les élèves de la recherche d'une disposition « optimale » à la recherche de raisons et de nécessités qui permettent de prouver qu'on ne peut placer que 10 points sur la grille sans en aligner trois. Il s'agit en particulier de les amener à invalider des arguments du type « On ne peut pas en mettre plus que 10 car on a déjà beaucoup cherché » (argument qui relève de l'empirisme) à un argument de type scientifique (apodictique au sens de Bachelard, 1949).

Je m'appuie ici sur les comptes rendus des réunions du groupe et sur le calendrier de réalisation des séances dans les classes pour effectuer une étude chronologique de l'évolution de la situation didactique du point de vue de la formulation du problème et du scénario. Il faut noter que cette évolution connaît des périodes de stagnation en partie dues au fait que le groupe travaillait simultanément sur plusieurs problèmes (cf. Hersant & Thomas, 2009).

■ **La formulation du problème**

En novembre 2005, la formulation initiale du problème est la suivante : « *Quel est le nombre maximum de croix que l'on peut placer sur une grille de quatre lignes et quatre colonnes sans en aligner trois ?* »

En mai 2006, avant une première mise en œuvre en classe, le problème est formulé de la façon suivante : « *Placer le plus possible de croix sur les intersections de cette grille sans former d'alignement de trois croix.* »

Puis, en septembre 2007, après trois expérimentations en classe (juin, octobre et novembre 2006), il est formulé ainsi : « *Placer sur les intersections de cette grille le plus possible de points sans en aligner trois.* »

Cette évolution de la formulation du problème résulte d'une complémentarité des connaissances, exigences et sensibilités des membres du groupe.

- *Rigueur mathématique*

Le terme « maximum » est compréhensible dans un sens commun pour les élèves de cycle 3 mais, mathématiquement, cela signifie que cette valeur est atteinte et, donc, sous-entend que les élèves pourront placer ce nombre de croix. F est particulièrement sensible à cette différence. C'est une des raisons pour laquelle nous remplaçons « maximum » par « le plus possible ».

- *Consigne, enrôlement et activité mathématique souhaités*

La première formulation ne précise pas qu'il faut placer les croix sur les intersections. Nous sommes tous d'accord qu'il ne faut pas laisser implicite cet élément pour que les élèves entrent rapidement dans le problème souhaité pour différentes raisons. La question « Quel est le nombre maximum de croix que l'on peut placer sur une grille de quatre lignes et quatre colonnes sans en aligner trois ? » appelle une réponse numérique comme la plupart des problèmes que les élèves rencontrent à l'école primaire et non une « action » comme la consigne « placer ». Ainsi, la première formulation risque de rebuter certains élèves et, donc, d'empêcher leur engagement dans le problème. Or, avec ces problèmes nous comptons réconcilier certains élèves avec les mathématiques et modifier la représentation qu'ils en ont. Les enseignants sont particulièrement sensibles à cet aspect car ils constatent dans leur classe que certains de leurs élèves sont en difficulté élective en mathématiques et pensent qu'ils pourraient mieux réussir dans cette discipline. C'est d'ailleurs, une de leur motivation pour ce travail.

La formulation initiale peut conduire les élèves à proposer des valeurs sans se soucier de leur pertinence, sans rechercher les nécessités associées. Contrairement à la consigne « placer » qui demande une « action », elle n'invite pas les élèves à un « bricolage » essentiel pour qu'ils rencontrent, ou commencent à rencontrer, le « vrai » problème et formulent des conjectures¹⁰. En ce sens, elle n'est pas conforme à la représentation des mathématiques que nous souhaitons développer chez les élèves.

Cette première consigne ne permet pas d'inscrire le travail dans une dimension qui dépasse la dichotomie juste/faux, conformément aux objectifs que nous nous sommes fixés. En effet, cette formulation qui sous-entend qu'il y aurait une seule réponse ne permet pas de travailler sur la différence entre solution conforme aux contraintes et « meilleure » solution. De plus, elle ne laisse pas de place non plus à l'indéterminée et au doute.

¹⁰ A l'époque, nous ne savons pas si des élèves de cycle 3 peuvent avoir une telle démarche, mais nous sommes sûrs que la première formulation ne le permet pas.

■ **L'évolution du scénario**

Pour réaliser nos objectifs, outre le choix de la formulation de la première consigne, il faut travailler le scénario de la situation, c'est-à-dire déterminer les différentes phases de la situation, leur articulation et les formulations de consignes et de conclusions associées. Il est plus difficile ici de préciser comment chaque membre du groupe a contribué précisément à l'élaboration et à l'évolution du scénario de la situation, probablement en partie car nous sommes tous enseignants, à des niveaux scolaires différents, et nous référons donc tous à des savoirs issus de l'expérience qui sont proches. Je préciserai toutefois trois points.

D'abord, s'il y a un accord de l'ensemble des personnes sur l'intérêt d'un travail individuel avant le travail de groupe et le débat, les raisons peuvent être différentes. Du point de vue des savoirs issus de l'expérience, il est clair que l'entrée dans la situation est facilitée par une première phase de recherche individuelle du problème qui permettra aux élèves d'en comprendre les contraintes. Le point de vue des savoirs issus de la recherche permet de préciser cela : cette première phase me semble essentielle car elle permet aux élèves de délimiter, au moins implicitement, le champ des possibles pour ce problème (Orange, 2005).

De la même façon, l'organisation en différentes phases de la situation (cf. annexe 2) répond à certaines nécessités de déroulement envisagées à partir des savoirs issus de l'expérience mais cette organisation est aussi étroitement liée pour moi au cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et, notamment, au canevas « situation d'action - situation de formulation - situation de validation ».

Enfin, les observations effectuées dans les classes permettent d'apporter des précisions au scénario initial à partir des savoirs issus de l'expérience observés dans des actions singulières de certains enseignants du groupe et explicitées ensuite. Parfois ces pratiques sont si naturelles pour l'enseignant qu'elles ne lui apparaissent pas comme importantes. Ainsi, le premier scénario précise seulement les grandes étapes du déroulement de la situation et les consignes « clé » (où justement l'analyse *a priori* montre qu'il y a risque d'achoppement). Des précisions, nécessaires puisqu'elles réfèrent à des savoirs issus d'expérience singulière et non partagés dans le groupe, sont ajoutées. Ainsi, car cela est plus pertinent pour ce problème, nous proposons d'étudier les propositions des élèves par ordre décroissant du nombre de croix trouvées, ce que les enseignants du groupe ne font pas tous spontanément. De plus, pour créer une rupture favorable à un détachement du registre empirique, nous demandons aux élèves de ranger leur grille ou de se déplacer.

3. Une limite de cette collaboration : l'appropriation des savoirs mathématiques par les enseignants

Dans les problèmes que nous développons, des apprentissages sur des notions mathématiques bien identifiées dans les programmes peuvent s'effectuer. Par exemple, « Pas trois points alignés » permet de revisiter la notion d'alignement et nous

avons observé que des apprentissages s'opèrent à ce sujet. Cependant, nous visons l'apprentissage de savoirs mathématiques relatifs à la recherche et à la résolution de problèmes mathématiques (cf. Hersant & Thomas, 2009), étroitement liés à l'épistémologie des mathématiques :

1. dépasser sa conviction, son intuition, pour établir et formuler une conjecture qu'on cherchera à prouver ;
2. comprendre que l'impossibilité mathématique est autre chose que l'impossibilité empirique ;
3. savoir qu'une preuve mathématique ne correspond pas toujours à un raisonnement hypothético-déductif ;
4. distinguer le vrai, le faux et l'indéterminé en mathématiques.

L'enseignant doit se situer dans cette perspective tout au long de la séance, ce qui suppose en particulier qu'il « soit au clair » avec les savoirs en jeu.

Dans le groupe, les enseignants ont l'occasion de pratiquer ces savoirs et sont associés à leur mise en texte : ils cherchent les problèmes au cours des réunions du groupe, la formulation des synthèses et conclusions à faire en classe fait le plus souvent l'objet d'un travail du groupe. Mais, vraisemblablement le dispositif de collaboration mis en place n'a pas permis à l'ensemble des enseignants du groupe de s'approprier ces savoirs et leurs pratiques. Cela est perceptible lors de la gestion des moments de débat ou lorsqu'ils butent sur les synthèses et conclusions de séance, comme nous allons le voir. Je pense que ces difficultés sont en partie liées à la forte insécurité pour l'enseignant que génèrent ces situations et à la contingence de leur déroulement, mais aussi à une difficulté de « transmission » des savoirs mathématiques et épistémologiques aux enseignants du groupe.

■ **Savoirs, pratiques et mises en texte des savoirs dans ces problèmes**

La preuve des problèmes que nous développons articule le plus souvent des arguments issus du registre empirique et des arguments issus du registre rationnel qui se complètent toujours de la même façon. Par exemple, dans « Pas trois points alignés » la détermination de la valeur qui, de façon sûre, ne pourra pas être dépassée, relève du registre déductif : sur chaque ligne on peut placer 0, 1 ou 2 points, donc sur une grille de n lignes et n colonnes on peut en placer au plus $2n$. Autrement dit, sur une grille de 5 lignes et 5 colonnes, le plus de points que l'on pourrait placer est 10, on est sûr qu'on ne peut pas en placer 11, 12... Ce raisonnement déductif ne donne aucune information sur le fait qu'il soit effectivement possible de placer 10 points, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle ce problème n'est pas résolu pour les « grandes » grilles. En ce sens, et à ce stade du raisonnement, 10 est seulement une solution potentielle puisque rien ne garantit qu'effectivement on réussira à placer 10 points sur une grille de 5 lignes et 5 colonnes. On ne peut conclure que si ce raisonnement est complété par l'exhibition d'une disposition avec 10 points qui relève du registre empirique et qui constitue un possible empirique (« on peut faire 10 car je l'ai fait »). En conséquence, pour permettre l'appropriation de l'articulation de ces deux éléments de l'argumentation par les élèves qui renvoie à nos objectifs d'apprentissage 3 et 4, nous envisageons deux conclusions possibles de la séance, explicitement formulées lors d'une réunion préparant des expérimentations et écrites dans un document distribué aux enseignants.

- *Première possibilité : si les élèves n'ont pas trouvé de solution à 10 points.*

On conclut alors de la façon suivante : « On sait par un petit raisonnement qu'on ne peut pas placer plus de 10 points sur la grille en respectant la consigne « pas trois points alignés ». On sait qu'on peut en placer p (la meilleure solution trouvée dans la classe). Peut-être qu'on peut en placer $p+1, \dots, 10$, mais ce n'est pas sûr. » Ce discours peut être accompagné d'une représentation au tableau du type suivant :

p-1	p	p+1	...	10	11	12	...
Oui	Oui	?		?	Non	Non	non

Où « oui » signifie « on peut placer ... points sur la grille sans en aligner trois », « non » signifie « on ne peut pas placer ... points sur la ligne sans en aligner trois », « ? » signifie « on ne sait pas si on peut placer ... points sur la ligne sans en aligner trois ».

- *Seconde possibilité : si un ou des élèves ont trouvé des dispositions correctes avec 10 points*

On conclut alors : « On sait par un petit raisonnement qu'on ne peut pas placer plus de 10 points sur la grille en respectant la consigne « pas trois points alignés ». Certains d'entre vous ont réussi à placer 10 points. Donc la conclusion de ce problème est que le plus de points que l'on peut placer sur cette grille en respectant la consigne « pas trois points alignés » est 10. »

■ **Le nécessaire, le suffisant et la solution du problème : une articulation délicate**

La gestion de la phase de conclusion demande une grande vigilance et peut aboutir à des glissements malheureux. Par exemple, dans une classe, alors qu'il vient d'être établi que 10 n'est pas impossible, certains élèves essaient de s'approprier le raisonnement qui permet cette conclusion (« sur la première ligne, on peut mettre au plus 2 points... ») et interagissent avec l'enseignant :

1. PE : parce que pour en mettre 11, il faut que j'en mette ici par exemple 3. Et si je mets un trois ici, vous allez me dire, c'est pas possible. Si je mets un trois ici, vous allez me dire, t'as pas le droit, là non plus, là non plus et là non plus. Donc, je suis obligée d'en mettre que deux par ligne. Donc sur la première ligne j'en mets 2, sur la deuxième j'en mets 2, sur la troisième j'en mets 2, sur la quatrième j'en mets 2 et tout cela ça me fait que 10 points possibles. Je ne peux pas en mettre 11. ... oui ? [...] oui, Chloé, tu avais quelque chose à rajouter ?
2. Chloé : ben, moi. Je peux montrer au tableau ? parce que je me suis aperçue qu'en fait on peut pas *elle se déplace* parce que là, là et là, y' qu'un seul point mais là on peut pas parce que sinon ça fait trois, là on peut pas parce que sinon ça fait 3, là on peut pas parce que sinon ça fait 3, là on peut pas parce que sinon ça fait 3 et là aussi, donc on peut pas en mettre 10 en fin de compte.
3. PE : alors... si. On peut. On sait qu'on peut mais est-ce qu'on a trouvé la solution à 10 ?
4. élève : non
5. PE : non. On ne l'a pas cherchée, on ne l'a pas trouvée. Et pourtant c'est faisable parce qu'on sait que heu, quelque part il doit y avoir une solution : on en met 2 sur une ligne, on en met 2 sur une autre, on en met 2, mais peut-être que c'est pas là qu'il faut les mettre. Ce... cette chose-là elle nous aide pas. Il faudrait refaire une grille et d'ailleurs je vais vous en redonner, je vais vous les laisser et vous allez chercher, et promis, on peut. Donc, dans sa tête on sait qu'on peut par contre, on n'a pas encore trouvé la solution.
6. élève : ben, oui
7. PE : mais elle existe, mais est-ce qu'on va chercher la solution pour en mettre 11 ?
8. plusieurs élèves : non
9. PE : non. Ça on sait que c'est pas la peine, on perdrait notre temps, ça ne sert à rien. D'accord ?
10. plusieurs élèves : donc on peut en mettre que 10.
11. PE : on sait qu'on peut en mettre que 10. Mais vous voyez, dans ce problème, on n'a pas la solution.
12. élève : ben, non
13. PE : on a... on sait qu'on peut faire, mais on n'a pas trouvé encore.
14. élèves : ben, non
15. PE : mais est-ce que c'est pour ça que le problème n'est pas fait ?
16. élève : ben, non
17. PE : ben, non. Non, il n'est pas fait *puis pour se reprendre* il est fait quelque part, on sait... on sait combien on peut en trouver, on sait qu'on ne peut pas aller plus loin, maintenant à vous de trouver la vraie solution sur la grille. Donc, je vous laisserai des grilles et puis on verra, peut-être qu'au bout d'un moment, dans le temps que vous avez de libre eh bien, les petits copains, y'en a un qui va dire « ça y'est, je l'ai la solution ». Vous verrez qu'en plus, y'en a pas qu'une.
18. élève surpris : hein ?
19. PE : oui, il y en a plusieurs solutions. Ça paraît difficile comme ça, hein, et puis en fait il suffira de chercher. Et promis, y'aura une solution avec les 10.
20. élève : tu l'as trouvée ?
21. PE : oui, je l'ai trouvée.

A la suite de l'intervention de Chloé (2), l'enseignante indique explicitement que 10 est la solution (« On peut. On sait qu'on peut, mais est-ce qu'on a trouvé la solution à 10 ? ») alors qu'il vient seulement d'être établi que nécessairement il y a au plus 10 points sur la grille. Comment interpréter ce glissement ? Est-ce une difficulté à laisser une grande incertitude aux élèves quant à la solution d'un problème ? Un réflexe de fournir la solution ? Je ne le pense pas car précédemment PE a parfois laissé ses élèves chercher plus d'une semaine sans leur fournir la solution. Il me semble plutôt que le glissement est lié à la complexité mathématique du raisonnement associé à la preuve.

D'abord, il faut noter un dédoublement de situation : Chloé voudrait positionner une dixième croix sur une grille qui en contient déjà 9 sans avoir d'alignement de trois points, ce qui lui apparaît impossible alors que le raisonnement de PE concerne les contraintes de construction d'une nouvelle grille. Cette différence essentielle entre la possibilité de compléter une grille qui contient déjà 9 points sans alignement de trois points avec une dixième croix et la possibilité de placer dix croix sans en aligner trois sur une nouvelle grille constitue une difficulté particulière pour PE.

Ensuite, le raisonnement à effectuer est spécifique et complexe du point de vue logique (il y a deux conditions nécessaires de natures empirique et déductive à associer). Sa transmission nécessite d'avoir bien identifié et intériorisé la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, ce qui permet de distinguer le non impossible (les nombres inférieurs à 10) et la solution au problème. En effet, d'une part, la proposition « on ne peut pas placer plus de 10 points sur la grille sans en aligner trois » ne constitue pas une condition suffisante à la proposition « le plus de points que l'on peut placer sur la grille est 10 ». Et, d'autre part, deux conditions sont ici nécessaires à la proposition « le plus de points que l'on peut placer sur la grille est 10 » : avoir montré qu'on ne peut pas placer plus de 10 points sans en aligner trois et exhiber une solution à 10 points.

La formulation de PE au début de l'extrait conforte pour moi cette explication. En effet, PE indique « Donc sur la première ligne j'en mets 2, sur la deuxième j'en mets 2, sur la troisième j'en mets 2, sur la quatrième j'en mets 2 et tout cela ça me fait que 10 points possibles », comme si effectivement sur chaque ligne on pouvait mettre 2 points. Cette formulation peut, de mon point de vue, fermer le débat. Elle est très différente de la suivante « Sur la première ligne, je peux mettre 0, 1 ou 2 points. ... » qui donne explicitement le champ des possibles et permet de mieux poser, dans un premier temps, la différence entre le non impossible et la solution, et, dans un second temps, d'ouvrir le débat entre les élèves.

4. Discussion : l'articulation des savoirs d'expérience et des savoirs issus de la recherche

Nous avons présenté un exemple de modalité de collaboration entre chercheur et praticiens : la collaboration qui vise le développement de situations didactiques destinées à des classes ordinaires. Il convient maintenant de

discuter de l'articulation entre savoirs issus de l'expérience et savoirs issus de la recherche dans cette collaboration : comment y interviennent les savoirs issus de la recherche et les savoirs issus de l'expérience ? À quelles fins respectives ? S'articulent-ils vraiment ? A quelles conditions ?

Pour cela, il nous semble important de rappeler le contexte de réalisation de notre collaboration : chercher à produire une réponse à une injonction institutionnelle à laquelle ni le chercheur, ni les enseignants n'ont de réponse « toute faite ». L'objectif commun de construire, d'éprouver et de discuter des situations didactiques dans des classes permet de créer un climat de confiance où chacune des personnes du groupe fait part de ses savoirs et s'exprime assez librement. Ce dernier point constitue, à mon avis, une condition à toute collaboration entre enseignants et chercheur. Elle apparaît d'autant plus importante ici car les situations didactiques que les enseignants acceptent de « tester » dans leur classe correspondent à des dispositifs innovants et génèrent une prise de risque pour l'enseignant.

Les situations didactiques produites par le groupe constituent des savoirs à l'interface des savoirs issus de la recherche et des savoirs issus de l'expérience. En effet, les deux types de savoirs ont nourri la production des situations didactiques comme nous l'avons montré. En ce sens, nous identifions une articulation de ces deux types de savoir. Cependant, dans le temps même de la collaboration entre chercheur et praticiens, savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience ne sont pas toujours sur le même plan pour l'ensemble des personnes du groupe : il semble y avoir en effet des « dédoublements ». En particulier, les savoirs issus de la recherche de type « modèle » (théorie des situations, Brousseau, 1998 ; problématisation, Orange, 2005) qui servent de cadre à la collaboration sont toujours présents pour le chercheur mais restent vraisemblablement dans un arrière-plan, pour certains enseignants, au moins lors de la réalisation des séances de classe. Il y a ici, à mon avis, un point délicat dans l'articulation des savoirs issus de la recherche et de l'expérience qui est probablement lié à la difficulté réelle, pour tout enseignant, de s'approprier pour les incarner dans sa pratique les cadres théoriques du chercheur. Cette difficulté me semble doublement renforcée. D'une part, du côté des praticiens,

des dédoublements d'objectifs sont possibles entre objectif commun de production de situations et motivations singulières des enseignants, avec une primauté accordée à la production. D'autre part, du point de vue du chercheur et du formateur, deux objectifs « produire des situations didactiques » et « former les enseignants » sont poursuivis dans ce dispositif et, vraisemblablement, le développement de situations a pris le dessus. *A posteriori*, il apparaît que le pari d'une appropriation de certains savoirs issus de la recherche par imprégnation sur une durée assez longue (cinq années rappelons-le) a été fait. En effet, il n'y a pas eu, comme c'est le cas lors d'une véritable formation, d'institutionnalisation portant sur les cadres théoriques. Cela pose une question : est-il raisonnable, compte tenu de la tension à maintenir entre liberté d'expression des savoirs issus de l'expérience et institutionnalisation de savoirs issus de la recherche, de penser dans une même collaboration le développement de situations et la formation d'enseignants ? Par ailleurs, une institutionnalisation de cadres théoriques aurait-elle été suffisante ? Dans ce cas précis du développement de situations de type « problèmes pour chercher », je ne le pense pas. En effet, ici au-delà de la distinction savoirs issus de l'expérience / savoirs issus de la recherche, il faut aussi considérer la distinction entre savoirs didactiques et pédagogiques (qui relèvent à la fois de la recherche et de l'expérience) et savoirs mathématiques (avec la distinction entre savoirs mathématiques et savoirs sur les mathématiques acquis d'expérience). Or, typiquement, ici, l'expérience que chacune des personnes du groupe a des mathématiques, le rapport au savoir qu'elle a développé, son épistémologie des mathématiques ne sont pas neutres. En particulier, il me semble qu'un travail, avec institutionnalisation, sur les raisonnements en mathématiques aurait été nécessaire pour éviter, autant que possible des glissements tels que celui relaté ici. La question des rapports entre savoirs didactiques, savoirs disciplinaires, savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience, est donc posée.

Bibliographie

- ARTIGUE M. (1990), « Ingénierie didactique », *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, pp.281-308.
- ARTIGUE M. & PERRIN-GLORIAN M.J. (1991), « Didactic engineering, research and development tool : some theoretical problems linked to this duality », *For the learning of Mathematics* n°11.1, pp.3-17.
- BACHELARD G. (1949), *Le rationalisme appliqué*, Paris, PUF.
- ORANGE C. (2005), « Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques », *Les Sciences de l'éducation, Pour l'ère nouvelle*, n°38-3, pp. 69-94.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1992), « Le caractère expérimental de l'activité mathématique », *Petit x*, n°30. pp.5-15.
- GRENIER D. & PAYAN C. (2003), « Situations de recherche en classe essai de caractérisation et proposition de modélisation », *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*, n°92.
- HERSANT M. (2001), *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, Thèse Université Paris 7.
http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=2d5ceqrd0ndk0ri3c4etlb92u6&view_this_doc=tel-00122340&version=1
- HERSANT M. (2004), « Caractérisation d'une pratique d'enseignement des mathématiques, le cours dialogué », *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, n°4(2), pp.241-258.
- HERSANT M. (2005), *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*, IREM de Nantes, ISBN 2-86300-029-2.
- HERSANT M. (2008), « Problèmes pour chercher : des conduites de classes spécifiques », *Grand N*, n°81, pp.57-75.
- HERSANT M. & THOMAS Y. (2009), « Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3 », *Actes du 35^e colloque Copirelem, Bombannes*.

ORANGE C. (2005), « Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques », *Les Sciences de l'éducation. Pour l'ère nouvelle*. Vol.38, n°3, pp.69-94.

PERRIN D. (2007), « L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples », *Actes du XXXIII^e colloque sur la formation des maîtres*, pp.37-72.

PERRIN-GLORIAN M.J. & HERSANT M. (2003), « Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires », *Recherches en didactique des mathématiques*, n°23(2), pp.217-276.

PERRIN-GLORIAN M. J. (à paraître), « L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie de deuxième génération », *Actes de la 15^e école d'été de didactique des mathématiques*

POLYA G. (1957), *How to solve it*, Garden City, NY : Doubleday and Co., Inc.