



**HAL**  
open science

# Modélisation asymptotique de l'endommagement dans les interfaces quasi-fragiles

Céline Pelissou, Frédéric Lebon

► **To cite this version:**

Céline Pelissou, Frédéric Lebon. Modélisation asymptotique de l'endommagement dans les interfaces quasi-fragiles. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01492145

**HAL Id: hal-01492145**

**<https://hal.science/hal-01492145>**

Submitted on 18 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modélisation asymptotique de l'endommagement dans les interfaces quasi-fragiles

Céline Pelissou — Frédéric Lebon

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS - UPR 7051 )  
31 chemin Joseph-Aiguier  
13402 Marseille Cedex 20  
{pelissou,lebon}@lma.cnrs-ms.fr

---

*RÉSUMÉ. Nous nous intéressons à la modélisation asymptotique de l'endommagement occasionné dans les interfaces entre le mortier et la brique, dans les murs de maçonnerie. Cette modélisation tient compte de certains phénomènes mécaniques qui gouvernent leur rupture tels que le glissement et le frottement à l'échelle microscopique, ainsi que de l'endommagement (normal et/ou tangentiel). Pour ce faire, nous nous inspirons d'une version simplifiée du modèle d'interphase de Gambarotta (Gambarotta et al., 1997) pour établir notre modèle d'interface qui aura la particularité d'être quasi-fragile et endommageable. Par une technique asymptotique, en faisant tendre l'épaisseur de l'interface vers zéro, nous avons pu passer d'un comportement volumique à un comportement surfacique. Dans ce modèle asymptotique, la variable de l'endommagement est gouvernée par un seuil de type élasto-plasticité avec écrouissage. Ce modèle a été implanté dans un code de calculs éléments finis 2D, Gyptis.*

*ABSTRACT. The main of this work consists in the damage modelling of the mortar/brick interface for the masonry walls. This modelling takes into account mechanical phenomena which govern their rupture, such as the sliding and the friction at the microscopic scale and the normal and tangential damage. In this goal, we introduce a quasi-fragile damage interface model by extending the bulk model developed by Gambarotta. When the thickness of the interface tends to zero, the bulk behaviour moves to the surface behaviour by an asymptotical technique. In this model, the damage variable is governed by a limit condition similar to an elastoplastic model with an hardening condition. This model is incorporated in the 2D finite element software.*

*MOTS-CLÉS : interface brique/mortier, endommagement, méthode asymptotique, éléments finis.*

*KEYWORDS: masonry, mortar/brick interface, damage, asymptotical method, finite element.*

---

## 1. Introduction

L'étude du comportement des structures maçonnées reste à ce jour un domaine de recherche encore vaste à exploiter. De nombreux chercheurs s'y sont penchés d'un point de vue culturel, social et économique en vue de restaurer et de préserver le patrimoine architectural. Des modèles théoriques et numériques ont pu être établis en faisant appel, la plupart du temps, à des techniques d'homogénéisation. Par exemple, certains s'intéressent à la vulnérabilité des constructions en maçonnerie aux séismes (Gambarotta *et al.*, 1997). Le comportement mécanique de ces structures maçonnées dépend fortement de la nature des constituants de la maçonnerie. Cette dernière se compose de blocs de matériaux (naturels ou artificiels) connectés entre eux par des joints de mortier, de faible épaisseur. Par conséquent, le matériau composite est affecté par la réponse de l'assemblage qui peut reproduire de nombreux modes de rupture cinématiques sur le joint tels que : le glissement, l'ouverture, la fermeture des fissures et leur dilatation. Afin de mieux comprendre le comportement mécanique des interfaces et de définir leurs caractéristiques mécaniques à une échelle locale, divers essais expérimentaux ont été effectués sur différents prismes de maçonnerie, composés de deux ou trois briques (pleines et creuses) connectées par des joints de mortier. Ces essais peuvent être soumis à une traction pure, à une compression ou bien encore au cisaillement (Fouchal *et al.*, 2006).

Dans cet article, nous commencerons par rappeler succinctement le modèle d'interphase de (Gambarotta *et al.*, 1997). Puis, nous expliquerons comment, en partant d'une écriture simplifiée de ce modèle d'interphase, nous introduisons un modèle d'interface quasi-fragile endommageable par une technique asymptotique, nommé le modèle GL-PL. Enfin, nous présenterons la résolution numérique de ce modèle à l'aide de deux algorithmes (l'un implicite, l'autre explicite) afin de le tester numériquement sur un cas simple de cisaillement pur en 2D formé de 4 briques. L'implantation et la validation sont effectuées à l'aide du code éléments finis Gyptis (Latil *et al.*, 2002).

## 2. Modèle d'interphase

(Gambarotta *et al.*, 1997) ont proposé un modèle prenant en compte l'endommagement dans le but d'analyser la réponse des murs en maçonnerie de briques soumis à des chargements cycliques.

### 2.1. Choix de Volume Élémentaire Représentatif (VER)

Le VER  $V_m$  est constitué du mortier et de l'interface brique/mortier (cf figure 1.a). Sur  $V_m$ , on définit une déformation moyenne  $\varepsilon_m$  et une contrainte moyenne  $\sigma_m$  :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_m = \{ \varepsilon_t, \varepsilon_n, \gamma \}^t \\ \sigma_m = \{ \sigma_t, \sigma_n, \tau \}^t \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_m = K_m \cdot \sigma_m + \varepsilon_m^* \quad [1]$$

Les variables microscopiques  $\sigma_n$ ,  $\tau$  représentent respectivement la contrainte normale et de cisaillement. La déformation  $\varepsilon_m$  se décompose :

- en une partie élastique  $K_m \cdot \sigma_m$  quand il n'y a pas d'endommagement.
- et en une partie anélastique  $\varepsilon_m^*$ , terme non linéaire provenant de l'endommagement qui s'exprime par :

$$\varepsilon_m^* = \{0, \varepsilon_{mn}^*, \gamma_m^*\}^t \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_{mn}^* = h(\alpha_m) H(\sigma_n) \sigma_n \\ \gamma_m^* = k(\alpha_m) (\tau - f) \end{cases} \quad [2]$$

$\varepsilon_{mn}^*$  représente l'ouverture (fissure) du joint du mortier tandis que  $\gamma_m^*$  le glissement du joint du mortier. La réponse unilatérale du joint est prise en compte par la fonction Heaviside  $H(\sigma_n)$ . Les fonctions  $h(\alpha_m)$  et  $k(\alpha_m)$  sont linéaires, positives et nulles en zéro.  $f$  est la variable interne du frottement à l'interface brique/mortier. La variable interne d'endommagement du joint  $\alpha_m$  vérifie la propriété :

$\alpha_m = 0$  : état initial non endommagé et  $\alpha_m \rightarrow \infty$  : état final endommagé.

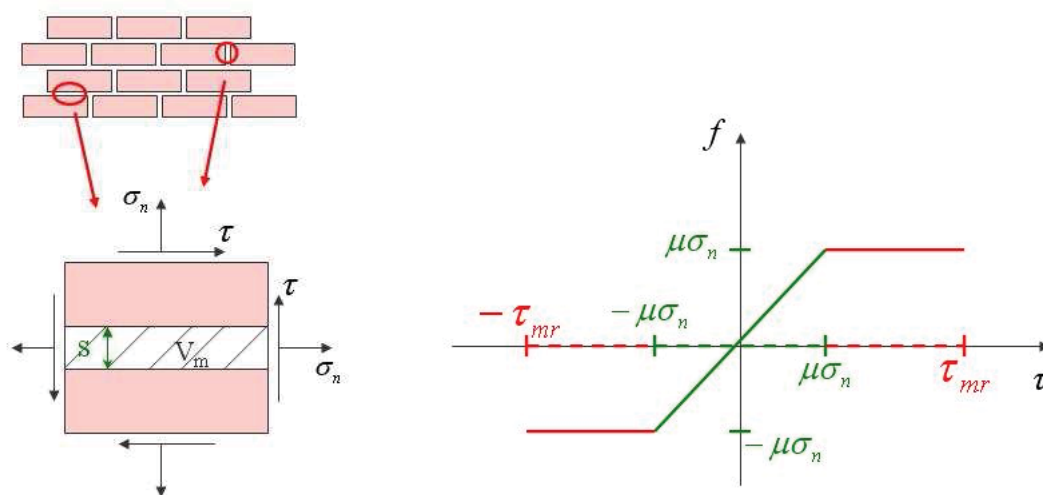


Figure 1. a) VER du mur de briques, b) Limite de frottement.

## 2.2. Critère de rupture

Le critère de la mécanique de la rupture est donné par  $\Phi_m = Y_m - R_m(\alpha_m) \leq 0$ .

On impose un taux d'énergie dissipée  $Y_m$  pour l'endommagement du joint de mortier inférieur ou égal à la résistance à la fatigue  $R_m$  du joint tel que :

$$Y_m = \frac{1}{2} h'(\alpha_m) H(\sigma_n) \sigma_n^2 + \frac{1}{2} k'(\alpha_m) (\tau - f)^2 \quad [3]$$

$$R_m(\alpha_m) = \begin{cases} R_{mc} \alpha_m & \text{pour } 0 < \alpha_m < 1 \\ \frac{R_{mc}}{\alpha_m^\beta} & \text{pour } \alpha_m > 1 \text{ et } 0 < \beta < 2 \end{cases} \quad [4]$$

## 3. Modèle asymptotique

### 3.1. Démarche

En adoptant une approche asymptotique (Sanchez-Palencia *et al.*, 1992), on souhaite passer d'un comportement volumique à un comportement surfacique en faisant

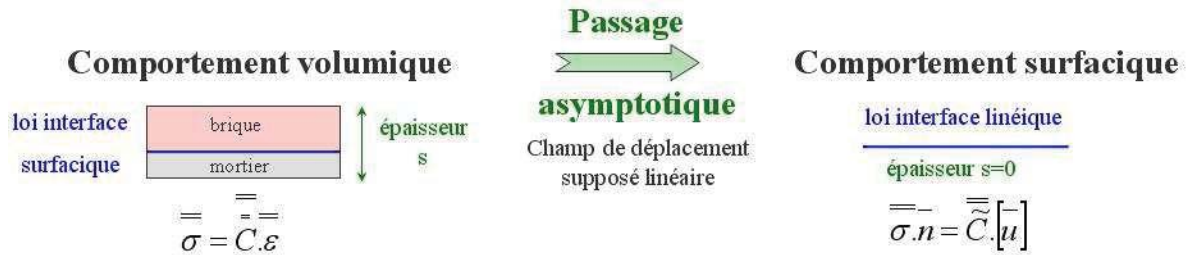


Figure 2. Schématisation du modèle asymptotique.

### 3.2. Ecriture du modèle

#### • Le comportement volumique

En nous inspirant du modèle d'interphase, nous choisissons d'écrire le comportement volumique de la manière suivante :

$$\varepsilon = K \cdot \sigma + \varepsilon^* \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = L \cdot (\varepsilon - \varepsilon^*) \quad \text{avec} \quad K^{-1} = L \quad [5]$$

$K$  est le tenseur de compliance.  $L$  est le tenseur de rigidité : c'est une matrice diagonale formée par le terme de compliance normal  $C_N$  et par le terme de compliance tangentiel  $C_T$ . Les deux composantes anélastiques  $\varepsilon^*$  s'expriment alors par :

$$\begin{cases} \varepsilon^* = h(\alpha) H(\sigma_n) \sigma_n \\ \gamma^* = k(\alpha) \chi_I (\tau \pm \mu \sigma_n) \text{ avec } I = ] - \mu \sigma_n, + \mu \sigma_n[ \text{ et } f = \pm \mu \sigma_n \end{cases} \quad [6]$$

$$\text{Soit matriciellement : } \begin{pmatrix} \varepsilon^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(\alpha) H(\sigma_n) & 0 \\ \pm k(\alpha) \chi_I \mu & k(\alpha) \chi_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{pmatrix} \quad [7]$$

Notons  $D$  cette matrice ( $2 \times 2$ ).  $\chi_I$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $I$ .

#### • Le comportement surfacique

Par passage asymptotique, on déduit de [5] et [7] les formules suivantes :

$$\sigma \cdot n = L \cdot ([\bar{u}] - [\bar{u}^*]) \quad \text{et} \quad [\bar{u}^*] = D \cdot \sigma \cdot n \quad [8]$$

$$\text{Autrement dit} \quad \sigma \cdot n = \left( I + L \cdot D \right)^{-1} \cdot L \cdot [\bar{u}] \quad [9]$$

$$\text{Soit} \quad \sigma_n = \frac{C_N}{1 + C_N h(\alpha) H(\sigma_n)} [u_N] \quad [10]$$

$$\text{et} \quad \tau = \pm \frac{C_N C_T \mu k(\alpha) \chi_I [u_N]}{(1 + C_N h(\alpha) H(\sigma_n)) (1 + C_T k(\alpha) \chi_I)} + \frac{C_T}{1 + C_T k(\alpha) \chi_I} [u_T] \quad [11]$$

La matrice déduite n'est pas diagonale : on voit apparaître un terme de couplage non symétrique (dû au frottement) entre le terme de compliance normal  $C_N$  et le terme de compliance tangentiel  $C_T$ .

### 3.3. Modélisation numérique : éléments finis quadrangles

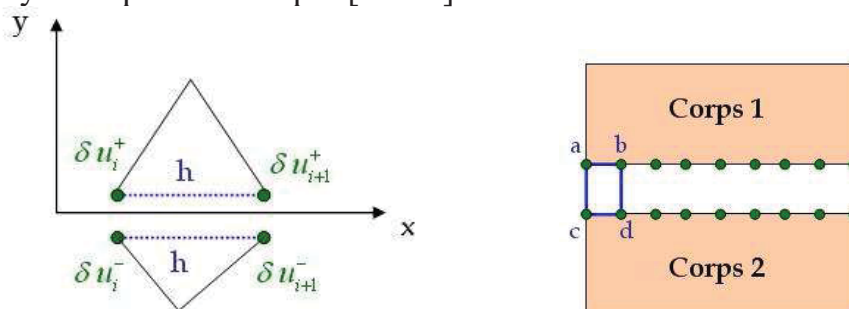
La formulation faible d'un problème élastique standard prend la forme :

$$\int_{\Omega} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Gamma_s} R[u] \cdot [v] d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Omega} s \cdot v d\Gamma \quad [12]$$

En supposant que le saut de déplacement s'écrive  $[u] = N \delta[u]$ , la discrétisation du terme surfacique s'obtient par :

$$\int_{\Gamma_s} R[u] \cdot [v] d\Gamma = \sum_{seg} \int_{seg}^t \delta[v] N^t R N \delta[u] dx = \sum_{seg} \int_{seg}^t \delta[v] V \delta[u] dx \quad [13]$$

L'interpolation choisie sur le bord est linéaire (cf figure 3).  $R$  est la matrice de compliance non symétrique obtenue par [10-11].



**Figure 3.** a) Saut de déplacement, b) Eléments quadrangles au niveau de l'interface .

Finalement, après assemblage, nous devons résoudre le système linéaire [14] où  $K$  est la matrice de rigidité et  $V$  la matrice associée à l'interface.

$$K \delta u - V \delta[u] = F \quad [14]$$

On condense les équations sur le bord de contact et on obtient le système suivant :

$$A_{cc} u_c + \tilde{A}_{cc} [u_c] = \tilde{F}_c \quad \text{avec } u_i = \{u_{Ni}, u_{Ti}\}^t \quad [15]$$

$A_{cc}$  est la matrice condensée volumique alors que  $\tilde{A}_{cc}$ , de même taille que  $A_{cc}$ , est la matrice non symétrique prenant en compte l'endommagement de l'interface.

### 3.4. Algorithmes de résolution

Deux algorithmes incrémentaux ont été choisis :

- Le premier implicite utilise une double convergence en utilisant simultanément une méthode de dichotomie et une méthode de point fixe pour vérifier que la variable d'endommagement appartient bien à son domaine de validité  $\Phi(\alpha)$ , en ayant au préalable résolu le système linéaire [15].

- Le second explicite se contente de vérifier une seule fois si la variable d'endommagement appartient bien à son domaine de validité  $\Phi(\alpha)$  puis de résoudre le système linéaire [15].

Algorithme incrémental double point fixe	Algorithme explicite
<p><math>\alpha^0</math> donné. On cherche <math>\alpha^i</math> pour <math>\Delta t^i</math>            A l'itération <math>n = n + 1</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construction matrice élémentaire <math>V^{el}</math> pour chaque quadrangle.</li> <li>• Construction matrice condensée <math>\tilde{A}_{cc}</math> :               <ul style="list-style-type: none"> <li>* Introduction de la matrice intermédiaire</li> </ul> <math display="block">J = \begin{pmatrix} V^{el} &amp; -V^{el} \\ -V^{el} &amp; V^{el} \end{pmatrix}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Assemblage global de <math>J</math> dans <math>\tilde{A}_{cc}</math>.</li> </ul> </li> <li>• Résolution du système linéaire (Gauss) :               <math display="block">\left( A_{cc} + \tilde{A}_{cc}(\alpha^{i,n}) \right) U^{i,n} = F_c</math> </li> <li>• Estimation de <math>[u^{i,n}]</math> puis de la contrainte <math>\sigma_{i,n} = K^{i,n} [u^{i,n}]</math> avec [10-11]</li> <li>• Estimation de <math>Y_m(\alpha^{i,n})</math> par [3]</li> <li>• Test de <math>\Phi(\alpha^i) = Y_m(\alpha^{i,n}) - R_m(\alpha^{i,n})</math> :               <ul style="list-style-type: none"> <li>* Si négatif alors on garde l'ancien <math>\alpha^{i,n}</math>.</li> <li>* Si positif on résout par dichotomie <math>\Phi(\alpha^{i,n}) = 0</math> pour déduire le nouveau de <math>\alpha^{i,n}</math>.</li> </ul> </li> </ul> <p>On boucle sur ce test de convergence de point fixe tant que <math> \Phi(\alpha^{i,n})  &gt; 10^{-4}</math>.</p>	<p><u>Incrément 1</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha^0 = 0</math> et <math>[u^0] = 0</math>.</li> <li>• <math>[u^0]</math> connu, on cherche <math>\alpha^1</math> solution de : <math>Y_m(\alpha^1) - R_m(\alpha^1) = 0</math>.  <math>\Rightarrow</math> On doit trouver <math>\alpha^1 = 0</math>.</li> <li>• Résolution du système :               <math display="block">\left( A_{cc} + \tilde{A}_{cc}(\alpha^1) \right) U^1 = F_c^1</math> </li> </ul> <p><math>\Rightarrow [u^1]</math> déduit.</p> <p><u>Incrément <math>i + 1</math> pour <math>i \geq 2</math></u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>[u^i]</math> connu.</li> <li>• On cherche <math>\alpha^{i+1}</math> solution de <math>Y_m(\alpha^{i+1}) - R_m(\alpha^{i+1}) = 0</math></li> <li>• Résolution du système :               <math display="block">\left( A_{cc} + \tilde{A}_{cc}(\alpha^{i+1}) \right) U^{i+1} = F_c^{i+1}</math> </li> </ul> <p><math>\Rightarrow [u^{i+1}]</math> déduit.</p>

Tableau 1. Algorithmes.

#### 4. Conclusion

Dans cet article, nous avons développé un modèle d'interface quasi-fragile endommageable que nous avons par la suite implémenté dans Gyptis. La validation est en cours, notamment sur un exemple d'évolution de  $\alpha$  dans un cas de cisaillement pur.

#### 5. Bibliographie

- Fouchal F., Lebon F., Titeux I., « Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction », *Proceedings of the First Euromediterranean Symposium on Advances in Geomaterials and Structures*, Hammamet, Tunisie, p. 749-754, 3-5 mai, 2006.
- Gambarotta L., Lagomarsino S., « Damage models for the seismic response of brick masonry walls. Part I : The continuum model and its application », *Eartquake Eng.Struct.Dyn.*, vol. 26, p. 441-462, 1997.
- Latil J.-C., Raous M., *Éléments finis et inéquations variationnelles, Résolution de quelques problèmes de contact et frottement*, Logiciel GYPTIS, Note interne, CNRS, février, 2002.
- Sanchez-Palencia E., Sanchez-Hubert J., *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Editions Masson, Paris, 1992.