



**HAL**  
open science

# La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

| Pascal Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. 2014. hal-01492074v1

**HAL Id: hal-01492074**

**<https://hal.science/hal-01492074v1>**

Preprint submitted on 22 Mar 2017 (v1), last revised 2 Jul 2021 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE EST LIBRE

*par*

Pascal Boyer

---

**Résumé.** — Le résultat principal de ce travail est l’absence de torsion dans la  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie de la tour de Lubin-Tate. Comme dans [5], la stratégie est globale et repose sur l’étude du complexe des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. Nous reprenons les constructions de [6] sur les filtrations de stratification d’un faisceau pervers libre et nous montrons, qu’appliquées aux extensions par zéro des systèmes locaux d’Harris-Taylor ainsi qu’au faisceau pervers des cycles évanescents, ces constructions sont « !-saturées », i.e. tous les conoyaux des morphismes d’adjonction  $j_{!}j^{*} \rightarrow \text{Id}$  considérés, sont sans torsion.

**Abstract (The cohomology of Lubin-Tate spaces is free).** — The principal result of this work is the freeness in the  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomology of the Lubin-Tate tower. As in [5], the strategy is of global nature and relies on studying the complexe of nearby cycles of some Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor types. We use the constructions of [6] on the filtrations of stratification of a free perverse sheaf and we prove that applied to the extension by zero of Harris-Taylor local systems as well to the perverse sheaf of nearby cycles, these constructions are « !-saturated », which means that all the cokernels of the adjunction morphisms  $j_{!}j^{*} \rightarrow \text{Id}$  under consideration, are torsion-free.

## Introduction

Dans [5], nous avons explicité les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  de la tour de Lubin-Tate en étudiant le faisceau pervers  $\Psi_{\mathcal{X}}$  des cycles évanescents d’une tour de variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor  $X_{\mathcal{X}}$ , cf. [9], en une place  $v$  de son corps reflex  $F$ . Le passage du global vers le local est fourni par un analogue du théorème de Serre-Tate couplé au théorème de comparaison de Berkovich. Pour étudier ce faisceau pervers, nous

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 14L05, 11F80, 11F55, 11F70, 11G10, 11G18.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, stratification, catégories quasi-abéliennes, théorie de torsion.

L’auteur remercie l’ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

avons explicité sa filtration de monodromie-poids en décrivant les divers gradués au moyen des faisceaux pervers dits d'Harris-Taylor obtenus comme l'extension intermédiaire des systèmes locaux du même nom introduits dans [9]. Plus simplement, on peut considérer la filtration de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  par les noyaux itérés de la monodromie et donc la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j} \mathrm{gr}_{-j}^K(\Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}}$$

calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  à partir de ceux de ses gradués.

**Fait** — (cf. [5] §5.8) *La suite spectrale  $E_1^{i,j}$  dégénère en  $E_1$ , i.e. pour tout  $n$ , le faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I}}$  admet une filtration dont les gradués sont les  $\mathcal{H}^n \mathrm{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I}})$ .*

Cette observation nous fournit *une stratégie* pour montrer que ces  $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion, cf. la preuve de la proposition 2.4.4, puisqu'il suffit de construire une version entière, i.e. à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , de la filtration de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  par les noyaux itérés de la monodromie, puis de montrer que les  $\mathcal{H}^n \mathrm{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I}})$  sont sans torsion.

Une version entière de la filtration de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  par les noyaux itérés de la monodromie est donnée dans [6] en utilisant des morphismes d'adjonction  $j_!^{=h} j^{=h,*} \rightarrow \mathrm{Id}$  associés à la stratification de Newton  $j^{=h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}$  de la fibre spéciale géométrique  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}$  de  $X_{\mathcal{I}}$  à la place  $v$ . Nous rappelons au §1.3 la construction d'une telle filtration, dite de stratification, d'un faisceau pervers libre  $F$  et dont on note  $\mathrm{gr}_!^k(F)$  les gradués.

Cet article se concentre donc sur le deuxième point qui consiste à montrer que les faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^i \mathrm{gr}_!^k(\Psi_{\mathcal{I}})$  des gradués de la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ , sont sans torsion. Le résultat repose sur une propriété difficile à contrôler de ces filtrations, à savoir qu'elles sont  $!$ -saturées i.e. que les conoyaux, pris dans la catégorie des faisceaux  $p$ -pervers, des morphismes d'adjonction  $j_!^{=h} j^{=h,*} \rightarrow \mathrm{Id}$  considérés, sont sans torsion. Ainsi l'essentiel du travail consiste à montrer l'énoncé suivant qui résume les propositions 2.3.3 et 2.4.3.

**Proposition** — *Les filtrations de stratification construites à l'aide des morphismes d'adjonction  $j_!^{=h} j^{=h,*} \rightarrow \mathrm{Id}$  pour*

- *d'une part l'extension par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor, et*
  - *d'autre part pour le faisceau pervers des cycles évanescents  $\Psi_{\mathcal{I}}$ ,*
- sont  $!$ -saturées.*

À partir de ce résultat, il est relativement aisé d'en déduire, cf. la proposition 2.4.4, que les fibres des faisceaux de cohomologie des  $\mathrm{gr}_!^k(\Psi_{\mathcal{I}})$  et donc de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion, cf. le théorème 2.4.1. Par passage du global au local via le théorème de Berkovich, nous en déduisons alors la liberté de la cohomologie de la tour de Lubin-Tate, théorème 1.1.4.

En ce qui concerne l'organisation du papier, le résultat principal, théorème 1.1.4, sur l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, est prouvée au §2.4 en admettant les résultats globaux, propositions 2.3.3 et 2.4.3, sur la saturation qui sont prouvés respectivement aux §3.2 et §3.3. Les notations sur les représentations sont données dans l'appendice A. Les résultats des lemmes et propositions de cet article concernant les  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres sont, d'après [5] et [6], déjà connus sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  : ceux dont nous avons besoin, sont rappelés en appendice B avec quelques compléments autour de l'effet du

morphisme  $j_{\neq c, l}^{\neq h, *}$  qui est l'ingrédient clef de cet article, cf. l'introduction du §3 et qui devrait permettre de simplifier grandement les arguments de [5], cf. les remarques suivant B.3.3 et B.3.4.

Mentionnons enfin la thèse de H. Wang qui, par voie purement locale en se ramenant aux travaux de Bonnafé et Rouquier [4] sur la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, montre la liberté de l'étage modéré de la cohomologie de la tour de Drinfeld. En utilisant le théorème de Faltings-Fargues, son résultat correspond au cas des représentations cuspidales de niveau zéro.

## Table des matières

Introduction.....	1
1. Rappels géométriques.....	3
1.1. Espaces de Lubin-Tate.....	4
1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples.....	5
1.3. Filtrations de stratification d'après [6].....	8
2. Preuve du théorème principal : réduction.....	13
2.1. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke.....	13
2.2. Cycles évanescents et systèmes locaux d'Harris-Taylor entiers.....	14
2.3. Sur les extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	18
2.4. Faisceaux de cohomologie des cycles évanescents.....	20
3. Etude de la saturation.....	22
3.1. Sur quelques faisceaux $p$ -pervers de torsion.....	24
3.2. Preuve de la proposition 2.3.3.....	30
3.3. Preuve de la proposition 2.4.3.....	34
Appendice A. Rappels sur les représentations.....	37
A.1. Induites paraboliques.....	37
A.2. Représentations de $D_{K,d}^{\times}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ et leurs relèvements.....	40
Appendice B. Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [5].....	42
B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	42
B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents.....	44
B.3. Compléments.....	45
Références.....	50

## 1. Rappels géométriques

Dans tout ce texte, les lettres  $p \neq l$  désigneront deux nombres premiers distincts,  $d$  un entier strictement positif et  $\Lambda$  au choix une extension algébrique de  $\mathbb{Q}_l$  comme par exemple  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , l'anneau des entiers d'une telle extension, comme par exemple  $\mathbb{Z}_l^{nr}$  ou une extension algébrique de  $\mathbb{F}_l$ , comme par exemple  $\overline{\mathbb{F}}_l$ .

**1.1. Espaces de Lubin-Tate.** — On désignera par  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{O}_K$  son anneau des entiers, d'idéal maximal  $\mathcal{P}_K$ ,  $\varpi_K$  une uniformisante et  $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$  son corps résiduel de cardinal  $q = p^f$ . L'extension maximale non ramifiée de  $K$  sera notée  $K^{nr}$  de complété  $\widehat{K}^{nr}$ , d'anneau des entiers respectif  $\mathcal{O}_{K^{nr}}$  et  $\mathcal{O}_{\widehat{K}^{nr}}$ . Soit  $\Sigma_{K,d}$  le  $\mathcal{O}_K$ -module de Barsotti-Tate formel sur  $\bar{\kappa}$  de hauteur  $d$ , cf. [9] §II. On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  des  $\mathcal{O}_K$ -algèbres locales artiniennes de corps résiduel  $\bar{\kappa}$ .

**1.1.1. Définition.** — Le foncteur qui à un objet  $R$  de  $\mathcal{C}$  associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur  $R$  de  $\Sigma_{K,d}$  munies d'une structure de niveau  $n$  est pro-représentable par un schéma formel  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n} = \prod_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  où  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  représente le sous-foncteur pour des déformations par des quasi-isogénies de hauteur  $h$ .

*Remarque :* chacun des  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  est non-canoniquement isomorphe au schéma formel  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)}$  noté  $\text{Spf Def}_{d,n}$  dans [5]. On notera sans chapeau les fibres génériques de Berkovich de ces espaces; ce sont donc des  $\widehat{K}^{nr}$ -espaces analytiques au sens de [2] et on note  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K} := \mathcal{M}_{LT,d,n} \hat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}$ .

Le groupe des quasi-isogénies de  $\Sigma_{K,d}$  s'identifie au groupe  $D_{K,d}^\times$  des unités de l'algèbre à division centrale sur  $K$  d'invariant  $1/d$ , lequel, par définition, agit sur  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a une action naturelle de  $GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n)$  sur les structures de niveau et donc sur  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$ ; cette action se prolonge en une action de  $GL_d(K)$  sur la limite projective  $\lim_{\leftarrow n} \mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$ . Sur cette limite projective on dispose ainsi d'une action de  $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times$  qui se factorise par  $(GL_d(K) \times D_{K,d}^\times)/K^\times$  où  $K^\times$  est plongé diagonalement.

**1.1.2. Définition.** — Soit  $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i \simeq H^i(\mathcal{M}_{LT,d,n}^{(0)} \hat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}, \Lambda)$  le  $\Lambda$ -module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)} \rightarrow \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$ .

On notera aussi  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i := H^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}, \Lambda)$  et on pose  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i$  de sorte que  $\mathfrak{K}_n := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$  étant pro- $p$  pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i = (\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}$ .

**1.1.3. Notation.** — Considérant  $\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Z}}_l,d,n}^i$  comme une représentation de  $D_{K,d}^\times$ , on pose, d'après A.2.6, pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(d)$  :

$$\mathcal{U}_{\bar{\tau},n}^i := \mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Z}}_l,d,n,\bar{\tau}}^i,$$

ainsi que la limite inductive

$$\mathcal{U}_{\bar{\tau},\mathbb{N}}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{\bar{\tau},n}^i.$$

La description de la  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie de ces espaces de Lubin-Tate est donnée dans [5] théorème 2.3.5. Le résultat principal que nous avons en vue est le suivant.

**1.1.4. Théorème.** — *Pour tout  $h \geq 1$  et pour tout  $0 \leq i \leq h - 1$ , le  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module  $\mathcal{U}_{K, \overline{\mathbb{Z}}_l, h}^i$  est sans torsion.*

**1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples.** — Soient  $E/\mathbb{Q}$  une extension quadratique imaginaire,  $F^+/\mathbb{Q}$  une extension totalement réelle dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ ; on pose  $F = F^+E$  le corps CM associé.

**1.2.1. Notation.** — *Pour toute place finie  $w$  de  $F$ , on note  $F_w$  le complété de  $F$  en cette place,  $\mathcal{O}_w$  son anneau des entiers d'idéal maximal  $\mathcal{P}_w$  et de corps résiduel  $\kappa(w)$ .*

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ , on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [9], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F, c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [9], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d - 1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

**1.2.2. Notation.** — *On suppose que*

- $p$  est décomposée  $p = uu^c$  dans  $E$  et on note  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , les places de  $F$  au dessus de  $u$ ,
- et qu'il existe au moins une de ces places, mettons  $v_1$  que l'on notera  $v$ , telle que  $(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v)$ .

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty, p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times)$$

**1.2.3. Notation.** — *On note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts  $U^p(m)$  tels qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^p$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun*

élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [9] bas de la page 90. Pour  $m$  comme ci-dessus, on a une application

$$m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

**1.2.4. Définition.** — Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $X_I \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v \llcorner$  la variété de Shimura associée à  $G \gg$  construite dans [9] et  $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  le schéma de Hecke relativement au groupe  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , au sens de [5]

*Remarque :* les morphismes de restriction du niveau  $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$  sont finis et plats. et même étales quand  $m_1(J) = m_1(I)$ .

**1.2.5. Notations.** — (cf. [5] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note :

- $X_{I,s}$  la fibre spéciale de  $X_I$  et  $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$  la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I,\bar{s}}^{=h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).
- On notera aussi  $X_{I,\bar{s}}^{\geq 0} := X_I$ .

*Remarque :* pour tout  $1 \leq h \leq d$ , la strate de Newton de hauteur  $h$  est de pure dimension  $d - h$ ; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$  (resp.  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}$ ) pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$ , cf. [9] III.4.4, lisse dans le cas de bonne réduction, i.e. quand  $m_1 = 0$ .

**1.2.6. Proposition.** — (cf. [9] p.116) Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $X_{I,\bar{s}}^{=h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique  $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ <sup>(1)</sup> au sens où il existe un sous-schéma fermé  $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$  tel que :

$$X_{I,\bar{s}}^{=h} \simeq X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1}).$$

Pour  $h = 0$ , on ne dispose que d'une unique strate et  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\bar{1}_0}^{\geq 0}$  désignera encore  $X_{\mathcal{I}}$ .

Soit  $\mathcal{G}(h)$  le groupe de Barsotti-Tate universel sur  $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(h)^c \longrightarrow \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{G}(h)^c$  (resp.  $\mathcal{G}(h)^{et}$ ) est connexe (resp. étale) de dimension  $h$  (resp.  $d - h$ ). Notons

$$\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \longrightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$$

la structure de niveau universelle. Notant  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  la base canonique de  $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$ ,  $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$  est alors défini par la propriété que  $\{\iota_{m_1}(e_i) : 1 \leq i \leq h\}$  forme une base de Drinfeld de  $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$ .

1. cf. l'appendice A pour les notations

**1.2.7. Notation.** — Pour tout  $a \in GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})/P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})$ , on notera  $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$  la strate de  $X_{I,\bar{s}}^{=h}$  image par  $a$  de  $X_{I,\bar{s},\overline{1}_h}^{=h}$ . Son adhérence dans  $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$  sera notée  $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}$ . On dira d'une telle strate qu'elle est pure en comparaison aux strates de 1.2.9.

*Remarque :*  $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$  peut se définir directement en demandant que  $\{\iota_{m_1}(a.e_i) : 1 \leq i \leq h\}$  forme une base de Drinfeld de  $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$ .

Le système projectif  $(X_{I,\bar{s},\overline{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$  définit un schéma de Hecke  $X_{\overline{1}_h}^{=h}$  pour  $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$  où  $P_{h,d-h}(K)$  agit à travers le quotient  $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$  de son Levi, via l'application  $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$ . On dira de l'action de  $GL_h(F_v)$  qu'elle est *infinésimale*.

Notons  $W_v$  le groupe de Weil en  $v$  lequel agit sur  $(X_{I,\bar{s},\overline{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$  via son quotient  $-\text{deg} : W_v \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $\text{deg}$  est la composée du caractère non ramifié de  $W_v$ , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation  $v$  de  $K$ .

**1.2.8. Notations.** — Avec la convention que  $i$  (resp.  $j$ ) correspond à une immersion fermée (resp. une inclusion ouverte), on note

$$i^h : X_{\overline{1}_h}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h}^{\geq 1}, \quad i_a^h : X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\overline{1}_h}^{=h} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h}^{\geq h}, \quad j_{\overline{1}_h}^{\geq h} : X_{\overline{1}_h,\overline{1}_h}^{=h} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,\overline{1}_h}^{\geq h}.$$

Etant donnée une inclusion de strate pure  $X_{\overline{1}_h,c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h}$ , on note

$$i_{\overline{1}_h,a}^{h \leq +1} : X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,\overline{1}_h}^{\geq h} \quad \text{et} \quad j_{a-c}^{\geq h} : X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h} - X_{\overline{1}_h,c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,c}^{\geq h}.$$

Enfin lorsque  $a = \overline{1}_h$ , on utilisera  $j_{\neq c}^{\geq h}$  pour désigner  $j_{\overline{1}_h-c}^{\geq h}$ .

Plus généralement on utilisera les notations suivantes.

**1.2.9. Notations.** — Pour  $1 \leq h < d$  et  $\mathcal{A} \subset GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ , et pour tout  $0 \leq \delta \leq d-h$ , on note  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h+\delta}$  la réunion des strates  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{B}}^{\geq h+\delta}$ , pour  $\mathcal{B} \in GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h+\delta,d-h-\delta}(\mathcal{O}_v)$ , contenues dans  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h}$ . Pour

—  $1 \leq h_1 \leq h_2$ ,

— des entiers  $h$  et  $\delta$  tels que  $h_1 \leq h$  et  $h_2 \leq h + \delta$ ,

—  $\mathcal{A} \subset GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h_1,d-h_1}(\mathcal{O}_v)$  et  $\mathcal{B} \subset GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h_2,d-h_2}(\mathcal{O}_v)$

tels que  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{B}}^{\geq h+\delta}$  est contenu dans  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h}$ , on note

$$i_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{h \leq +\delta} : X_{\overline{1}_h,\mathcal{B}}^{\geq h+\delta} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h}.$$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , on notera simplement  $i_{\mathcal{A}}^{h \leq +\delta} : X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h+\delta} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h}$ . Enfin quand  $X_{\overline{1}_h,\mathcal{A}}^{\geq h} = X_{\overline{1}_h}^{\geq h}$  est l'ensemble de toutes les strates, on notera  $i_{tt,\mathcal{B}}^{h \leq +\delta}$ .

*Remarque :* avec les conventions précédentes, pour  $g \geq 1$ , on a

$$j_{a-c}^{\geq h+g} : X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h+g} - X_{\overline{1}_h,c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{\overline{1}_h,a}^{\geq h+g}.$$



Enfin afin de ne pas avoir que des faisceaux sur  $X_{\bar{l},s}^{\geq 1}$ , on utilisera aussi la notation

$$j^{=h} := i^h \circ j^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{=h} := i^h \circ j_{\neq c}^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{=h+g} = i^{h+g} \circ j_{\neq c}^{\geq h+g}$$

qui, contrairement aux préconisations précédentes, ne sont pas des inclusions ouvertes. On renvoie au §B.3 pour des compléments sur  $j_{\neq c}^{=h+g}$ .

**1.3. Filtrations de stratification d'après [6].** — Soient  $S$  le spectre d'un corps fini et  $X$  un schéma de type fini sur  $S$ , alors la  $t$ -structure usuelle sur  $\mathcal{D}(X, \Lambda) := D_c^b(X, \Lambda)$  est

$$\begin{aligned} A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où  $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$  et  $\mathcal{H}^k(K)$  désigne le  $k$ -ième faisceau de cohomologie de  $K$ .

**1.3.1. Notation.** — On note  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ , ou simplement  ${}^p\mathcal{C}$  quand le contexte est clair, le cœur de cette  $t$ -structure. Les foncteurs cohomologiques associés seront notés  ${}^p\mathcal{H}^i$ ; pour un foncteur  $T$ , on notera  ${}^pT := {}^p\mathcal{H}^0 \circ T$ .

*Remarque :*  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$  est une catégorie abélienne noethérienne et  $\Lambda$ -linéaire. Pour  $\Lambda$  un corps, cette  $t$ -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour  $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ , on peut munir la catégorie abélienne  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire  ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$  d'une théorie de torsion  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) est la sous-catégorie pleine des objets de  $l^\infty$ -torsion  $T$  (resp.  $l$ -libres  $F$ ), i.e. tels que  $l^N 1_T$  est nul pour  $N$  assez grand (resp.  $l.1_F$  est un monomorphisme).

**1.3.2. Définition.** — Soit d'après [11] la  $t$ -structure duale

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 1}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

de cœur  ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$  muni de sa théorie de torsion  $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$  « duale » de celle de  ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ .

*Remarque :* pour  $j : U \hookrightarrow X \leftarrow F : i$  avec  $U$  ouvert de complémentaire  $F$ , la  $t$ -structure ainsi définie sur  $X$  muni de la théorie de torsion précédente, est obtenue par recollement à partir de celles sur  $U$  et  $F$  selon la recette

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(F, \Lambda)\} \\ {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^!K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(F, \Lambda)\}. \end{aligned}$$

où les théories de torsion sont reliées par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^p i^*P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^p i^!P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

**1.3.3. Définition.** — (cf. [6] §1.3) Soit

$$\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) = {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) \cap {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda)$$

la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur  $X$  à coefficients dans  $\Lambda$ . On identifiera aussi  $\mathcal{F}(F, \Lambda)$  avec son image dans  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  via le foncteur  $i_* = i_! = i_{!*}$ .

**1.3.4. Lemme.** — (cf. [6] lemme 1.3.11) Pour  $j : U \hookrightarrow X$  un ouvert, on a

$${}^{p+}j_! \mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda) \quad \text{et} \quad {}^p j_* \mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda).$$

*Remarque :* si  $j_!$  est  $t$ -exact alors, cf. [6] proposition 1.3.14,  $j_! = {}^p j_! = {}^{p+} j_!$  et donc  $j_!(\mathcal{F}(U, \Lambda)) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda)$ . D'après le lemme B.3.1, ce sera en particulier le cas pour les  $j^{=h}$  du paragraphe précédent.

**1.3.5. Lemme.** — Soit  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  tel que  $j_! j^* L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ , alors  $i_* {}^p \mathcal{H}^{-\delta} i^* L$  est nul pour tout  $\delta \neq 0, 1$ ; pour  $\delta = 1$  c'est un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

*Démonstration.* — Partons du triangle distingué  $j_! j^* L \rightarrow L \rightarrow i_* i^* L \rightsquigarrow$ . En utilisant la perversité de  $L$  et  $j_! j^* L$ , la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \rightarrow i_* {}^p \mathcal{H}^{-1} i^* L \rightarrow {}^p j_! j^* L \rightarrow L \rightarrow i_* {}^p \mathcal{H}^0 i^* L \rightarrow 0.$$

La liberté de  $i_* {}^p \mathcal{H}^{-1} i^* L$  découle alors de celle, par hypothèse, de  ${}^p j_! j^* L = j_! j^* L$ .  $\square$

Rappelons, cf. [6] §1.3, que tout morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  possède :

- un noyau  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$  qui est le  $p$ -noyau de  $f$ , i.e. dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$ ;
- un conoyau  $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$  qui est le  $p+$ -conoyau de  $f$ , i.e. dans  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$ ;
- une image  $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$  qui est la  $p+$ -image de  $f$ ;
- une coimage  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$  qui est la  $p$ -image de  $f$ ;

tels que  $0 \rightarrow \text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$  sont des suites strictement exactes de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ , où le qualificatif strict est rappelé dans la définition suivante.

**1.3.6. Définition.** — Un morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  est dit *strict* et on note  $f : L \dashrightarrow L'$ , si la flèche canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un isomorphisme.

*Remarque :* un monomorphisme  $f : L \hookrightarrow L'$  dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$  entre faisceaux pervers libres, est strict si et seulement si son conoyau dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$  est libre. Cela revient aussi à demander que  $f$  est un monomorphisme de  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$ .

**1.3.7. Définition.** — Un *bimorphisme* de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  est un monomorphisme qui est aussi un épimorphisme.

*Exemple :*  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un bimorphisme.

**1.3.8. Notation.** — On notera  $L \hookrightarrow L'$  un bimorphisme de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ . Si en outre le noyau dans  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$  est de dimension strictement plus petite que celle du support de  $L$ , on notera  $L \hookrightarrow_+ L'$ .

*Remarque :* tout morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  admet, cf. [6] proposition 1.3.7, une factorisation canonique  $L \dashrightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \hookrightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \dashrightarrow L'$ .

**1.3.9. Définition.** — Pour  $L$  un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ , on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_e = L$$

est une  $\mathcal{F}$ -filtration si pour tout  $1 \leq i \leq e - 1$ ,  $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$  est un monomorphisme strict.

Pour  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ , on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \text{can}_{!,L} & & \searrow \text{can}_{*,L} & \\ {}^{p+}j_{!*}j^*L & \twoheadrightarrow & {}^{p+}j_{!*}j^*L & \hookrightarrow_{+} & {}^{p+}j_{!*}j^*L & \twoheadrightarrow & {}^{p+}j_{!*}j^*L & \hookrightarrow_{+} & {}^{p+}j_{!*}j^*L \end{array}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de  ${}^{p+}j_{!*}j^*L \rightarrow {}^{p+}j_{!*}j^*L$  et les flèches  $\text{can}_{!,L}$  et  $\text{can}_{*,L}$  données par adjonction.

**1.3.10. Définition.** — On note  $\mathcal{P}_L := i_* {}^p\mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* L = \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left( {}^{p+}j_{!*}j^*L \rightarrow {}^{p+}j_{!*}j^*L \right)$ . Avec les notations du diagramme ci-dessus, on pose

$$\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}\left((\text{can}_{!,L})|_{\mathcal{P}_L}\right).$$

*Remarque :* d'après le lemme 2.1.2 de [6],  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$  est une  $\mathcal{F}$ -filtration au sens de 1.3.9, avec  $L/\text{Fil}_{U,!}^0(L) \simeq i_* {}^{p+}i^*L$  et  ${}^{p+}j_{!*}j^*L \hookrightarrow_{+} \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$ , ce qui d'après le lemme 1.3.13 de [6] donne un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^{p+}j_{!*}j^*L & \twoheadrightarrow_{+} & \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \\ & \searrow_{+} & \downarrow_{+} \\ & & {}^{p+}j_{!*}j^*L. \end{array}$$

**1.3.11. Définition.** — La filtration  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$  est dite *saturée* si  $\text{can}_{!,L}$  est strict i.e. si  $\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L})$ .

Soit  $X$  un schéma muni

- d'une stratification  $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \cdots \supset X^{\geq e}\}$  et
- de la donnée pour tout  $1 \leq h \leq e$  d'un ensemble fini  $\mathcal{L}(h)$  de classes d'isomorphismes de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux localement constants irréductibles sur  $X^{=h} := X^{\geq h} - X^{\geq h+1}$  tels qu'en notant  $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$  avec  $j^{\geq h} : X^{=h} \hookrightarrow X^{\geq h}$  et  $i^h : X^{\geq h} \hookrightarrow X$ ,

$$\forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}(h), \quad R^n j_*^h \mathcal{L} \text{ est } (\mathfrak{S}, \mathcal{L}) \text{ - constructible}$$

au sens où sa restriction à tous les  $X^{=h'}$  est une extension itérée finie de faisceaux irréductibles localement constants appartenant à  $\mathcal{L}(h')$ .

**1.3.12. Notation.** — On note  $D_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  la sous-catégorie pleine de  $D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont  $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles au sens précédent ainsi que  ${}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  la catégorie abélienne des  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers  $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles.

**1.3.13. Définition.** — Un faisceau pervers  $P \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  est dit à support dans  $X^{\geq h}$ , si  $h$  est le plus petit entier  $1 \leq r \leq d$  tel que  $j^{=r,*}P$  est un système local non nul. Un faisceau pervers libre  $P \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  sera dit à support dans  $X^{\geq h}$  si  $P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  l'est au sens précédent.

*Remarque :* dans la suite on appliquera ces définitions pour la stratification de Newton de la fibre spéciale d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor avec  $\mathcal{L}$  constitué des systèmes locaux d'Harris-Taylor. La propriété de stabilité de  $\mathcal{L}$  par les foncteurs  $Rj_*^{j=h}$  découle des résultats de [5]. Dans cette situation on dira que  $P$  est à support dans  $X_{\overline{I}, \overline{s}, \mathcal{A}}^{\geq h}$  s'il est à support dans  $X_{\overline{I}, \overline{s}}^{\geq h}$  et si pour toute strate  $X_{\overline{I}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ ,  $j_a^{=h,*}P$  est un système local non nul si et seulement si  $a \in \mathcal{A}$ .

On cherche à présent à construire des filtrations d'un  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  tel que  $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ , à l'aide de la stratification  $\mathfrak{S}$ .

**1.3.14. Définition.** — Soit  $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  tel que  $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . On dira d'une  $\mathcal{F}$ -filtration

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^e(L) = L,$$

qu'elle est de type  $\mathfrak{S}_!$  si pour tout  $k$  et  $h$  tel que  $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^k(L)$  est à support dans  $X^{\geq h}$ , le morphisme d'adjonction

$${}^{p+}j_!^{=h} j^{=h,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^k(L) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^k(L)$$

est surjectif dans  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

Dans [6], on donne une construction fonctorielle d'une  $\mathcal{F}$ -filtration de type  $\mathfrak{S}_!$  appelée filtration de !-stratification ou plus simplement de stratification.

**1.3.15. Définition.** — Pour  $1 \leq h < e$ , on note  $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$  et  $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$ . Pour  $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  soit

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(L) := \text{Im}_{\mathcal{F}} \left( {}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L \right).$$

**1.3.16. Proposition.** — (cf. [6] §2.2) La définition précédente munit fonctoriellement tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  d'une  $\mathcal{F}$ -filtration, au sens de 1.3.9, dite de stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^e(L) = L.$$

*Remarque :* la définition précédente ne requiert pas que  $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  mais la filtration obtenue ne sera évidemment « efficace » que pour ces derniers.

**1.3.17. Définition.** — On dira que  $L$  est  $\mathfrak{S}_!$ -saturé si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$  le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} L \longrightarrow L$  est strict, i.e. si

$$\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}_!}^r(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}\left({}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} L \longrightarrow L\right).$$

Autrement dit si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$ ,  ${}^{p+}i^{r+1, *} L$  est un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

*Remarque :* les filtrations de type  $\mathfrak{S}_!$  ne sont, en général, pas assez fines. Au §2.3 de [6], on définit des filtrations les plus fines possible relativement à  $\mathfrak{S}$  au sens suivant.

**1.3.18. Définition.** — Un faisceau pervers  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  est dit  $\mathfrak{S}$ -adapté s'il existe  $1 \leq h \leq e$  tel que  $L \simeq i_*^h i^{h, *} L$  et que le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{\geq h} j^{\geq h, *} (i^{h, *} L) \longrightarrow i^{h, *} L$  induit un bimorphisme

$${}^{p+}j_{!*}^{=h} j^{=h, *} L \xrightarrow{+} L.$$

Une  $\mathcal{F}$ -filtration sera dite  $\mathfrak{S}$ -adaptée si tous ses gradués le sont.

Dans [6] proposition 2.3.3, en utilisant les  $\mathrm{Fil}_{U,1}^{-1}$ , on construit de façon fonctorielle la filtration exhaustive de stratification de tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ ,  $\mathfrak{S}$ -adaptée au sens précédent

$$0 = \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}_!}^{-2e-1}(L) \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}_!}^{-2e-1+1}(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}_!}^0(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}_!}^{2e-1-1}(L) = L.$$

Décrivons rapidement la construction de loc. cit. :

- on commence par regarder le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{-1} j^{=1, *} L \longrightarrow L$  dont le conoyau  $Q_1$  donnera des gradués pour des indices strictement positifs alors que le noyau  $P_1$  de  ${}^{p+}j_!^{-1} j^{=1, *} L \longrightarrow {}^{p+}j_{!*}^{-1} j^{=1, *} L$  donnera des gradués pour des indices strictement négatifs, le gradué d'indice 0 sera tel que  ${}^{p+}j_{!*}^{-1} j^{=1, *} L \xrightarrow{+} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S}_!}^0(L)$ .
- On passe alors à la strate suivante  $X_{\overline{Z}, \overline{s}}^{-2}$  pour  $P_1$  et  $Q_1$ . Pour  $F := P_1$  (resp.  $F := Q_1$ ), on considère  ${}^{p+}j_!^{-2} j^{=2, *} F \longrightarrow F$ . Le conoyau de ce morphisme donnera des gradués pour les indices  $-2e-2 < k < 0$  (resp.  $2e-2 < k < 2e-1$ ), alors que le noyau de  ${}^{p+}j_!^{-2} j^{=2, *} F \longrightarrow {}^{p+}j_{!*}^{-2} j^{=2, *} F$  donnera des gradués pour les indices strictement inférieurs à  $-2e-2$  (resp.  $0 < k < 2e-2$ ); le gradué d'indice  $k = -2e-2$  (resp.  $k = 2e-2$ ) vérifiant  ${}^{p+}j_{!*}^{-2} j^{=2, *} F \xrightarrow{+} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S}_!}^k(L)$ .
- On traite ainsi toutes les strates jusqu'à  $h = e$ .

**1.3.19. Définition.** — On dira que  $L$  est *exhaustivement*  $\mathfrak{S}_!$ -saturé (resp. *exhaustivement*  $\mathfrak{S}_!$ -parfait) si dans la construction des  $\mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}_!}^\bullet(L)$  tous les morphismes d'adjonction  $\mathrm{can}_!$  considérés sont stricts, cf. 1.3.11 (resp. surjectifs dans  ${}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda)$ ).

*Remarque :* si  $L$  et  $L'$  à support dans une même strate de  $\mathfrak{S}$ , sont exhaustivement  $\mathfrak{S}_!$ -parfait, leur somme directe ne l'est plus à priori. Pour que ce soit vrai, il faut et il suffit que les strates de leurs constituants irréductibles soient les mêmes.

Dans la situation des variétés de Shimura du §1.2, la stratification  $\mathfrak{S}$  sera donnée par celle de Newton de 1.2.5; nous ferons alors disparaître  $\mathfrak{S}$  des notations. On introduit par ailleurs la notation suivante, cf. aussi la définition 1.3.10.

**1.3.20. Notation.** — Étant donné un faisceau  $p$ -pervers  $F$  tel que  $j^{\geq h,*}F$  est libre localement constant, on notera  $P_F$  le noyau de  $j_!^h j^{=h,*}F \rightarrow F$  soit

$$P_F := i_*^{h+1} \left( p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*} F \right).$$

Dans le cas où  $F \simeq j_{i_*}^{=h} \mathcal{L}[d-h]$  pour un système local libre  $\mathcal{L}$  sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^h$ , on le notera  $P_{\mathcal{L}}$ .

Remarque : d'après le lemme 1.3.5,  $P_F$  est libre même si  $F$  ne l'est pas.

## 2. Preuve du théorème principal : réduction

**2.1. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke.** — Soit  $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  un schéma de Hecke pour  $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$  au sens du §1.2.2 de [5], pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P(F_v)$  où  $P(F_v)$  est un sous-groupe de  $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$ . Rappelons que

- $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$  est un système projectif de schémas relativement à des morphismes dits de restriction du niveau  $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ , finis et plats ;
- pour tout  $g \in \mathbb{G}$  et tous  $J \subset I$  tels que  $g^{-1}Jg \subset I$ , on dispose d'un morphisme fini  $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$  vérifiant les propriétés suivantes
  - pour  $g \in I$  et  $J \subset I$ ,  $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$  ;
  - pour tous  $g, g' \in \mathbb{G}$ , et tous  $K \subset J \subset I$  tels que  $g^{-1}Jg \subset I$  et  $(g')^{-1}Kg' \subset J$ , on a  $[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ .

La catégorie  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  (resp.  $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ ) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux de Hecke*) sur  $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$  à coefficients dans  $\Lambda$  est définie comme la catégorie dont :

- les objets sont les systèmes  $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$  où  $\mathcal{F}_I$  est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur  $\mathbb{X}_I$  à coefficients dans  $\Lambda$ , tels que pour tout  $g \in \mathbb{G}$  et  $J \subset I$  tel que  $g^{-1}Jg \subset I$ , on dispose d'un morphisme de faisceaux sur  $\mathbb{X}_I$ ,  $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*} \mathcal{F}_J$  soumis à la condition de cocycle  $u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$  ;
- Les flèches sont les systèmes  $(f_I : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}'_I)_{I \in \mathcal{I}}$  avec des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : par rapport à [5] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e.  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  et  $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  sont des catégories abéliennes munies de foncteurs  $j_!, i_*$  (resp.  $Rj_*, i_*$ , resp.  $j_*, Ri^!$ ) qui sont  $t$ -exact à droite (resp.  $t$ -exact, resp.  $t$  exacts à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ , comme les  $[g]_{J,I,*}$  sont  $t$ -exact, les théories de torsion à chaque étage munissent  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  d'un « système » de théories de torsion et donc d'un « système » de  $t$ -structure  $p+$ , i.e. à chaque étage.

**2.1.1. Notation.** — On notera  $\mathcal{F}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » de Hecke, i.e. le système de Hecke des  $\mathcal{F}(\mathbb{X}_I, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  pour  $I \in \mathcal{I}$ .

## 2.2. Cycles évanescents et systèmes locaux d’Harris-Taylor entiers. —

**2.2.1. Définition.** — Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , le faisceaux pervers des cycles évanescents  $R\Psi_{\eta_v, I}(\Lambda[d-1])\left(\frac{d-1}{2}\right)$  sur  $X_{I, \overline{s}}$  sera noté  $\Psi_{I, \Lambda}$ . Le faisceau pervers de Hecke associé sur  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}}$  est noté  $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$ .

*Remarque :* soit, cf. [9] III.2,  $\mathcal{L}_\xi$  le système local attaché à une représentation irréductible algébrique  $\xi$  de  $G$  sur  $\Lambda$ . Alors  $R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\Lambda) \otimes \mathcal{L}_\xi$ , i.e. d’un point de vue faisceautique, le rôle de  $\mathcal{L}_\xi$  est transparent ce qui justifie de n’étudier que le cas  $\xi$  trivial.

**2.2.2. Lemme.** — Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ ,  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est un objet de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ .

*Démonstration.* — D’après [1] proposition 4.4.2,  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est un objet de  ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ . D’après [10] variante 4.4 du théorème 4.2, on a  $D\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \simeq \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  de sorte que

$$\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) = \mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l).$$

□

**2.2.3. Définition.** — À l’aide des variétés d’Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [9] p136, associent à toute  $\Lambda$ -représentation admissible  $\rho_v$  de  $\mathcal{D}_{v, h}^\times$ , un  $\Lambda$ -système local  $\mathcal{L}_{\Lambda, \overline{\mathbb{I}}_h}(\rho_v)$  sur  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, \overline{\mathbb{I}}_h}^=h$  muni d’une action de  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h, d-h}(\mathcal{O}_v)$ , où le deuxième facteur agit via la projection  $P_{h, d-h}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)$  comme dans la remarque suivant 1.2.7. On note alors

$$\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v) := \mathcal{L}_{\Lambda, \overline{\mathbb{I}}_h}(\rho_v) \times_{P_{h, d-h}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v)$$

sa version induite sur  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}}^=h$ , cf. les notations du §B.1.

*Remarque :* pour  $\rho_v$  une représentation de  $D_{v, h}^\times$ , on notera  $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v)$  pour  $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v, |_{\mathcal{D}_{v, h}^\times})$ .

Le découpage (B.2.7) de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  selon les classes d’équivalence inertielles des représentations irréductibles cuspidales  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$ , n’est plus valable sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ . On peut utiliser la proposition A.2.6 afin de décomposer, pour  $\rho_v$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière de  $D_{v, h}^\times$ ,

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_v) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_v, \bar{\tau}),$$

où  $\rho_v, \bar{\tau}$  désigne la  $\bar{\tau}$ -composante de  $\rho_v$  au sens de la proposition A.2.6. En appliquant cette décomposition à la restriction  $(\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda})|_{X_{\mathcal{I}, \overline{s}}^=h}$  du faisceau pervers des cycles évanescents à la strate  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}}^=h$ , cf. (B.2.8), on obtient nos premiers systèmes locaux d’Harris-Taylor entiers.

**2.2.4. Proposition.** — (cf. [9] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [5])

On a un isomorphisme<sup>(2)</sup>  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h, d-h}(F_v) \times W_v$ -équivariant

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,h}^{\times})^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^{\times}} \left( \mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right) |_{X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} = h} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i}),$$

où  $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}$  est défini en 1.1.3 et la correspondance entre le système indexé par  $\mathcal{I}$  et  $\mathbb{N}$  est donné par l'application  $m_1$  de 1.2.3.

**2.2.5. Notation.** — Pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ , on notera  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\bar{\tau})$  pour  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1})$  et  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$  pour la version induite.

En utilisant (B.2.8), on peut s'amuser à décrire  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$  à partir des  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux d'Harris-Taylor de [5]. Pour ce faire introduisons la notation suivante.

**2.2.6. Notation.** — Avec les notations de A.2.7 et A.2.9, notons

$$\mathcal{J}(\bar{\tau}) = \{-1 \leq i \leq s(\bar{\tau}) \text{ tel que } g_i(\bar{\tau}) \text{ divise } h\}.$$

Remarque : d'après A.2.7, on a  $g_{-1}(\bar{\tau}) \mid g_0(\bar{\tau}) \mid \cdots \mid g_{s(\bar{\tau})}$ , de sorte que  $\mathcal{J}(\bar{\tau})$  est de la forme

$$\mathcal{J}(\bar{\tau}) = \{-1, \dots, i_{\bar{\tau}}\}.$$

**2.2.7. Proposition.** — Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{v,h}^{\times}$ , on a

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\bar{\tau}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}(\bar{\tau})} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar{\tau})} j_{\overline{\mathbb{I}}_h}^{=h,*} \mathcal{P}_{\overline{\mathbb{I}}_h} \left( \frac{h}{g_i(\bar{\tau})}, \pi_v \right) \left( \frac{1 - \frac{h}{g_i(\bar{\tau})}}{2} \right). \quad (2.2.8)$$

*Démonstration.* — D'après [5] théorème 2.2.4, cf. aussi la proposition B.2.2, les gradués de la filtration par les poids de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  sont les  $\mathcal{P}(t, \pi_v) \left( \frac{1-t+2i}{2} \right)$  où

- $\pi_v$  décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$ ,
- $t$  varie de 1 à  $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  et  $i$  de 0 à  $t-1$ .

Le résultat découle alors de la formule (B.2.8).  $\square$

Remarque : en utilisant la définition de  $\mathcal{P}(t, \pi_v)$  en terme d'extension intermédiaire d'un système local d'Harris-Taylor, cf. le §B.1, on peut exprimer  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\bar{\tau})$  en termes des systèmes locaux  $\widetilde{HT}_{\overline{\mathbb{I}}_h}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$ .

Pour découper plus finement encore les systèmes locaux  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\bar{\tau})$ , on peut écrire pour  $k = -1, \dots, s(\bar{\tau})$ ,

$$\mathrm{Fil}_k(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{\mathbb{I}}_h}(\bar{\tau})) := \bigoplus_{i=-1}^k \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar{\tau})} j_{\overline{\mathbb{I}}_h}^{=h,*} \mathcal{P}_{\overline{\mathbb{I}}_h} \left( \frac{h}{g_i(\bar{\tau})}, \pi_v \right) \left( \frac{1 - \frac{h}{g_i(\bar{\tau})}}{2} \right)$$

2. Noter le décalage  $[d-1]$  dans la définition de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ .



le facteur direct de  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})$  et noter  $\text{gr}_k(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}))$  les gradués de cette filtration. Soit alors

$$\text{gr}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) = \text{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) := \text{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) \cap \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}),$$

et  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})_{\geq 0} := \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}) / \text{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}))$ . On définit ensuite

$$\text{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) := \text{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) \cap \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})_{\geq 0}$$

et  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})_{\geq 1} := \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})_{\geq 0} / \text{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}))$ . En continuant ce processus, on construit la  $\overline{\tau}$ -filtration naïve

$$\text{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) \subset \text{Fil}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{i_{\overline{\tau}}}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})) = \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau})$$

dont les gradués  $\text{gr}_i(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\overline{\tau}))$ , pour  $i \in \mathcal{J}(\overline{\tau})$ , sont de pur  $\overline{\tau}$ -type égal à  $i$  au sens de la définition suivante.

**2.2.9. Définition.** — Soit  $\mathcal{L}$  un système local sans torsion sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\overline{h}}$  s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\rho_v} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_v)^{m_{\rho_v}(\mathcal{L})}$$

où  $\rho_v$  décrit les représentations irréductibles admissibles de  $D_{v, h}^\times$ , les multiplicités  $m_{\rho_v}(\mathcal{L})$  étant presque toutes nulles. Pour  $\overline{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{v, h}^\times$ , le système local  $\mathcal{L}$  est dit de  $\overline{\tau}$ -type  $\geq i$  (resp. pure de  $\overline{\tau}$ -type  $i$ ) si tout  $\rho_v$  tel que  $m_{\rho_v}(\mathcal{L}) \neq 0$ , est, au sens de A.2.9, de  $\overline{\tau}$ -type  $\geq i$  (resp. de  $\overline{\tau}$ -type  $i$ ).

Enfin on peut raffiner encore cette filtration afin que les gradués soient des faisceaux pervers libres tels qu'après tensorisation par  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , on obtienne un faisceau pervers d'Harris-Taylor. Cette construction nous fournit alors des réseaux stables de chacun des  $j_{\overline{1}_h}^{\overline{h}, *}\mathcal{P}(\frac{\overline{h}}{g_i(\overline{\tau})}, \pi_v)(\frac{1-\frac{\overline{h}}{g_i(\overline{\tau})}}{2})$ , lesquels dépendent, à priori, de tous les choix non naturels faits pour construire cette filtration. Revenant à notre motivation principale qui est de montrer que les fibres des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  sont sans torsion, tout ce qui nous importe est de construire une filtration de  $\Psi_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  de sorte que

- d'une part les fibres des faisceaux de cohomologie des gradués soient sans torsion et
- que d'autre part la suite spectrale calculant les fibres des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  à partir de celles de ses gradués, dégénère en  $E_1$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ .

De ce point de vue, les réseaux des systèmes locaux d'Harris-Taylor construits par tous les choix nécessaires pour se ramener à des  $HT(\pi_v, \Pi_t)$  dans toute la suite du texte, n'interviennent pas.

**2.2.10. Définition.** — On dira d'un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local libre  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \mathcal{A}}^{\overline{h}'}$  qu'il est de type Loc (resp. Loc( $\overline{\tau}$ ) pour  $\overline{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ ) s'il est isomorphe à un réseau stable par les actions de Hecke, d'un système local d'Harris-Taylor  $\widetilde{HT}_{\mathcal{A}}(\pi_v, \Pi_t) \otimes \Xi^{\frac{\overline{h}'}{2}}$  où

- $\pi_v$  est une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  (resp. de type  $\overline{\tau}$ ),

- $\Pi_t$  est une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$  avec  $h' = tg$  dont le support cuspidal est un segment de Zelevinsky relativement à  $\pi_v$  et
- $r \in \mathbb{Z}$ .

*Remarque :* comme noté ci-avant, on ne s'intéresse donc pas aux réseaux des systèmes locaux d'Harris-Taylor

**2.2.11. Notations.** — Pour tout  $h' \geq h$  (resp.  $i \in \mathcal{J}(\bar{\tau})$ ), on notera

- $\text{Loc}(h', \bar{\tau})$  (resp.  $\text{Loc}(\bar{\tau}(i))$ ) le sous-ensemble de  $\text{Loc}(\bar{\tau})$  des systèmes locaux à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\bar{h}'}$  (resp. de pur  $\bar{\tau}$ -type égal à  $i$ ).
- $\text{Loc}(h', \bar{\tau}(i)) := \text{Loc}(h', \bar{\tau}) \cap \text{Loc}(\bar{\tau}(i))$ .
- $\text{Loc}(h') = \coprod_{1 \leq h \leq h'} \coprod_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)} \text{Loc}(h', \bar{\tau})$  et  $\text{Loc} := \coprod_{1 \leq h \leq d} \text{Loc}(h)$ .
- pour  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a}^{\bar{h}'}$  une strate de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\bar{h}'}$ , on notera avec un indice  $a$ , les systèmes locaux supportés par  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a}^{\bar{h}'}$ .

**2.2.12. Proposition.** — Pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$  et  $i \in \mathcal{J}(\bar{\tau})$ ,

- (i) l'ensemble  $\text{Loc}(h', \bar{\tau}(i))$  est non vide si et seulement si  $h \leq h' \leq d$  est de la forme  $h' = h + kg_i(\bar{\tau})$ .
- (ii) Pour  $\mathcal{L} \in \text{Loc}(h', \bar{\tau}(i))$ , les systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de  $j_{1*}^{\bar{h}'} \mathcal{L}[d - h']$  sont tous dans  $\text{Loc}(\bar{\tau}(i))$ .
- (iii) Pour  $\mathcal{L} \in \text{Loc}(h', \bar{\tau}(i))$  et  $z$  un point géométrique de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\bar{h}'}$ , l'action infinitésimale<sup>(3)</sup> de  $GL_{h'}(F_v)$  sur la fibre en  $z$  de  $\mathcal{L} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$  se décompose en une somme de représentations irréductibles dont le support cuspidal est un segment de Zelevinsky relativement à des cuspidales  $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ .

*Démonstration.* — Toutes ces questions se résolvent en regardant sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  et concernent donc les systèmes locaux  $\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)$  avec les notations du §B.1. Par définition  $\widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$  appartient à  $\text{Loc}(\bar{\tau})$  si et seulement si  $\pi_v[t]_D \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ ; il est dans  $\text{Loc}(\bar{\tau}(i))$  si et seulement si  $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ , au sens de la notation A.2.10. Le résultat découle alors de la description (B.1.6) des constituants irréductibles de  $j_{1*}^{\bar{h}'} \widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ , du diagramme (2.3.2) et des observations élémentaires suivantes :

- pour  $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ , les supports de ces constituants sont de la forme  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\bar{h} + rg_i(\bar{\tau})}$ .
- Par définition  $\widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v) \xrightarrow{\bar{\tau}} \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t+r}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$  appartient à  $\text{Loc}(h + rg_i(\bar{\tau}), \bar{\tau}(i))$ .
- Avec les notations de B.1, les deux sous-quotients irréductibles de  $\text{St}_t(\pi_v) \xrightarrow{\bar{\tau}} \text{St}_r(\pi_v)$  ont pour support cuspidal un segment de Zelevinsky relativement à  $\pi_v$ .
- Les  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux irréductibles de  $\text{Loc}(h', \bar{\tau}(i))$ , s'obtiennent en remplaçant dans  $\widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v) \xrightarrow{\bar{\tau}} \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t+r}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$ , la représentation  $\text{St}_t(\pi_v) \xrightarrow{\bar{\tau}} \text{St}_r(\pi_v)$  par

3. cf. la remarque qui suit 1.2.7

$\text{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \Pi$  où  $\Pi$  est une représentation irréductible de  $GL_{rg}(F_v)$  de même support cuspidal que  $\text{St}_r(\pi_v)$  et en faisant varier  $\pi_v$ ,  $t$  et  $r$  tels que  $\pi_v[t] \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$  et  $tg + rg_i(\bar{\tau}) = h'$ .

□

**2.3. Sur les extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Rappelons tout d'abord que pour toute  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et pour tout  $t \geq 1$ , d'après [6] corollaire 3.3.8, le faisceau pervers  $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  est exhaustivement !-parfait.

**2.3.1. Définition.** — Un faisceau  $p$ -pervers  $F$  sera dit admissible (resp. faiblement admissible) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- son support est une réunion de strate  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}, \mathcal{A}}^{\geq h_0}$  pour  $h_0 = h + \delta$  et
- $j_{\mathcal{A}}^{\leq h_0, * } F[h_0 - d] \in \text{Loc}$  et
- le morphisme d'adjonction  $j_{\mathcal{A}!}^{\leq h_0} j_{\mathcal{A}}^{\leq h_0, * } F \longrightarrow F$  est surjectif dans  ${}^p\mathcal{C}(X_{\mathcal{L}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  (resp. dans  ${}^{p+}\mathcal{C}(X_{\mathcal{L}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ ).

Pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ , on dira d'un faisceau  $p$ -pervers admissible (resp. faiblement admissible) qu'il est de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i \in \mathcal{J}(\bar{\tau})$  si  $j_{\mathcal{A}}^{\leq h_0, * } F[h_0 - d] \in \text{Loc}(\bar{\tau}(i))$  avec  $\delta = kg_i(\bar{\tau})$  pour  $k \geq 0$ .

*Remarque :* rappelons que par définition la condition  $j_{\mathcal{A}}^{\leq h_0, * } F \in \text{Loc}(\bar{\tau}(i))$  signifie que ce dernier est, après tensorisation par  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , un système local d'Harris-Taylor de la forme  $\widetilde{HT}_{\mathcal{A}}(\pi_v, \Pi_t)$  avec  $\pi_v$  de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ .

Pour  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \in \text{Loc}(h, \bar{\tau})$  et  $F$  un quotient non nul de  $j_{i!}^{\leq h} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d - h]$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & F \\
 & & & \nearrow & \downarrow \\
 & & & & \\
 P_{\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}} & \hookrightarrow & j_{i!}^{\leq h} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d - h] & \twoheadrightarrow & j_{i*}^{\leq h} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d - h] \\
 \uparrow & & \nearrow & & \\
 P_F & & & & 
 \end{array} \tag{2.3.2}$$

qui fournit une injection  $P_F \hookrightarrow P_{\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}}$ . En particulier tous les systèmes locaux des gradués de sa filtration exhaustive de stratification appartiennent aussi à  $\text{Loc}(\bar{\tau}(i))$  et d'après le corollaire 3.3.8 de [6],  $F$  est exhaustivement !-parfait au sens de la définition 1.3.19. Le point essentiel de cet article est de montrer qu'il est aussi exhaustivement !-saturé. Cette propriété découle de l'application successive de la proposition suivante qui démontre le seul point non trivial, i.e. la !-saturation du dernier tiret de la définition précédente, de l'implication : si  $F$  est admissible de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  alors  $P_F$  l'est aussi, son support étant de la forme  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}, \mathcal{A}_0}^{\geq h_0 + \delta g_i(\bar{\tau})}$ . La preuve de ce résultat est reportée au §3.2.

**2.3.3. Proposition.** — Soit  $F$  un faisceau pervers libre admissible alors  $P_F$  est  $!$ -saturé.

**2.3.4. Corollaire.** — Soient  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$  et  $F$  un faisceau pervers libre admissible de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$ , à support dans  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{A}}^{\geq h_0}$ , dont on note  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{A}_0}^{\geq h_0 + \delta g_i(\bar{\tau})}$  le support de  $P_F$ . Il existe alors :

- un entier  $0 \leq r \leq \lfloor \frac{d-h_0}{g_i(\bar{\tau})} \rfloor - \delta$ ,
- pour tout  $k = 0, \dots, r$ , un système local  $\mathcal{L}_k \in \text{Loc}(h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau}), \bar{\tau}(i))$  sur un ensemble  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{A}_k}^{\geq h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau})}$  de strates,

ainsi qu'une résolution

$$0 \rightarrow j_{\mathcal{A}_r, !}^{=h_0 + (\delta + r)g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_r[d - h_0 - (r + \delta)g_i(\bar{\tau})] \rightarrow \dots \rightarrow j_{\mathcal{A}_1, !}^{=h_0 + (1 + \delta)g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_1[d - h_0 - (\delta + 1)g_i(\bar{\tau})] \\ \rightarrow j_{\mathcal{A}_0, !}^{=h_0 + \delta g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_0[d - h_0 - \delta g_i(\bar{\tau})] \rightarrow P_F \rightarrow 0.$$

Remarque : pour  $F = {}^p j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0} \mathcal{L}[d - h_0]$  avec  $\mathcal{L} \in \text{Loc}(h_0, \bar{\tau}(i))_{\mathcal{A}}$ , on a  $\delta = 1$ ,  $r = \lfloor \frac{d-h_0}{g_i(\bar{\tau})} \rfloor - 1$  et pour tout  $k = 0, \dots, r$ , on a  $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$ . La résolution s'écrit alors

$$0 \rightarrow j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0 + r g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_r[d - h_0 - (r + 1)g_i(\bar{\tau})] \rightarrow \dots \rightarrow j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0 + 2g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_1[d - h_0 - 2g_i(\bar{\tau})] \\ \rightarrow j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0 + g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_0[d - h_0 - g_i(\bar{\tau})] \rightarrow P_{\mathcal{L}} \rightarrow 0,$$

pour des systèmes locaux  $\mathcal{L}_k$  que l'on pourrait aisément exprimer à l'aide des notations du §B.1 : ces précisions ne sont toutefois pas nécessaire pour ce que l'on cherche à prouver.

On a aussi un énoncé dual pour  $0 \rightarrow {}^{p+} j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0} \mathcal{L}[d - h_0] \rightarrow j_{\mathcal{A}, *}^{=h_0} \mathcal{L}[d - h_0] \rightarrow Q_{\mathcal{L}} \rightarrow 0$  avec  $Q_{\mathcal{L}} := i_{\mathcal{A}, *}^{h_0 + 1} {}^p \mathcal{H}_{\text{libre}}^0 i_{\mathcal{A}}^{h_0 + 1, *} {}^{p+} j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0} \mathcal{L}[d - h_0]$  et

$$0 \rightarrow Q_{\mathcal{L}} \rightarrow j_{\mathcal{A}, *}^{=h_0 + g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}'_0[d - h_0 - g_i(\bar{\tau})] \\ \rightarrow \dots \rightarrow j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0 + r g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}'_r[d - h_0 - (r + 1)g_i(\bar{\tau})] \rightarrow 0$$

Sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , ces résolutions se déduisent simplement des résultats de [5], cf. (B.1.5), le faire pour un  $F$  général comme dans l'énoncé ci-dessus serait aussi quasi-immédiat. L'apport nouveau de 2.3.4, porte sur le fait que les flèches de la résolution sont strictes.

*Démonstration.* — Le faisceau pervers  $j_{\mathcal{A}, !}^{=h_0} j_{\mathcal{A}}^{=h_0, *} F$  est admissible de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  et la proposition 2.3.3 appliquée à  $F$ , nous fournit alors un épimorphisme strict

$$j_{\mathcal{A}_0, !}^{=h_0 + \delta g_i(\bar{\tau})} j_{\mathcal{A}_0}^{=h_0 + \delta g_i(\bar{\tau}), *} P_F \twoheadrightarrow P_F$$

dont on note  $P_{F,1}$  le noyau et  $\mathcal{L}_0 := j_{\mathcal{A}_0}^{=h_0 + \delta g_i(\bar{\tau}), *} P_F$ . Considérons alors  $F_1 = P_F$  qui est admissible de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  ainsi que l'épimorphisme, strict d'après la proposition 2.3.3 appliquée à  $F_1$ ,

$$j_{\mathcal{A}_1, !}^{=h_0 + (\delta + 1)g_i(\bar{\tau})} j_{\mathcal{A}_1}^{=h_0 + (\delta + 1)g_i(\bar{\tau}), *} P_{F,1} \twoheadrightarrow P_{F,1} = P_{F_1},$$

où  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \mathcal{A}_1}^{\geq h_0 + (\delta+1)g_i(\bar{\tau})}$  est le support de  $P_{F_1} = P_{F,1}$  : on note  $\mathcal{L}_1 := j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0 + (\delta+1)g_i(\bar{\tau}),*} P_{F,1}$ . La situation est résumée par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
P_{F,1} & \xrightarrow{+} & j_{\mathcal{A}_0}^{\cdot=h_0 + \delta g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_0[d - h_0 - \delta g_i(\bar{\tau})] \dashrightarrow P_F \\
\uparrow & & \dashrightarrow \\
j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0 + (\delta+1)g_i(\bar{\tau})} \mathcal{L}_1[d - h_0 - (\delta+1)g_i(\bar{\tau})] & \xlongequal{\quad} & j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0 + (\delta+1)g_i(\bar{\tau})} j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0 + (\delta+1)g_i(\bar{\tau}),*} P_{F,1} \\
\uparrow & & \\
P_{F,2} & & 
\end{array}$$

où on pose  $F_2 = P_{F,1}$  et  $P_{F,2} = P_{F,2}$ . On reprend alors le raisonnement pour  $F_2$  et ainsi de suite.  $\square$

**2.3.5. Corollaire.** — *Avec les notations du corollaire précédent, les fibres des faisceaux de cohomologie de  $F$  sont sans torsion.*

*Démonstration.* — On utilise la résolution du corollaire précédent qui nous donne que pour un point géométrique  $z$  de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\cdot=h'}$ , la fibre en  $z$  du faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^j P_F$  est nulle

- si  $h'$  n'est pas de la forme  $h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau})$  pour  $0 \leq k \leq r$  ;
- si  $h' = h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau})$  et si  $z$  n'est pas un point de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \mathcal{A}_k}^{\cdot=h_0 + (\delta+k)g_i(\bar{\tau})}$  ;
- si, pour  $z$  un point de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \mathcal{A}_k}^{\cdot=h_0 + (\delta+k)g_i(\bar{\tau})}$ ,  $j$  est distinct de  $h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau}) - d - k$ .

Enfin pour  $z$  un point de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \mathcal{A}_k}^{\cdot=h_0 + (\delta+k)g_i(\bar{\tau})}$  et  $j = h_0 + (\delta + k)g_i(\bar{\tau}) - d - k$ , cette fibre est celle de  $\mathcal{L}_k$  qui est donc sans torsion. On conclut alors à l'aide de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow P_F \rightarrow j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0} j_{\mathcal{A}_1}^{\cdot=h_0,*} F \rightarrow F \rightarrow 0.$$

$\square$

**2.4. Faisceaux de cohomologie des cycles évanescents.** — D'après le théorème de comparaison de Berkovich, cf. [3], le théorème 1.1.4 découle de l'énoncé suivant que nous allons prouver en supposant, tout d'abord que les propositions 2.3.3 et 2.4.3 sont vraies. Rappelons que 2.3.3 sera prouvée au §3.2 alors que 2.4.3 le sera au §3.3.

**2.4.1. Théorème.** — *Pour tout  $i$ , les  $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i}$  sont sans torsion.*

D'après la proposition 3.4.3 de [6], cf. aussi la proposition B.2.2, la filtration de stratification  $\text{Fil}_!^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i})$  est telle que les gradués  $\text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i}) := \text{Fil}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i}) / \text{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i})$  sont à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h}$ , où avec les notations de 2.2.5,

$$j^{\cdot=h,*} \text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{z}_i}) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_1}(h)} \mathcal{L}_{\bar{z}_i}(\bar{\tau})[d - h].$$

On peut procéder comme au §2.2, cf. la construction après la proposition 2.2.7, en filtrant les  $\mathcal{L}(h) := j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  de sorte que les gradués soient, après tensorisation par  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , des systèmes locaux d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$  : notons

$$(0) = \mathrm{Fil}^0(\mathcal{L}(h)) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(\mathcal{L}(h)) = j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$$

une telle filtration ainsi que

$$\mathrm{Fil}^k(\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(j_!^{=h} \mathrm{Fil}^k(\mathcal{L}(h)) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})).$$

On obtient ainsi une  $\mathcal{F}$ -filtration

$$\mathrm{Fil}^k(\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})) = \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$$

ce qui permet de définir par tirés en arrière une filtration  $\mathrm{Fil}_{!!}^{(h,k)}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}_{!!}^{(h,k)}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) & \dashrightarrow & \mathrm{Fil}^k(\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}). \end{array}$$

dont les gradués  $\mathrm{gr}_{!!}^{(h,k)}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  sont, au sens de la définition 2.3.1, faiblement admissibles de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  relativement à un  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}$  et  $i \geq -1$ , avec de plus  $j^{=h,*} \mathrm{gr}_{!!}^{(h,k)}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$  de la forme  $HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{h}{2}}$ , où  $\pi_v$  est irréductible cuspidale pour  $GL_g(F_v)$  et  $h = tg$ .

**2.4.2. Notation.** — A l'aide de l'ordre lexicographique, on renumérote les  $\mathrm{Fil}_{!!}^{(h,k)}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  et on note  $\mathrm{Fil}_{!!}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  la filtration de type  $\mathfrak{S}_1$ , où  $\mathfrak{S}$  désigne la stratification de Newton, ainsi obtenue.

La proposition suivante sera alors démontrée au §3.3.

**2.4.3. Proposition.** — Avec les notations précédentes, tous les gradués  $\mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  sont admissibles i.e. si  $h$  désigne l'indice de la strate support de  $\mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ , le morphisme d'adjonction

$$j_!^{=h} j^{=h,*} \mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$$

est un épimorphisme strict.

**2.4.4. Proposition.** — Le théorème 2.4.1 découle des propositions 2.3.3 et 2.4.3.

*Démonstration.* — D'après 2.4.3, les  $\mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  sont admissibles de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$ , pour un certain  $\bar{\tau}$  et  $i$ , de sorte que

- d'après le corollaire 2.3.5 les faisceaux de cohomologie des  $\mathrm{gr}_{!!}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  sont sans torsion.
- D'après la remarque suivant la proposition 3.4.3 de [6], sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , la filtration de stratification coïncide avec celle par les noyaux itérés de la monodromie.

- D'après [5] §5.8, la suite spectrale associée à cette filtration et calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  à partir de ceux des  $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l})$ , dégénère en  $E_1$ .
- Ainsi la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ , à partir de ceux des  $\mathrm{gr}_!^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l})$ , dégénère aussi en  $E_1$ .

En résumé, la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ , à partir de ceux des  $\mathrm{gr}_!^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ , a ses termes en  $E_1$  qui sont sans torsion et comme sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , elle dégénère en  $E_1$ , on en déduit qu'elle dégénère aussi en  $E_1$  sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  et que donc les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  sont aussi sans torsion.  $\square$

### 3. Etude de la saturation

Le but de ce paragraphe est donc de prouver les propositions 2.3.3 et 2.4.3. On commence par traiter le cas où  $F$  est un faisceau pervers d'Harris-Taylor associé à un système local  $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}$  sur  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, 1_h}^{\leq h}$ . Rappelons que pour

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j_{1_h, !}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h] \longrightarrow {}^p j_{1_h, !*}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow 0,$$

il s'agit de montrer que le morphisme d'adjonction

$$j_{1_h, !}^{\leq h+1} j_{1_h}^{\leq h+1, *} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

est strict, au sens de la définition 1.3.6, ce qui ici signifie que le conoyau  $T_{\mathcal{L}}$  dans la catégorie des faisceaux  $p$ -pervers, est nul. En raisonnant par récurrence sur  $h$ , les gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $j_{1_h, !}^{\leq h+1} j_{1_h}^{\leq h+1, *} P_{\mathcal{L}}$  sont des  $p$ -extensions intermédiaires de systèmes locaux de  $\mathrm{Loc}$  et on est alors confronté à deux difficultés :

- (i) les gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $P_{\mathcal{L}}$  sont-ils aussi des  $p$ -extensions intermédiaires de systèmes locaux de  $\mathrm{Loc}$  ou simplement reliés par un bimorphisme à une telle extension intermédiaire, comme par exemple les  ${}^{p+} j_{!*}^{\leq h'}$  ?
- (ii) Les réseaux de ces gradués sont-ils les mêmes que ceux donnés par  $j_{1_h, !}^{\leq h+1} j_{1_h}^{\leq h+1, *} P_{\mathcal{L}}$  ?

L'idée est d'insérer une étape intermédiaire en considérant pour toute strate  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$  de  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, 1_h}^{\leq h}$ , le morphisme d'adjonction

$$j_{\neq c, !}^{\leq h} j_{\neq c}^{\leq h, *} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}, \quad (3.0.1)$$

et son  $p$ -conoyau <sup>(4)</sup> :  $i_{c, *}^{h+1} {}^p \mathcal{H}^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$ . Pour  $F = {}^p j_{1_h, !*}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h]$ , ce conoyau est relativement simple isomorphe sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  à l'extension intermédiaire d'un système local de sorte que le problème (ii) ci-dessus disparaît et on est simplement ramené à démontrer que  $i_{c, *}^{h+1} {}^p \mathcal{H}^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$  est une extension intermédiaire de la forme  ${}^p j_{!*}^{\leq h'}$  d'un système local de  $\mathrm{Loc}$ .

4. Comme  $j_{\neq c}^{\leq h}$  est affine, ce conoyau est en fait libre.

Il y a un cas particulièrement simple où le problème (i) disparaît aussi, il s'agit du cas où le système local d'Harris-Taylor  $\mathcal{L}$  est associé à un caractère  $\chi_v$  de  $F_v^\times$ , i.e.  $\mathcal{L} \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l$  avec l'action du groupe fondamental  $\Pi_1(X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s}}}^{\leq h})$  de  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s}}}^{\leq h}$  qui se factorise par son quotient  $\Pi_1(X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s}}}^{\leq h}) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{v,h}^\times$ , où l'action de  $\mathcal{D}_{v,h}^\times$  est donnée par un caractère  $\chi_v$ .

**3.0.2. Lemme.** — *Avec les notations précédentes, on a*

$${}^p j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h] \simeq {}^{p+} j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]_{|X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},\overline{1}_h}}^{\geq h}} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v).$$

*Démonstration.* — Comme  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s}}}^{\leq h} = X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},\overline{1}_h}}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v)$ , il suffit de montrer que

$${}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\geq h} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \simeq {}^{p+} j_{\overline{1}_h,!*}^{\geq h} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l|_{X_{\overline{\mathcal{L},\overline{1}_h}}^{\geq h}}[d-h].$$

Or  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},\overline{1}_h}}^{\geq h}$  étant lisse sur  $\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ ,  $\overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]$  y est pervers au sens des deux  $t$ -structures avec  $i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,*} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^p \mathcal{D}^{\leq 0}$  et  $i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,!} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^{p+} \mathcal{D}^{\geq 1}$ , d'où le résultat.  $\square$

Dans le cas général les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor ne sont pas isomorphes, comme on le montrera dans un prochain article, de sorte que le problème (i) persiste. Le principe pour attaquer ce point est le suivant : relativement à un point géométrique  $z$  de  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},c}}^{\geq h+1}$ , le faisceau pervers  $P_{\mathcal{L}}$  admet un quotient  $Q$  qui sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  est  ${}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\leq h+g} j_{\overline{1}_h}^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}}$  alors que (3.0.1) fournit sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  une suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_{\overline{1}_h - \{c\},!*}^{\leq h+g} j_{\overline{1}_h - \{c\}}^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow 0,$$

où  $Q' \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{c,!*}^{\leq h+g} j_c^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}}$ . Pour une strate pure  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},a}}^{\leq h+g} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},c}}^{\geq h+1}$ , en prenant  $c'$  tel que  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},c'}}^{\geq h+1}$  ne contient pas  $X_{\overline{\mathcal{L},\overline{s},a}}^{\leq h+g}$ , on obtient un monomorphisme strict  ${}^p j_{a,!*}^{\leq h+g} j_a^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow Q$  qu'on peut composer avec  $Q \rightarrow Q'$  et il s'agit alors de montrer que le composé est encore strict ce qui revient à montrer que  ${}^p j_{a,!*}^{\leq h+g} j_a^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}}$  est facteur direct dans  $Q$ . L'objectif du §3.1 est ainsi de contrôler, les extensions sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , scindées sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , entre deux extensions intermédiaires de systèmes locaux de Loc. Il s'agit bien évidemment d'utiliser l'action de  $P_{h,d-h}(F_v)$ , l'ingrédient de théorie des représentations est alors le lemme A.1.6 qui impose que  $\mathcal{L}$  ne soit pas un système local d'Harris-Taylor associé à un caractère, cas trivial mentionné plus haut. On passe ensuite aisément du cas d'un système local à celui plus général d'un faisceau pervers comme dans 2.3.3.

En ce qui concerne le faisceau pervers des cycles évanescents, illustrons la stratégie dans le cas le plus simple où  $d = 2$ . Sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , on part de la suite exacte courte suivante, cf. la proposition B.3.4,

$$0 \rightarrow j_{\neq \overline{1}_1}^{\leq 1} j_{\neq \overline{1}_1}^{\leq 1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

avec

$$0 \rightarrow {}^p j_{\overline{1}_1,!*}^{\leq 1} j_{\overline{1}_1}^{\leq 1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow Q \rightarrow i_{\overline{1}_1,*}^2 \left( {}^p \mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_1}^{2,*} \Psi_{\mathcal{I}} \right) \rightarrow 0. \quad (3.0.3)$$



En outre la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de  $Q$  à partir de ceux de  ${}^p j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  et du faisceau pervers ponctuel  $i_{\overline{1}_1, *}^2 \left( {}^p \mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_1}^{2,*} \Psi_{\mathcal{I}} \right)$ , dégénère en  $E_1$ . Ainsi en utilisant que, d'après la proposition 2.3.3, les faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion, il suffit de montrer que (3.0.3) est valable sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , i.e. que le monomorphisme

$${}^p j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \hookrightarrow Q$$

est strict. Mais dans le cas  $d = 2$ , d'après le lemme 3.0.2, on a

$${}^p j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \simeq {}^{p+} j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}},$$

de sorte que le monomorphisme précédent est automatiquement strict. Dans le cas général, le quotient  $Q$  de  ${}^p j_{\overline{1}_1, !*}^{=1} j_{\overline{1}_1}^{=1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \Psi_{\mathcal{I}}$  admet une filtration : la suite spectrale associée à cette filtration et calculant les germes en un point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_1}^{\geq 1}$  des faisceaux de cohomologie de  $Q$ , et donc ceux de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ , dégénère encore en  $E_1$  et d'après, la proposition 2.3.3, on est ramené à montrer que chacun de ces gradués est une  $p$ -extension intermédiaire. Les arguments sont semblables à ceux de la preuve de la proposition 2.3.3, la combinatoire est simplement un peu plus complexe.

Pour conclure cette introduction, on conseille au lecteur, avant d'attaquer chacun des §3.2 et §3.3, de lire le §B.3 qui détaille, dans le cas plus simple de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , les effets du foncteur  ${}^{j_{\neq c, !*}^h} j_{\neq c}^{=h,*}$ . Signalons par ailleurs, cf. les remarques suivant B.3.3 et B.3.4, que l'utilisation de l'affinité de  $j_{\overline{1}_h, \neq c}^{h \leq +1}$  permettrait de simplifier grandement les arguments de [5].

**3.1. Sur quelques faisceaux  $p$ -pervers de torsion.** — Étant donné un faisceau pervers libre  $L$  sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$  muni d'une action compatible de  $P_{h, d-h}(F_v)$ , pour toute strate  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+1} \subset X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ , le faisceau pervers libre  ${}^{p+} \mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_h, a}^{h \leq +1,*} L$  est muni, avec les notations de A.1.2 pour  $\Delta = \overline{1}_h$ , d'une action compatible de  $P_{\Delta(a)}(F_v)$  vu comme sous-groupe de  $P_a(F_v)$ .

On est ainsi naturellement amené à considérer des faisceaux pervers libres à support dans des strates  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$  munis d'une action compatible d'un sous-groupe parabolique  $P_{\Delta(a)}(F_v) \subset P_a(F_v)$  pour un certain drapeau  $\Delta = \{(0) = a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset F_v^d\}$ , éventuellement réduit à  $(0)$ .

*Remarque :* on convient que  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, (0)}^{\geq h} := X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq h}$ .

**3.1.1. Définition.** — Soit  $\Delta = \{a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset F_v^d\}$  un drapeau et soit, pour  $h \geq \dim a_r$ , un faisceau pervers libre  $L \in \mathcal{F}(X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq 1}, \Lambda)$  à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$  où  $\mathcal{A}$  est un ensemble de strate  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$  tel que

$$X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \mathcal{A}}^{\geq h} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h} \subset X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a_r}^{\geq \dim a_r},$$

i.e.  $a_r \subset a$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . Un tel  $L$  est dit  $\Delta$ -Hecke-équivariant

- si pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  ${}^{p+} \mathcal{H}^0 i_a^{h,*} L$  est muni d'une action, par correspondances de Hecke, de  $P_{\Delta(a)}(F_v)$  compatible à l'action par correspondances de  $P_a(F_v)$  sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ ,

— telle que pour toute  $k > h$  et pour toute strate  $X_{\mathcal{I},\bar{s},b}^{\geq k}$  contenue dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\geq h}$  (resp. dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a'}^{\geq h}$ ), l'action sur

$${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_b^{k,*} L \simeq {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{a,b}^{h \leq + (k-h),*} \left( {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} L \right) \simeq {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{a',b}^{h \leq + (k-h),*} \left( {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{a'}^{h,*} L \right),$$

du parabolique  $P_{\Delta(a \subset b)}(F_v)$  est compatible à celle de  $P_{\Delta(a' \subset b)}(F_v)$  au sens où l'action de  $P_{\Delta(a \subset b)}(F_v) \cap P_{\Delta(a' \subset b)}(F_v)$  est la même qu'on le voit comme un sous-groupe de  $P_{\Delta(a \subset b)}(F_v)$  ou de  $P_{\Delta(a' \subset b)}(F_v)$ .

L'action infinitésimale<sup>(5)</sup>, sur  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} L$  est par définition celle du sous-groupe parabolique associé au drapeau  $\widehat{\Delta} = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset a\}$  de  $V_a$  que l'on identifie à un parabolique de  $GL_h(F_v)$ .

**3.1.2. Notation.** — On notera  $\mathcal{F}_{\Delta}(X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}^{\geq h}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  la catégorie quasi-abélienne dont les objets sont les faisceaux pervers « libres » de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  qui sont  $\Delta$ -Hecke équivariants à support dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}^{\geq h}$  au sens de la définition 1.3.13, les morphismes étant ceux de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  qui sont  $\Delta$ -Hecke équivariants.

Remarque : soit  $L \in \mathcal{F}_{\Delta}(X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}^{\geq h}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  avec  $\sharp \mathcal{A} > 1$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ , le morphisme d'adjonction  $\text{can}_{!,\neq a,L} : j_{\neq a,!}^{=h,*} L \rightarrow L$  fournit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow L_{\neq a} \rightarrow L \rightarrow i_{a,*}^h \left( {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} L \right) \rightarrow 0,$$

où  $L_{\neq a} = \text{Im}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,\neq a,L}) \in \mathcal{F}_{\Delta}(X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}-\{a\}}^{\geq h}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  et  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} L \in \mathcal{F}_{\Delta(a)}(X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\geq h}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ .

Remarque : soient

- un faisceau pervers  $Q \in \mathcal{F}_{\Delta}(X_{\mathcal{I},\bar{s},1_h}^{\geq h+g}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  tel que  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} Q$  est de torsion et donc muni d'une action de  $P_{\Delta}(F_v)$ ;
- et un monomorphisme strict  $A \hookrightarrow Q$  avec  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} A \hookrightarrow {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} Q$ .

Dans le cas où  ${}^{p+}j_{a,!}^{h+g} \mathcal{L}_a[d-h-g] \hookrightarrow_+ A$  pour  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{=h+g}$  une strate pure au sens de 1.2.7, contenue dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1_h}^{\geq h}$ , l'inclusion  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} A \hookrightarrow {}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} Q$  étant  $P_{\Delta(a)}(F_v)$ -équivariante, alors l'action naturelle de  $P_{\Delta(a)}(F_v)$  sur  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} A$  coïncide avec celle sur  ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h+g+\delta,*} Q$ .

Avant de commencer la série de résultats qui va suivre, on notera le fait élémentaire suivant. Soit  $\widehat{HT}_a(\pi_v, \Pi_t)$  un système local d'Harris-Taylor sur une strate pure  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{=tg}$  et  $\mathcal{L} \in \text{Loc}$  tel que  $\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \widehat{HT}_a(\pi_v, \Pi_t)$  : en particulier on suppose  $\Pi_t$  irréductible et de support cuspidal un segment de Zelevinsky relativement à  $\pi_v$ . Considérons alors le  $p$ -conoyau  $T$  d'un bimorphisme

$${}^{p+}j_{a,!}^{=tg} \mathcal{L}[d-tg] \hookrightarrow P \rightarrow T.$$

De manière volontairement imprécise, pour tout  $i$  tel que  $\mathcal{H}^i T$  est non nul et pour tout point géométrique  $z$  du support de  $\mathcal{H}^i T$ , l'action infinitésimale du facteur  $GL_{tg}(F_v)$  du Lévi  $P_{tg,d-tg}(F_v)$  sur  $(\mathcal{H}^i T)_z \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$  se décompose, dans le groupe de Grothendieck des

5. cf. la première remarque du §B.1 et celle suivant 1.2.7

$\overline{\mathbb{F}}_l[GL_{tg}(F_v)]$ -modules admissibles, en une somme de sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de  $\Pi_t$ . Ainsi, en particulier,

- (i) si un de ces constituants est un caractère alors  $\pi_v$  est un caractère.
- (ii) Si un unipotent non trivial de  $GL_{tg}(F_v)$  agit trivialement sur  $T$  alors, d'après le lemme A.1.6 et la remarque qui le suit,  $\pi_v$  est un caractère.

**3.1.3. Proposition.** — Soit un faisceau pervers libre  $A \in \mathcal{F}_\Delta(X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \bar{I}_h}^{\geq h+g}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  de la forme

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow A_2 \rightarrow 0$$

avec pour  $i = 1, 2$

$$p j_{a_i, !*}^{j=h+g+\delta_i} \mathcal{L}_i[d-h-g-\delta_i] \hookrightarrow_+ A_i \twoheadrightarrow T_i$$

où  $\mathcal{L}_1$  (resp.  $\mathcal{L}_2$ ) est un système local de Loc sur une strate pure  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a_1}^{=h+g+\delta_1}$  (resp.  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a_2}^{=h+g+\delta_2}$ ). On suppose en outre que la suite exacte courte précédente est scindée<sup>(6)</sup> sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ . Alors

- (i) soit  $A \simeq A_1 \oplus A_2$ ,
- (ii) soit  $A$  admet épimorphisme strict  $A \dashrightarrow A'_1$  avec

$$A_1 \hookrightarrow A'_1 \twoheadrightarrow T \neq 0.$$

*Démonstration.* — Notons  $B$  le tiré en arrière saturé

$$\begin{array}{ccc} B^c & \dashrightarrow & A \\ \uparrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ p j_{a_2, !*}^{j=h+g+\delta_2} (\mathcal{L}_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l)[d-h-g-\delta_2] & \hookrightarrow & A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xlongequal{\quad} & A_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ B^c & \hookrightarrow & A & \dashrightarrow & A'_1 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ B^c & \hookrightarrow & A_2 & \dashrightarrow & T \end{array}$$

Si  $T$  est nul, alors  $B \simeq A_2$  et alors  $A \simeq A_2 \oplus A_1$ . □

*Remarque :* avec les notations de la proposition précédente, supposons  $A$  muni d'une action de  $P_{\Delta(a_1, a_2)}(F_v) = P_{\Delta(a_1)}(F_v) \cap P_{\Delta(a_2)}(F_v)$  : dans le cas (ii), en tant que  $p$ -conoyau d'un bimorphisme sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a_2}^{\geq h+g+\delta_2}$  (resp. sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a_1}^{=h+g+\delta_1}$ ),  $T$  est muni d'une action triviale du radical unipotent de l'action infinitésimale de  $P_{\widehat{\Delta(a_2)}}(F_v)$  (resp. de  $P_{\widehat{\Delta(a_1)}}(F_v)$ ) intersecté avec  $P_{\Delta(a_1, a_2)}(F_v)$ .

6. dans la catégorie des faisceaux pervers, i.e. en oubliant l'équivariance relativement à  $P_\Delta(F_v)$

*Contexte général* : soit à présent  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+1}$  une strate pure de  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\geq h}$  et on pose

$$\Delta = \{\overline{\mathbb{1}_h}\} \quad \text{et} \quad \Delta_c = \Delta(c).$$

Avec les notations de la proposition précédente, on supposera en outre que :

- $A$  est muni d'une action de  $P_{\Delta_c(a_1,a_2)}(F_v)$  compatible à l'action de  $P_{\Delta_c(a_2)}(F_v)$  (resp.  $P_{\Delta_c(a_1)}(F_v)$ ) sur  $A_2$  (resp.  $A_1$ ).
- $V_c \subset V_{a_2}$ ,
- $V_{\overline{\mathbb{1}_h}} \subset V_{a_1}$  et
- $\dim V_{a_1} \geq \dim V_{a_2}$  avec  $V_{a_1} \neq V_{a_2}$ .

**3.1.4. Corollaire.** — *Avec les notations de la proposition précédente et en supposant que l'action infinitésimale de  $P_{\widehat{\Delta_c(a_2)}}(F_v)$  sur  $\mathcal{L}_2$  est donnée par  $\Pi_h \otimes \text{St}_{t_2}(\pi_v)$  où  $\pi_v$  est une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  avec  $g > 1$  et  $t_2g = g + \delta_2$ . Alors si  $\dim V_{a_1} \cap V_{a_2} > h$ , on a  $A \simeq A_1 \oplus A_2$ , i.e. le cas (ii) du lemme précédent est exclu.*

*Démonstration.* — Soit donc  $v \in V_{a_1} \cap V_{a_2}$  n'appartenant pas à  $V_{\overline{\mathbb{1}_h}}$ . Comme  $\dim V_{a_2} \geq \dim V_{a_1}$  et que  $V_{a_1} \neq V_{a_2}$ , il existe alors  $w \in V_{a_2} - V_{a_1}$ . On décompose l'espace  $F_v^d = V_{a_1} \oplus \langle w \rangle \oplus W$  et on note  $t_w$  la transvection qui envoie  $w$  sur  $w + v$  et égale à l'identité sur  $V_{a_1} \oplus W$ . Cette transvection est alors un unipotent non trivial de  $P_{\Delta_c(a_1)}(F_v)$  qui agit trivialement sur le faisceau pervers de torsion  $T$  de la preuve de la proposition précédente, puisque celui-ci est un  $p$ -conoyau d'un bimorphisme relatif à un système local de  $\text{Loc}$  sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a_1}^{=h+\delta_1}$ . Si  $T$  était non nul, en tant que conoyau d'un bimorphisme relatif au système local  $\mathcal{L}_2 \in \text{Loc}$  sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a_2}^{=h+\delta_2}$ , il aurait un quotient non nul possédant un germe à l'action du facteur  $GL_{t_2g}(F_v)$  est isotypique relativement à un constituant irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{t_2g}(\pi_v)$ . Mais alors  $t_w$  en tant qu'élément de  $P_{\widehat{\Delta_c(a_2)}}(F_v)$  et d'après la remarque précédente, donnerait un unipotent non trivial de  $GL_{t_2g}(F_v)$  agissant trivialement sur un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{t_2}(\pi_v)$  ce qui d'après le point (ii) précédant la proposition 3.1.3, ne se peut pas, d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : dans le raisonnement ci-avant, il suffit en fait que  $A$  soit stabilisé par un élément non trivial de l'intersection des radicaux unipotents de  $P_{\Delta_c(a_1)}(F_v)$  et  $P_{\Delta_c(a_2)}(F_v)$ . Par symétrie, on a aussi un énoncé analogue en transférant l'hypothèse sur  $\mathcal{L}_2$  à  $\mathcal{L}_1$ .

**3.1.5. Corollaire.** — *Avec les notations précédentes, on suppose en outre que*

- les strates  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a_2}^{\geq h+g+\delta_2}$  et  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a_1}^{\geq h+g+\delta_1}$  sont distinctes et que
- $T_1$  et  $T_2$  sont nuls.

*Alors le cas (ii) est exclu, i.e.  $A \simeq A_1 \oplus A_2$ .*

*Démonstration.* — Reprenons la démonstration de 3.1.3 et raisonnons par l'absurde, i.e. on suppose que  $T$  est non nul. Comme  $T_2 = 0$ , nécessairement  $T$  est à support dans

$X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_2}^{\geq h+g+\delta_2}$  de sorte que  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_2}^{\geq h+g+\delta_2} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_1}^{\geq h+g+\delta_1}$  et donc  $\dim V_{a_1} \cap V_{a_2} \geq \dim V_{a_2} > h$ . D'après le corollaire précédent, on est alors ramené au cas où les systèmes locaux  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont associés à des caractères auquel cas d'après le lemme 3.0.2

$${}^p j_{a_i, !*}^{=h+g+\delta_i} \mathcal{L}_i[d-h-g-\delta_i] \simeq {}^p j_{a_i, !*}^{=h+g+\delta_i} \mathcal{L}_i[d-h-g-\delta_i].$$

Mais alors en reprenant l'argument ci-avant en échangeant les rôles de  $A_1$  et  $A_2$ , on doit avoir  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_2}^{\geq h+g+\delta_2} = X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_1}^{\geq h+g+\delta_1}$  ce qui est exclu par hypothèse, d'où le résultat.  $\square$

On fixe pour finir cette section  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}}$  et  $i \geq -1$ ; on supposera en outre pour simplifier que la strate pure  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$  vérifie  $c \subset \overline{1}_{h+g}$ : on peut par exemple prendre  $c = \overline{1}_{h+1}$ .

**3.1.6. Proposition.** — Soit  $B \in \mathcal{F}_{\Delta_c}(X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+g}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  muni d'une action de  $P_{\Delta_c}(F_v)$  telle que

$$B \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta_c(\overline{1}_{h+g})}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} \left( {}^p j_{\overline{1}_{h+g}, !*}^{=h+g} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d-h-g] \right),$$

où  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \in \text{Loc}$ . Alors  $B$  est de la forme

$$B \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta_c(\overline{1}_{h+g})}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} (B_0),$$

où  ${}^p j_{\overline{1}_{h+g}, !*}^{=h+g} \mathcal{L}_{\overline{1}_{h+g}}[d-h-g] \hookrightarrow_+ B_0$ .

*Démonstration.* — En utilisant l'action de  $P_{\Delta_c}(F_v)$ , il suffit de montrer que le faisceau pervers libre  $B$  s'écrit sous la forme

$$B \simeq \bigoplus_{\substack{a: \dim V_a = h+g \\ V_c \subset V_a}} B_a$$

avec  ${}^p j_{a, !*}^{=h+g} \mathcal{L}_a[d-h-g] \hookrightarrow_+ B_a$ . Dans le cas contraire on aurait un sous-quotient  $A$

$$0 \rightarrow B_1 \rightarrow B \rightarrow B_2 \rightarrow 0, \quad A \hookrightarrow B_2$$

qui serait une extension non triviale comme dans le cas (ii) de la proposition 3.1.3. On va reprendre la remarque suivant le corollaire 3.1.4. Avec les notations de 3.1.3, on décompose

$$F_v^d = V_{a_1} \oplus \langle v \rangle \oplus W$$

où  $v \in V_{a_2} - V_{a_1}$ . Soit alors  $t_v$  la transvection de  $GL_d(F_v)$  égale à l'identité sur  $V_{a_1} \oplus W$  et qui envoie  $v$  sur  $v + c_0$  où  $c_0 \in V_c - V_{\overline{1}_h}$ . Ainsi  $t_v$  est un unipotent qui appartient à tous les paraboliques  $P_{\Delta_c(a)}(F_v)$  tels que  $V_c \subset V_a$ , de sorte que  $t_v$  stabilise  $B_1$ ,  $B_2$  et  $A$ . On reprend alors les arguments de la preuve du corollaire 3.1.4 : en tant que conoyau d'un bimorphisme sur  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_1}^{\geq h+g}$  l'action de  $t_v$  sur  $T$  est triviale. En tant que conoyau d'un bimorphisme sur  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a_2}^{\geq h+g}$ , l'action de  $t_v$  sur  $T$  se déduit de son action sur  $\mathcal{L}_2 \in \text{Loc}$  quand on le voit comme un unipotent du facteur  $GL_g(F_v)$  agissant sur  $HT(\pi_v, \Pi_t)$  où  $\pi_v$  est une représentation irréductible cuspidale et  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{h+g}(F_v)$  dont le support cuspidal est un segment de Zelevinsky relativement à  $\pi_v$ . Ainsi comme dans la preuve du

corollaire 3.1.4, on en déduit que  $\pi_v$  est un caractère. On reprend alors les arguments du corollaire précédent en remarquant que  $V_c \subset V_{a_1} \cap V_{a_2}$  et donc  $\dim(V_{a_1} \cap V_{a_2}) > h$ , pour conclure.  $\square$

*Remarque :* en particulier le faisceau pervers de torsion  ${}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+g+1,*} A$ , équivariant relativement à l'action de  $P_{\Delta_c(\overline{1_{h+1}})}(F_v)$ , est de la forme

$$\mathrm{Ind}_{P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} \left( {}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+g+1,*} A_0 \right).$$

**3.1.7. Corollaire.** — Avec les notations précédentes, soit

$$0 \rightarrow B \rightarrow Q \rightarrow A \rightarrow 0$$

où

- $B \simeq {}^p j_{a_0,!*}^{h+\delta} \mathcal{L}'[d-h-\delta]$  pour  $\mathcal{L}'$  un système local de Loc sur une strate pure  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, z_0}^{=h+\delta}$  avec  $\delta \geq g$ , et
- $A$  vérifie les hypothèses de la proposition précédente, i.e.  $A \simeq \mathrm{Ind}_{P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)}(A_0)$ , avec  ${}^p j_{\overline{1_{h+g}},!*}^{h+g} \mathcal{L}_{\overline{1_{h+g}}} [d-h-g] \hookrightarrow_+ A_0$ , où  $\mathcal{L}_{\overline{1_{h+g}}}$  est un système local de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  avec  $g_i(\bar{\tau}) > 1$ .

On suppose en outre que  $Q$  est muni d'une action de  $P_{\Delta_c(a_0)}(F_v)$  et que l'extension ci-dessus est scindée sur  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ , i.e. en tant que faisceau pervers et sans tenir compte de l'équivariance,

$$Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l} \simeq (B \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l}) \oplus (A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Alors l'extension est aussi scindée sur  $\overline{\mathbb{Z}_l}$ .

*Démonstration.* — Soit  $Q_0$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q_0 & \dashrightarrow & A_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On reprend alors les arguments précédents.

- Supposons tout d'abord qu'il existe  $v \in V_{a_0} \cap V_{\overline{1_{h+g}}}$  n'appartenant pas à  $V_{\overline{1_h}}$ . Comme  $\delta \geq g$ , il existe aussi  $w \in V_{a_0} - V_{\overline{1_{h+g}}}$ . On décompose alors  $F_v^d = V_{\overline{1_{h+g}}} \oplus \langle w \rangle \oplus W$  de sorte que la transvection qui envoie  $w$  sur  $w+v$  et égale à l'identité sur  $V_{a_0} \oplus W$ , est un unipotent appartenant à  $P_{\Delta_c(a_0)}(F_v) \cap P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)$ , qui vu comme élément de  $P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)$  agit trivialement sur le faisceau pervers de torsion  $T$  de la proposition 3.1.3. On en déduit comme précédemment qu'alors  $\mathcal{L}'$  est un système local d'Harris-Taylor associé à un caractère. Ainsi comme  ${}^p j_{a_0,!*}^{h+\delta} \mathcal{L}'[d-h-\delta] \simeq {}^p j_{a_0,!*}^{h+\delta} \mathcal{L}'[d-h-\delta]$ , le faisceau pervers de torsion  $T$  s'obtient comme un quotient

$${}^p j_{a_0,!*}^{h+\delta} \mathcal{L}'[d-h-\delta] \hookrightarrow {}^p j_{a_0,!*}^{h+\delta} \mathcal{L}''[d-h-\delta] \twoheadrightarrow T$$

relativement à un autre réseau stable  $\mathcal{L}''$  de  $\mathcal{L} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ . Ainsi tout unipotent de  $P_{\Delta_c(a_0)}(F_v) \cap P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)$  agit trivialement ce qui imposerait que  $g_i(\bar{\tau}) = 1$ , ce qui n'est pas par hypothèse.

— Supposons donc à présent que  $V_{a_0} \cap V_{\overline{1_{h+g}}} = V_{\overline{1_h}}$ , de sorte que

$$T_0 := {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1_{h+g}}}^{h+g+1,*} Q_0 \simeq {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1_{h+g}}}^{h+g+1,*} A_0 \hookrightarrow \text{Ind}_{P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1_{h+g}}}^{h+g+1,*} A_0 \right) \simeq {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1_{h+g}}}^{h+g+1,*} Q.$$

D'après la proposition 3.1.3, si l'extension définissant  $Q_0$  n'était pas scindée alors  $T_0$  admettrait un quotient  $T$  stabilisé par  $P_{\Delta_c(a_0)}(F_v)$ . Mais alors  $T$  serait stabilisé par le sous-groupe de  $P_{\Delta_c}(F_v)$  engendré par  $P_{\Delta_c(a_0)}(F_v)$  et  $P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)$  et donc, comme  $V_{a_0} \cap V_{\overline{1_{h+g}}} = V_{\overline{1_h}}$ , par  $P_{\Delta_c}(F_v)$  ce qui n'est pas.

Ainsi  $Q_0$  est scindé, i.e. le morphisme  $A_0 \rightarrow B[1]$  est nul. En notant que nous n'avons pas utilisé la position de  $a_0$  par rapport à  $\overline{1_{h+g}}$ , le raisonnement et la conclusion sont aussi valables pour tout facteur direct  $g.A_0$  de  $A$  pour  $g \in P_{\Delta_c}(F_v)/P_{\Delta_c(\overline{1_{h+g}})}(F_v)$  et donc  $Q$  est scindé. □

**3.2. Preuve de la proposition 2.3.3.** — Soit  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$  et  $F$  un faisceau  $p$ -pervers admissible de pur  $\bar{\tau}$ -type  $i$  au sens de la définition 2.3.1. On note  $\mathcal{L} := j^{=h,*} F[h-d]$  qui par hypothèse appartient à  $\text{Loc}(h, \bar{\tau}(i))$  et  $P_F := i_*^{h+1} {}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*} F$  avec

$$0 \rightarrow P_F \rightarrow j_{\overline{1_h}}^{=h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow F \rightarrow 0.$$

**3.2.1. Lemme.** — Pour toute strate  $i_{\overline{1_h,c}}^{h \leq +1} : X_{\overline{\mathcal{L}, \bar{s}, c}}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}, \bar{s}, \overline{1_h}}}^{\geq h}$ , le complexe  $i_c^{h+1,*} P_F$  est un faisceau  $p$ -pervers libre.

*Démonstration.* — Comme  $F$  est de la forme  $i_{\overline{1_h,*}}^h F'$ , il suffit de montrer que

$$i_{\overline{1_h,c}}^{h+1 \leq +0,*} \left( {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1_h}}^{h \leq +1,*} F' \right)$$

est  $p$ -pervers sans torsion. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^r i_{\overline{1_h,c}}^{h+1 \leq +0,*} \left( {}^p\mathcal{H}^s i_{\overline{1_h}}^{h \leq +1,*} F' \right) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s} i_{\overline{1_h,c}}^{h \leq +1,*} F'.$$

Comme  $j_{\overline{1_h}}^{\geq h}$  est affine, d'après le lemme 1.3.5,  ${}^p\mathcal{H}^s i_{\overline{1_h}}^{h \leq +1,*} F'$  est nul pour tout  $s < -1$ ; la surjectivité  $j_{\overline{1_h}}^{\geq h} j_{\overline{1_h}}^{\geq h,*} F' \rightarrow F'$ , implique aussi la nullité pour  $s = 0$ . Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en  $E_2$  avec

$${}^p\mathcal{H}^r i_{\overline{1_h,c}}^{h \leq +1,*} F' \simeq {}^p\mathcal{H}^{r+1} i_{\overline{1_h,c}}^{h+1 \leq +0,*} \left( {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1_h}}^{h \leq +1,*} F' \right).$$

De la même façon, comme  $j_{\overline{1_h, \neq c}}^{h \leq +1} : X_{\overline{\mathcal{L}, \bar{s}, \overline{1_h}}}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}, \bar{s}, \overline{1_h}}}^{\geq h}$  est affine,  ${}^p\mathcal{H}^r i_{\overline{1_h,c}}^{h \leq +1,*} F'$  est nul pour  $r < -1$  et sans torsion pour  $r = -1$  d'après le lemme 1.3.5, d'où le résultat. □

**3.2.2. Lemme.** — *Le  $P_\Delta(F_v)$ -faisceau pervers  $P_{\mathcal{L}}$  admet un quotient  $Q_{\mathcal{L}}$  lui même  $P_\Delta(F_v)$  équivariant et admettant une filtration*

$$0 \rightarrow Q_{\mathcal{L}, \neq c} \rightarrow Q_{\mathcal{L}} \rightarrow Q_{\mathcal{L}, c} \rightarrow 0$$

telle que

- $p_{j_{\neq c, !}^{=h+g}, j_{\neq c}^{=h+g, *}} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow_+ Q_{\mathcal{L}, \neq c}$  dont le conoyau  $T_{\neq c}$  est tel que son germe en tout point géométrique de  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+1}$  est nul;
- $p_{j_{c, !}^{=h+g}, j_c^{=h+g, *}} Q_{\mathcal{L}, c} \hookrightarrow_+ Q_{\mathcal{L}, c}$  dont le conoyau  $T_c$  est tel que son germe en tout point de  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+1}$  est isomorphe à celui du conoyau du morphisme d'adjonction  $j_{1_h, !}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} \rightarrow P_{\mathcal{L}}$ .
- Muni de son action de  $P_{\Delta_c}(F_v)$ , on a en outre un isomorphisme

$$Q_{\mathcal{L}, c} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta_c(a)}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} Q_{\mathcal{L}, a}$$

où  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, a}^{=h+g}$  est une strate contenue dans  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+1}$  et où  $p_{j_{a, !}^{=h+g}, j_a^{=h+g, *}} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow_+ Q_{\mathcal{L}, a}$ .

*Démonstration.* — Sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , on a une surjection

$$j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \twoheadrightarrow p_{j_{\neq c, !}^{=h+g}, j_{\neq c}^{=h+g, *}} P_{\mathcal{L}} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$$

et on note  $Q_{\mathcal{L}, \neq c}$  l'image de  $j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}}$  puis  $Q_{\mathcal{L}}$  le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc} j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} & \xlongequal{\quad} & j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & P_{\mathcal{L}} & \twoheadrightarrow & {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ & & Q_{\mathcal{L}, \neq c} & \hookrightarrow & Q_{\mathcal{L}} & \twoheadrightarrow & Q_{\mathcal{L}, c}. \end{array}$$

D'après le lemme précédent, le lemme B.3.3 et la proposition 3.1.6,  $Q_{\mathcal{L}, c} := {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$  vérifie les propriétés de l'énoncé alors que pour  $Q_{\mathcal{L}, \neq c}$  cela résulte du fait que le conoyau du morphisme d'adjonction

$$j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} \rightarrow j_{\neq c, !}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}}$$

a tous ses germes nuls en tout point géométrique de  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+1}$ . □

**3.2.3. Notation.** — *Dans l'esprit du premier tiret du lemme précédent, pour  $\mathcal{L}$  un système local sur  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{=h+g}$ , on utilisera la notation  ${}^{p(c)} j_{!}^{=h+g} \mathcal{L}[d-h-g]$  pour désigner une extension intermédiaire*

$$p_{j_{!}^{=h+g}} \mathcal{L}[d-h-g] \hookrightarrow_+ {}^{p(c)} j_{!}^{=h+g} \mathcal{L}[d-h-g]$$

dont le conoyau  $T$  a un support disjoint de  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+1}$ , i.e. le germe de  $T$  en tout point géométrique de  $X_{\bar{\mathcal{L}}, \bar{s}, c}^{\geq h+g}$  est nul.



**3.2.4. Proposition.** — Avec les notations précédentes, on a

$${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}} \simeq {}^p j_{c,!}^{h+g} j_c^{h+g,*} P_{\mathcal{L}}.$$

*Remarque :* d'après le lemme B.3.3, le résultat est vrai sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde auquel cas le bimorphisme du dernier tiret du lemme précédent ne serait pas un isomorphisme. Notons  $T_0$  le conoyau de ce bimorphisme

$${}^p j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow_+ Q_{\mathcal{L},a} \twoheadrightarrow T_0.$$

Soit  $T'_0$  un sous-faisceau  $P_{\Delta_c(a)}(F_v)$ -équivariant irréductible de  $T_0$  et  $Q'_{\mathcal{L},a}$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} {}^p j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & Q'_{\mathcal{L},a} & \dashrightarrow & T'_0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ {}^p j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & Q_{\mathcal{L},a} & \twoheadrightarrow & T_0 \end{array}$$

puis  $Q'_{\mathcal{L},c} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta_c(a)}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} Q'_{\mathcal{L},a}$  et  $Q'_{\mathcal{L}}$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} Q_{\mathcal{L},\neq c} & \hookrightarrow & Q'_{\mathcal{L}} & \dashrightarrow & Q'_{\mathcal{L},c} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Q_{\mathcal{L},\neq c} & \hookrightarrow & Q_{\mathcal{L}} & \twoheadrightarrow & Q_{\mathcal{L},c} \end{array}$$

Le faisceau pervers libre  $Q'_{\mathcal{L}}$  est donc muni d'une action de  $P_{\Delta_c}(F_v)$  et  ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g+1,*} Q'_{\mathcal{L}} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta_c(a)}(F_v)}^{P_{\Delta_c}(F_v)} T'_0$ . On utilise ensuite le fait que  $Q_{\mathcal{L}}$  est  $P_{\Delta}(F_v)$ -équivariant : on choisit  $c'$  tel que  $V_a \cap V_{c'} = V_{I_h}$  de sorte que d'après le premier tiret du lemme précédent

$$\begin{array}{ccccc} & & {}^{p(c)} j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & & \\ & & \downarrow & \dashrightarrow 0 & \\ Q'_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & Q_{\mathcal{L}} & \twoheadrightarrow & T_0/T'_0 \end{array}$$

le monomorphisme strict  ${}^{p(c)} j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow Q_{\mathcal{L}}$  se factorise par un monomorphisme strict  ${}^{p(c)} j_{a,!}^{h+g} j_a^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} \hookrightarrow Q'_{\mathcal{L}}$ . On en déduit donc qu'il existe  $a'$  tel que  $V_c \not\subset V_{a'}$  tel que le faisceau pervers  $A$  construit comme suit par poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc} Q_{\mathcal{L},\neq c} & \hookrightarrow & Q'_{\mathcal{L}} & \twoheadrightarrow & Q'_{\mathcal{L},c} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ {}^p j_{a',!}^{h+g} j_{a'}^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & Q'_{\mathcal{L},c} \end{array}$$

et tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc}
 {}^{p}j_{a',!}^{h+g} {}^{j'}_{a'}^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & Q'_{\mathcal{L},a} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 {}^{p}j_{a',!}^{h+g} {}^{j'}_{a'}^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} & \longrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & Q'_{\mathcal{L},c}
 \end{array}$$

est, cf. la proposition 3.1.3, une extension non triviale. En notant que  $A$  est muni d'une action de  $P_{\Delta_c(a)}(F_v) \cap P_{\Delta_c(a')}(F_v)$ , d'après la proposition 3.1.6, on a nécessairement  $V_{a'} \cap V_a = V_{\overline{1}_h}$ . Ainsi d'après la proposition 3.1.3, le faisceau pervers  $T'_0 \subset {}^{p}\mathcal{H}^0 i^{h+g+1,*} Q'_{\mathcal{L}}$  est alors stabilisé par l'action à la fois de  $P_{\Delta_c(a)}(F_v)$  et  $P_{\Delta_c(a')}(F_v)$  lesquels, comme  $V_a \cap V_{a'} = V_{\overline{1}_h}$  engendrent  $P_{\Delta_c}(F_v)$ . La contradiction découle alors du fait que  $T'_0 \subset {}^{p}\mathcal{H}^0 i^{h+g+1,*} Q'_{\mathcal{L}}$  n'est pas stabilisé par  $P_{\Delta_c}(F_v)$ .  $\square$

**3.2.5. Corollaire.** — *Pour tout  $\mathcal{L} \in \text{Loc}(h, \bar{\tau})$  irréductible, les faisceaux de cohomologie de  ${}^{p}j_{!}^{h} \mathcal{L}[d-h]$  sont sans torsion.*

*Démonstration.* — Il suffit bien entendu de montrer le résultat pour  ${}^{p}j_{\overline{1}_h,!}^{h} \mathcal{L}[d-h]$ . On raisonne alors par récurrence sur  $h$  de  $d$  à 1. D'après la proposition précédente, on a

$$0 \rightarrow {}^{j'}_{\neq c,!}^{h+1} {}^{j'}_{\neq c}^{h+1,*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow {}^{p}j_{c,!}^{h+g} {}^{j'}_c^{h+g,*} P_{\mathcal{L}},$$

de sorte que le germe  $(\mathcal{H}^i P_{\mathcal{L}})_z \simeq (\mathcal{H}^{i-1} {}^{p}j_{\overline{1}_h,!}^{h} \mathcal{L}[d-h])_z$  en un point géométrique  $z$  de  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie  $P_{\mathcal{L}}$  est isomorphe au germe en  $z$  de  $\mathcal{H}^i({}^{p}j_{c,!}^{h+g} {}^{j'}_c^{h+g,*} P_{\mathcal{L}})$ , qui d'après l'hypothèse de récurrence, est sans torsion. Par équivariance, on en déduit que le résultat est valable pour tout point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h+1}$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démontrons à présent la proposition 2.3.3.* Pour ce faire on raisonne par récurrence sur  $h$  de  $d$  à 1 en supposant que pour tout  $h' > h$ , pour tout  $\bar{\tau}' \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$  et pour tout faisceau  $p$ -pervers  $\bar{\tau}'$ -admissible de pur  $\bar{\tau}'$ -type  $i$  alors  $P_F$  est  $!$ -saturée. Rappelons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & F \\
 & & & \nearrow & \downarrow \\
 P_{\mathcal{L}, \mathcal{A}} & \hookrightarrow & j_{\mathcal{A},!}^{h} \mathcal{L}[d-h] & \twoheadrightarrow & {}^{p}j_{\mathcal{A},!}^{h} \mathcal{L}[d-h] \\
 \uparrow & \nearrow & & & \\
 P_F & & & & 
 \end{array}$$

où le monomorphisme  $P_F \hookrightarrow j_{!}^{h} \mathcal{L}[d-h]$  étant strict, on en déduit que celui de  $P_F \hookrightarrow P_{\mathcal{L}}$  l'est aussi : on note  $Q_F$  son conoyau qui est donc libre. On a alors une suite exacte longue

$$0 \rightarrow {}^{p}\mathcal{H}^{-1} i_c^{h+1,*} Q_F \longrightarrow {}^{p}\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_F \longrightarrow {}^{p}\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow {}^{p}\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} Q_F \rightarrow 0,$$

puisque  ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_c^{h+1,*}P_{\mathcal{L}}$  est nul.

(i) On écrit  $P_{\mathcal{L},\mathcal{A}} = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} P_{\mathcal{L},a}$  où  $P_{\mathcal{L},a}$  est le noyau de  $j_{a,!}^=h j_a^=h,* \mathcal{L} \rightarrow j_{a,!}^=h j_a^=h,* \mathcal{L}$ . D'après le lemme précédent, si  $V_a \subset V_c$ , alors  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L},a}$  est isomorphe à  ${}^p j_{c,!}^=h+g j_c^=h+g,* P_{\mathcal{L},a}$  et sinon il est nul. Ainsi comme la torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} Q_F$  est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},c}^{\geq h+g+1}$ , on en déduit que le noyau de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} Q_F$  est une somme directe de  ${}^p j_{a,!}^=h+g j_a^=h+g,* P_{\mathcal{L}}$  et que donc son  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g+1,*}$  est nul.

(ii) Comme

$${}^p\mathcal{H}^{-1}i_c^{h+1,*}Q_F \hookrightarrow j_{\neq c,!}^=h+1 j_{\neq c}^=h+1,*Q_F = j_{\neq c,!}^=h+g j_{\neq c}^=h+g,*Q_F$$

est un monomorphisme strict, d'après l'hypothèse de récurrence,  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g+1,*} ({}^p\mathcal{H}^{-1}i_c^{h+1,*}Q_F)$  est nul.

On déduit alors de (i) et (ii), en utilisant la suite exacte longue associée au foncteur  $i_c^{h+g+1,*}$ , que  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g+1,*} P_F$  est nul et que donc pour tout point géométrique  $z$  de  $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},c}^{\geq h+1}$ , la fibre en  $z$  du conoyau du morphisme d'adjonction  $j_{!}^=h+g j^=h+g,* P_F \rightarrow P_F$  est nulle. Par symétrie du problème, on en déduit que c'est vrai pour tout point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s}}^{\geq h+1}$  et que donc le morphisme d'adjonction précédent est surjectif.

**3.3. Preuve de la proposition 2.4.3.** — On renvoie le lecteur à la fin du §B.3 et plus précisément à la proposition B.3.4 pour se familiariser aux versions  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  des énoncés de ce paragraphe.

**3.3.1. Proposition.** — Pour tout  $1 \leq h \leq r$ , l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{a,!}^=h j_a^=h,* ({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$$

est  ${}^p j_{a,!}^=h j_a^=h,* ({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ ; en particulier ces morphismes sont stricts.

*Remarque :* Rappelons que  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq i_*^{r+1} {}^p\mathcal{H}^0 i^{r+1,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$  est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s}}^{\geq r+1}$  et que donc  $j_a^=h,* ({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq j_a^=h,* ({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}))$ .

**3.3.2. Corollaire.** — La proposition 2.4.3 est vérifiée.

*Démonstration.* — Il s'agit donc de montrer que pour tout  $1 \leq r \leq d$ , le conoyau du morphisme d'adjonction

$$j_{!}^=r j^=r,* \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \longrightarrow \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$$

est nul. On raisonne par récurrence sur  $r$  de 0 à  $d$ . Le cas  $r = 0$  étant trivial supposons le résultat acquis au rang  $r - 1$  de sorte que

$$\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} / \text{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq {}^p\mathcal{H}^0 i^{r,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l},$$

et que le conoyau cherché est isomorphe à la torsion du conoyau de

$$j_{!}^=r j^=r,* (\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} / \text{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} / \text{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$$

i.e. à

$$T := {}^p\mathcal{H}_{\text{tor}}^0 i^{r+1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \simeq {}^p\mathcal{H}^0 i^{r+1,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Par l'absurde s'il était non nul, soit  $z$  un point géométrique du support de sorte que le germe en  $z$  de  $T$  est non nul. On choisit alors une strate pure  $X_{\overline{\mathbb{Z}}, \overline{s}, a}^{\geq 1}$  contenant  $z$  : d'après la proposition précédente,  ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{r+1,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  est nul et donc aussi

$$\left( {}^p\mathcal{H}^0 i^{r+1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right)_z \simeq \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_{tt,a}^{r+1 \leq +0,*} ({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{r+1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right)_z,$$

d'où la contradiction.  $\square$

*Démonstration.* — de la proposition 3.3.1. Notons tout d'abord que par symétrie du problème, il suffit de traiter le cas  $a = \overline{1}_1$  et que d'après la proposition B.3.4 et la dernière remarque du §B.3, l'énoncé est vrai sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ . On va montrer le résultat par récurrence sur  $r$  de 0 à  $d$ . Le cas  $r = 0$  étant trivial, on suppose le résultat vérifié jusqu'au rang  $r - 1$ . La suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow {}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*} (\Psi_{\mathcal{I}} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \\ \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} (\Psi_{\mathcal{I}} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

en remarquant que  ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*} (\Psi_{\mathcal{I}} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}))$  et  ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion, nous fournit alors d'après la remarque précédente, la nullité de  ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*} (\Psi_{\mathcal{I}} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}))$  ainsi que le fait que  ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})$  est aussi sans torsion.

Pour tout  $h = 1, \dots, r$ , on note  $\text{gr}_{!,a,r}^h(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{a,!}^{=h} j_a^{=h,*} \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$$

de sorte que les  $\text{gr}_{!,a,r}^h(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  sont les gradués d'une filtration  $\text{Fil}_{!,a,r}^\bullet(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  avec

$${}^p j_{a,!}^{=h} j_a^{=h,*} \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right) \hookrightarrow \text{gr}_{!,a,r}^h(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Notons par ailleurs que, les faisceaux de cohomologie des  ${}^p j_{a,!}^{=h} j_a^{=h,*} \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right)$  étant sans torsion d'après la proposition 2.3.3, et que, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  d'après [5], la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  dégénère<sup>(7)</sup> en  $E_1$ , le résultat découle du lemme suivant.  $\square$

**3.3.3. Lemme.** — *Pour tout  $h$  on a*

$$\text{gr}_{!,a,r}^h(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq {}^p j_{a,!}^{=h} j_a^{=h,*} \left( {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right).$$

7. Il suffit simplement de noter que pour tout  $r$  et  $p, q$ , la source et le but de toutes les flèches  $d_r^{p,q}$  de cette suite spectrale ne sont pas tous deux non nuls.

*Démonstration.* — De l'exactitude des foncteurs  $j_{\neq c,!}^{\neq 1}$  et  $j_{\neq c}^{\neq 1,*}$ , on obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) \rightarrow j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) \rightarrow j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) \rightarrow 0.$$

On note  $Q$  le quotient de  $\mathrm{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  par  $j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right)$  puis  $P$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) & \hookrightarrow & P & \dashrightarrow & \mathrm{Fil}_{!,a,r}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \mathrm{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{gr}_{!,a,r}^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) & \xlongequal{\quad} & \mathrm{gr}_{!,a,r}^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}). \end{array}$$

En utilisant que sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , on a

$$0 \rightarrow j_{\neq c,!}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1,*} \left( \mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \right) \rightarrow \mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow \mathrm{Fil}_{!,a,r}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow 0,$$

on en déduit que sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , l'extension définissant  $P$  dans le diagramme ci-dessus est scindée.

**3.3.4. Lemme.** — Sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  et pour un réseau stable  $HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)$  d'un système local d'Harris-Taylor relativement à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $Gl_g(F_v)$ , on a la suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Ind}_{P_{1,(t+1)g-1,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,d-1}(F_v)} & {}^p j_{1,(t+1)g,!}^{\neq 1} HT_{\Gamma', \overline{1}(t+1)g}(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-1}{2} \right\} \otimes \pi_v \left\{ \frac{tg}{2} \right\}) \\ & \rightarrow j_{\neq 1,!}^{\neq 1} j_{\neq 1}^{\neq 1,*} \left( {}^p j_{!*}^{\neq 1} HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t) \right) \rightarrow {}^p j_{!*}^{\neq 1} HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le résultat est valable sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  de sorte qu'il est vrai sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  quitte à remplacer  ${}^p j_{1,(t+1)g,!}^{\neq 1} HT_{\Gamma', \overline{1}(t+1)g}(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-1}{2} \right\} \otimes \pi_v \left\{ \frac{tg}{2} \right\})$  par un faisceau pervers  $A$  qui lui est biisomorphe.

Raisonnons par l'absurde en supposant que ce bimorphisme n'est pas un isomorphisme, auquel cas il existerait un point générique d'une strate  $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, \overline{1}_1}^{=(t+1)g+\delta}$  avec  $\delta > 0$  tel que la fibre en  $z$  de  $\mathcal{H}^{(t+1)g+\delta-d} A$  soit non nulle et de torsion. Or on a montré au paragraphe précédent que la fibre en  $z$  des faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{!*}^{\neq 1} HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)$  sont sans torsion et alors, d'après [5], la fibre en  $z$  de  $\mathcal{H}^{(t+1)g+\delta-d-1} \left( {}^p j_{!*}^{\neq 1} HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t) \right)$  est nulle. Mais alors la fibre en  $z$  de  $\mathcal{H}^{(t+1)g+\delta-d} j_{\neq 1,!}^{\neq 1} j_{\neq 1}^{\neq 1,*} \left( {}^p j_{!*}^{\neq 1} HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t) \right)$  serait non nulle, ce qui n'est pas d'où la contradiction.  $\square$

Ainsi de l'exactitude de  $j_{\neq c,!}^{\neq 1}$  et du fait que d'après l'hypothèse de récurrence tous les gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $\mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  sont des  ${}^p j_{!*}^{\neq h}$ , on en

déduit qu'il en est de même pour  $j_{\neq c, !}^{\neq 1, *}$  ( $\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ ). Ainsi en appliquant successivement le corollaire 3.1.5 (resp. le corollaire 3.1.7) au gradué  $\mathrm{gr}_{!, a, r}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  lorsque celui-ci est un  ${}^p j_{!}^{\neq h}$  (resp. sinon et en utilisant l'équivariance) avec chacun des gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $j_{\neq c, !}^{\neq 1, *}$  ( $\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ ), on en déduit que  $P$  est aussi scindé sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  et que donc

$$\mathrm{Fil}_{!, a, r}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq {}^p \mathcal{H}_a^{0, 1, *} \mathrm{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient le résultat pour tout  $1 \leq h \leq r-1$  et il reste à traiter le cas de  $h = r$ . En utilisant que  $P$  est scindé, on obtient

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\neq 1, *}\left(\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})\right) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!, a, r}^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow 0$$

de sorte que  ${}^p \mathcal{H}_a^{0, 1, *} \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq \mathrm{gr}_{!, a, r}^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  est sans torsion. On reprend alors les arguments du §3.2, en remplaçant partout  $P_{\mathcal{L}}$  par  $\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  et  $\overline{1}_h$  par  $\emptyset$  et  $c = \overline{1}_1$  par exemple.  $\square$

## Appendice A

### Rappels sur les représentations

**A.1. Induites paraboliques.** — Notons  $K$  un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal  $q$  une puissance de  $p$ . Une racine carrée  $q^{\frac{1}{2}}$  de  $q$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  étant fixée, pour  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , nous noterons  $\pi\{k\}$  la représentation tordue de  $\pi$  où l'action de  $g \in GL_n(K)$  est donnée par  $\pi(g)\nu(g)^k$  avec  $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\mathrm{val}(\det g)}$ .

**A.1.1. Définition.** — Pour  $V$  un sous-espace vectoriel de dimension  $h$  de  $K^n$ , soit  $P_V$  le sous-groupe parabolique associé et  $N_V$  son radical unipotent, i.e. l'ensemble des  $g \in GL_n(K)$  tels que le noyau de  $g - \mathrm{Id}$  contienne  $V$  et son image soit contenue dans  $V$ .

**A.1.2. Notations.** — — Dans le cas où dans la définition précédente,  $V$  est engendré par les  $h$  premiers vecteurs de la base canonique,  $V$  sera noté  $\overline{1}_h$  et  $P_V$  par  $P_{h, d-h}$ .

- Pour tout  $a \in GL_d(K)/P_{h, d-h}(K)$ , on notera  $V_a$  l'image par  $a$  de  $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_h)$ , où  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  désigne la base canonique de  $K^d$ . On notera aussi  $P_a(K) = aP_{h, d-h}(K)a^{-1}$  le parabolique associé et  $N_a = aN_{h, d}(K)a^{-1}$  son sous-groupe unipotent.
- Plus généralement pour un drapeau  $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset K^d =: a_{r+1}\}$ , de gradués  $a_i/a_{i-1}$ , on note  $P_{\Delta}(F_v)$  le sous-groupe parabolique associé et  $U_{\Delta}(F_v)$  son radical unipotent.
- Enfin pour  $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset K^d\}$  un drapeau et  $a_r \subset a \subset K^d$ , on notera

$$\Delta(a) := \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset a \subset K^d\}.$$

Pour  $a_r \subset a \subset b \subset K^d$ , on notera  $\Delta(a \subset b) := (\Delta(a))(b)$ .

*Remarque :* afin d'alléger les notations, on notera  $\dim a$  pour  $\dim V_a$ .

**A.1.3. Définition.** — Soit  $P = MN$  un parabolique standard de  $GL_n$  de Lévi  $M$  et de radical unipotent  $N$ . On note  $\delta_P : P(K) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  l'application définie par  $\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}$ . Pour  $(\pi_1, V_1)$  et  $(\pi_2, V_2)$  des représentations de respectivement  $GL_{n_1}(K)$  et  $GL_{n_2}(K)$ , et  $P_{n_1, n_2}$  le parabolique standard de  $GL_{n_1+n_2}$  de Lévi  $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$  et de radical unipotent  $N$ ,  $\pi_1 \times \pi_2$  désigne l'induite parabolique normalisée de  $P_{n_1, n_2}(K)$  à  $GL_{n_1+n_2}(K)$  de  $\pi_1 \otimes \pi_2$  c'est à dire l'espace des fonctions  $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$  telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1, n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)(f(g)), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation  $\pi$  de  $GL_n(K)$  est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. D'après [14] §V.4, la réduction modulo  $l$  d'une représentation irréductible cuspidale est encore irréductible cuspidale mais pas nécessairement supercuspidale.

**A.1.4. Notations.** — Soient  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(K)$ .

- L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de  $\pi \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \times \pi \left\{ \frac{3-s}{2} \right\} \times \cdots \times \pi \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}$  est noté  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ).
- L'unique sous-espace (resp. quotient) irréductible de  $\text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-r}{2} \right\}) \times \text{Speh}_r(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\})$  (resp. de  $\text{St}_{t-1}(\pi_v \left\{ \frac{-r-1}{2} \right\}) \times \text{Speh}_{r+1}(\pi_v \left\{ \frac{t-1}{2} \right\})$ ) est noté  $LT_{\pi_v}(t-1, r)$ .

**A.1.5. Définition.** — Soit  $P = MN$  un parabolique de  $GL_n$  de Lévi  $M$  avec pour radical unipotent  $N$ . Pour  $\pi$  une  $R$ -représentation admissible de  $GL_n(K)$ , l'espace des vecteurs  $N(K)$ -coinvariants est stable sous l'action de  $M(K) \simeq P(K)/N(K)$ . On notera  $J_P(\pi)$  cette représentation tordue par  $\delta_P^{-1/2}$ .

**A.1.6. Lemme.** — Soient  $\bar{\pi}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $GL_h(K)$  telle qu'il existe un élément unipotent  $n \in GL_h(K)$  agissant trivialement. Alors  $\bar{\pi}$  est un caractère.

*Remarque :* en particulier si  $\bar{\pi}$  est obtenu comme un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  d'une représentation irréductible entière  $\Pi$  alors  $\Pi$  a pour support cuspidal des caractères.

*Démonstration.* — Par conjugaison, tout élément unipotent de  $GL_h(K)$  agit trivialement de sorte qu'en particulier le foncteur de Jacquet associé au sous-groupe unipotent du Borel  $B(K)$  de  $GL_h(K)$  est trivial sur  $\bar{\pi}$  et donc  $\bar{\pi}$  est une représentation irréductible admissible de  $B(K)$  et donc du tore. Ainsi  $\bar{\pi}$  est de dimension finie et donc un caractère. □

On termine ces rappels par un lemme certainement bien connu des experts dont nous présentons une version limitée afin d'éviter d'introduire trop de notations inutiles.

**A.1.7. Lemme.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ , alors en tant que représentation du parabolique  $P_{1,(t+r+s)g-1}(F_v)$ , on a un isomorphisme

$$LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{P_{1,(t+r)g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}) \simeq LT_{\pi}(t, r+s-1)|_{P_{1,(t+r+s)g-1}(F_v)}.$$

*Démonstration.* — Pour  $n \geq 2$ , on note  $M_n(F_v)$  le sous-groupe de  $P_{1,n-1}(F_v)$  dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Quitte à tordre les actions par  $g \mapsto \sigma(tg^{-1})\sigma^{-1}$ , où  $\sigma$  est la matrice de permutation associé au cycle  $(12 \cdots n)$ , on reconnaît le traditionnel groupe mirabolique dont le radical unipotent  $V_{n-1}(F_v)$  est abélien isomorphe à  $(F_v^\times)^{n-1}$ . On rappelle cf. par exemple [12] §III.1.10, que

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}) \\ & \rightarrow \left( LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}) \right) |_{M_{(t+r+s)g}(F_v)} \\ & \rightarrow LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}) |_{M_{sg}(F_v)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où le premier terme est l'induite parabolique relativement à  $\begin{pmatrix} M_{(t+r)g} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$  et la

deuxième l'induite à support compact relativement à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{(t+r)g} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}$ . En outre

pour tout  $k \geq 0$ , la dérivée d'ordre  $k$  de  $LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\})$  est, cf. [12] p153, donnée par celle de  $LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)}$  induite avec  $\text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\})$ , i.e.

$$\begin{aligned} & \left( LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}) \right)^{(k)} \\ & \simeq \left( LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)} \right)^{(k)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\}). \end{aligned}$$

Rappelons que la dérivée d'ordre  $k$  de  $LT_{\pi}(t, r-1)$  est nulle sauf si  $k$  est de la forme  $\delta g$  avec  $0 \leq \delta \leq t+1$  auquel cas elle est isomorphe à  $LT_{\pi\{\frac{\delta}{2}\}}(t-\delta, r-1)$  (resp.  $LT_{\pi\{\frac{\delta}{2}\}}(r-2)$ ) si  $\delta \leq t$  (resp.  $\delta = t+1$ ). Ainsi en raisonnant par récurrence sur  $t+r$ , on en déduit que  $LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{M_{(t+r)g}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\})$  et  $LT_{\pi}(t, r+s-1)$  ont les mêmes dérivées et sont donc isomorphes en tant que représentations de  $M_{(t+r+s)g}(F_v)$ . Par ailleurs comme

$$M_{(t+r+s)g}(F_v) / \left( M_{(t+r)g}(F_v) \times GL_{sg}(F_v) \right) \simeq P_{1,(t+r+s)g-1}(F_v) / \left( P_{1,(t+r)g-1}(F_v) \times GL_{sg}(F_v) \right),$$

on en déduit que  $LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1)|_{P_{1,(t+r)g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\})$  est en tant que sous-espace de  $LT_{\pi\{-\frac{s}{2}\}}(t, r-1) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t+r}{2}\})$ , isomorphe à  $LT_{\pi}(t, r+s-1)$ .  $\square$



**A.2. Représentations de  $D_{K,d}^\times$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_l$  et leurs relèvements.** — Soient  $D_{K,d}$  l'algèbre à division centrale sur  $K$  d'invariant  $1/d$ ,  $\mathcal{D}_{K,d}$  son ordre maximal de radical  $\mathcal{P}_{K,d} : 1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$  de quotients successifs  $\mathbb{F}_{q^d}^\times$  et  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

**A.2.1. Notation.** — Pour  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$  et  $s \geq 1$ , on note  $\pi[s]_D$  la représentation irréductible de  $D_{K,sg}^\times$  image de  $\text{St}_s(\pi^\vee)$  par la correspondance de Jacquet-Langlands.

*Remarque :* toute représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$  s'écrit de manière unique  $\pi[s]_D$  pour  $s|d$  et  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_{d/s}(K)$ .

**A.2.2. Notation.** — On notera  $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$  l'ensemble des classes d'équivalence des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de  $D_{v,h}^\times$ .

À torsion par un caractère non ramifié près, toute représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$  se factorise par  $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ , on choisit alors un facteur irréductible  $\zeta$  de  $\tau_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$  et on note  $N_\zeta$  le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans  $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ . Soit  $\tilde{\zeta}$  son prolongement à  $N_\zeta$  : en effet  $1 + \mathcal{P}_{K,d}$  étant un pro- $p$ -groupe, la dimension de  $\zeta$  est une puissance de  $p$  de sorte que, un  $p$ -Sylow de  $N_\zeta/(1 + \mathcal{P}_{K,d})$  étant cyclique,  $\zeta$  admet un prolongement à  $N_\zeta$ , cf. [13] lemme 1.19.

**A.2.3. Proposition.** — (cf. [8] proposition 2.3.2)

Soient  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ , et  $\bar{\zeta}$  un facteur irréductible de  $\bar{\tau}_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$ . Il existe alors un caractère  $\bar{\chi}$  de  $K^\times$  tel que  $\bar{\tau} \simeq \text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(\tilde{\zeta}_{|J} \otimes \bar{\chi})$ , avec  $J := N_{\bar{\zeta}} \cap N_{\bar{\chi}}$  où  $N_{\bar{\zeta}}$  (resp.  $N_{\bar{\chi}}$ ) est le normalisateur de  $\bar{\zeta}$  (resp.  $\bar{\chi}$ ) et où  $\tilde{\zeta}$  est un relèvement de  $\bar{\zeta}$  à  $N_{\bar{\zeta}}$ . Il existe en outre des entiers  $f', d', e'$  de produit égal à  $d$  tels que

$$J/(1 + \mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où  $m$  est un diviseur de  $d'$  tel que  $f'm = [D_{K,d}^\times : \varpi^\mathbb{Z}\mathcal{D}_{d,K}^\times J]$ .

*Remarque :* d'après [8] proposition 2.3.3, deux sous-quotients irréductibles  $\tau$  et  $\tau'$  quelconques de la réduction modulo  $l$  d'une représentation irréductible entière de  $D_{K,d}^\times$ , sont inertiuellement équivalents, i.e. il existe un caractère  $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  tel que  $\tau' \simeq \tau \otimes \zeta \circ \text{val}$ .

**A.2.4. Notation.** — Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$ , avec les notations de la proposition précédente et en notant  $r_l$  le foncteur de réduction modulo  $l$ , on notera

$$m(\bar{\tau}) = [N_\chi \cap N_{r_l(\chi)} : J] \quad \text{et} \quad g(\bar{\tau}) := \frac{d}{e'} = f'd'.$$

**A.2.5. Définition.** — Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$ , soit  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$  la sous-catégorie pleine formée des objets dont tous les  $\mathbb{Z}_l^{nr}\mathcal{D}_{K,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ . On note  $\bar{\tau}^0$  un sous-quotient irréductible quelconque de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ .

**A.2.6. Proposition.** — (cf. [7] §B.2)

Soit  $P_{\bar{\tau}^0}$  une enveloppe projective de  $\bar{\tau}^0$  dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(\mathcal{D}_{K,d}^\times)$ . Alors la sous-catégorie  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  est facteur direct dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$  pro-engendrée par l'induite  $P_{\bar{\tau}} := \text{ind}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar{\tau}^0})$ .

Ainsi toute  $\mathbb{Z}_l^{nr}$ -représentation  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$  de  $D_{K,d}^\times$  se décompose en une somme directe  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau}} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$  où  $\bar{\tau}$  décrit les classes d'équivalence des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de  $D_{K,d}^\times$  et où  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$  est un objet de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ , i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ .

**A.2.7. Notation.** — Avec les notations de la proposition A.2.3, soit  $s(\bar{\tau})$  la plus grande puissance de  $l$  divisant  $\frac{d}{m(\bar{\tau})g(\bar{\tau})}$ . On note alors

$$g_{-1}(\bar{\tau}) = g(\bar{\tau}) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\bar{\tau}), \quad g_i(\bar{\tau}) = m(\bar{\tau})l^i g(\bar{\tau}).$$

**A.2.8. Proposition.** — (cf. [8] proposition 2.3.2) Soient  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$  et  $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière. Il existe alors  $-1 \leq i \leq s(\bar{\tau})$  et une représentation irréductible cuspidale  $\pi_i$  de  $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$  telle que  $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\bar{\tau})}]_D$ .

*Remarque :* avec les notations de la proposition précédente, la réduction modulo  $l$  de  $\pi_i$  est supercuspidale si et seulement si  $i = -1$  et sinon son support supercuspidal est un segment de Zelevinsky-Vignéras de longueur  $m(\bar{\tau})l^i$ .

**A.2.9. Définition.** — Avec les notations de la proposition précédente,  $\tau'$  (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\tau'$ ) sera dit de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ . Plus généralement, pour tout  $t \geq \frac{d}{g_i(\bar{\tau})}$ , la représentation  $\pi_i[t]_D$  (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_i[t]_D$ ) de  $D_{K, tg_i(\bar{\tau})}^\times$  sera dite de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ . On dira de même qu'une représentation de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  est de  $\bar{\tau}$ -type  $\geq i$  si tous ses constituants irréductibles ont un  $\bar{\tau}$ -type qui est  $\geq i$ .

*Exemple :* soit  $\pi_{-1}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(K)$  dont la réduction modulo  $l$  est supercuspidale. Soient  $t \geq 1$  et  $\bar{\tau}$  un constituant irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{-1}[t]_D$  : on a alors  $g_{-1}(\bar{\tau}) = g$ . Soit alors  $\pi_i$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$  dont la réduction modulo  $l$  a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky  $[r_l(\pi_{-1}\{\frac{1-s}{2}\}), r_l(\pi_{-1}\{\frac{s-1}{2}\})]$  avec  $g_i(\bar{\tau}) = sg$ . Pour tout  $t_i$  tel que  $t_i g_i(\bar{\tau}) \geq tg$ , la représentation  $\pi_i[t_i]_D$  (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_i[t_i]_D$ ) est de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ .

**A.2.10. Notation.** — Avec les notations précédentes, on notera  $\text{Scusp}_i(\bar{\tau})$  l'ensemble des classes d'équivalences des représentations  $\pi_i$ .

## Appendice B

### Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [5]

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de [5] que nous utilisons dans ce texte : les notations sont celles des paragraphes précédents. Précisons de nouveau que tous les résultats de loc. cit. sont sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  ce qui permet de l'enlever des notations afin d'alléger les écritures.

Rappelons que pour  $\sigma_v$  (resp.  $\pi_v$ ) une représentation de  $W_v$  (resp. de  $GL_d(F_v)$ ), l'action d'un élément  $g$  sur

$$\sigma_v(n) \quad (\text{resp. } \pi_v\{n\})$$

est donnée par  $\sigma_v(g)|\text{Art}_{F_v}^{-1}(g)|^n$  (resp.  $\pi_v(g)|\det g|^n$ ) où  $|\cdot|$  est la valeur absolue sur  $F_v$  et  $\text{Art}_{F_v}^{-1} : W_v \rightarrow F_v^\times$  le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques  $\text{Fr}^{-1}$  de  $W_v$  de  $F_v$  sur les uniformisantes, i.e.  $v(\text{Art}_{F_v}^{-1}(\text{Fr})) = -1$ .

**B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Soient  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ . La représentation  $\pi_v[t]_D$  de  $D_{v,tg}^\times$ , cf. la notation A.2.1, fournit d'après la définition 2.2.3, un système local sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{-tg}$

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,i})_{\overline{1}_h}$$

où  $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \rho_{v,i}$  avec  $\rho_{v,i}$  irréductible et muni d'une action de  $P_{tg,d-tg}(F_v)$  via son quotient  $GL_{d-tg} \times \mathbb{Z}$ .

*Remarque :* ce système local est noté  $\mathcal{F}(t, \pi_v)_1$  dans loc. cit. 1.4.7.

**B.1.1. Notation.** — Pour tout strate pure  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{-tg}$ , on note  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$  l'image de  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$  par un élément quelconque de  $a \in GL_d(F_v)/P_{tg,d-tg}(F_v)$ . Plus généralement pour  $\mathcal{A}$  une réunion de strates pures de  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{-tg}$ , on notera

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\mathcal{A}} := \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a.$$

*Exemple :* pour  $h \leq tg$  on a ainsi  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$  est la somme directe des  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$  sur les strates pures  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{-tg}$  contenues dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h}$ .

**B.1.2. Définition.** — Les systèmes locaux d'Harris-Taylor permettant définir l'ensemble Loc de la définition 2.2.10 sont les

$$\widetilde{HT}_a(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$$

et leurs versions induites

$$\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t) := \left( \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \right) \times_{P_{tg, d-tg}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de  $P_{tg, d-tg}(F_v)$  est triviale, et celle de

$$(g^{\infty, v}, \left( \begin{array}{cc} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{array} \right), \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{tg, d-tg}(F_v) \times W_v$$

est donnée

- par celle de  $g_v^c$  sur  $\Pi_t$  et  $\deg(\sigma_v) \in \mathbb{Z}$  sur  $\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$  ainsi que
- celle de  $(g^{\infty, v}, g_v^{et}, \text{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$ , où  $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$  est défini par  $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ .

On dit de l'action de  $GL_{tg}(F_v)$  qu'elle est *infinitésimale*, cf. aussi la remarque suivant 1.2.7.

*Remarque :* pour  $\mathcal{A}$  une réunion de strates pures, on utilise aussi la notation  $\widetilde{HT}_{\mathcal{A}}(\pi_v, \Pi_t) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \widetilde{HT}_a(\pi_v, \Pi_t)$ .

**B.1.3. Notations.** — On pose

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)[d - tg],$$

et le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est

$$P(t, \pi_v) := j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

ou sa version non induite

$$P(t, \pi_v)_a = i_{a,*}^h i_{a,*}^{h,*} P(t, \pi_v) = j_{a,!}^{-tg} HT_a(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

où  $\mathbb{L}^\vee$  désigne la correspondance locale de Langlands.

*Remarque :* on rappelle que  $\pi'_v$  est inertiuellement équivalente à  $\pi_v$  si et seulement s'il existe un caractère  $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  tel que  $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det)$ . Les faisceaux pervers  $P(t, \pi_v)$  ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$  et sont de la forme

$$P(t, \pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$$

où  $\mathcal{P}(t, \pi_v)$  est un faisceau pervers irréductible.

**B.1.4. Notation.** — On note  $\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$  le noyau du morphisme d'adjonction

$$j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t),$$

qui est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq (t+1)g}$ . Avec la notation 1.3.20,  $\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$  est noté  $P_{\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)}$ .

**B.1.5. Proposition.** — (cf. [6] 3.3.5) Le morphisme d'adjonction

$$j_!^{=(t+1)g} j^{=(t+1)g,*} \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$$

est surjectif.

En itérant cette proposition, on obtient, pour  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ , la résolution

$$0 \rightarrow j_!^{=sg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}} \rightarrow \cdots \rightarrow j_!^{=(t+2)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_2(\pi_v)) \otimes \Xi^1 \\ \rightarrow j_!^{=(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \quad (\text{B.1.5})$$

où pour  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des représentations de respectivement  $GL_{t_1g}(F_v)$  et  $GL_{t_2g}(F_v)$ ,  $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$  désigne l'induite normalisée  $\pi_1\{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2\{\frac{t_1}{2}\}$ .

*Remarque :* de cette résolution on en déduit :

- le calcul des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor du théorème 2.2.5 de [5]. Précisément, pour  $g > 1$ , le  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  $j_!^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  est nul sauf si  $i$  est de la forme  $-d + tg + \delta(g-1)$  auquel cas il est isomorphe à  $HT(\pi_v, \Pi_t\{-\frac{\delta}{2}\} \times \text{Speh}_\delta(\pi_v\{\frac{t}{2}\})) [tg - d] \otimes \Xi^{\frac{\delta}{2}}$ .
- la description des constituants irréductibles de  $j_!^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de la proposition 4.3.1, complétée par le corollaire 5.4.1, de [5], cf. aussi le corollaire 3.3.8 de [6], qui dans le groupe de Grothendieck correspondant, s'écrit

$$\left[ j_!^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right] = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t} \left[ j_!^{=(t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{r}{2}} \right]. \quad (\text{B.1.6})$$

**B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents.** — La première étape de [5] consiste, cf. loc. cit. définition 2.2.2, à découper  $\Psi_{\mathcal{I}}$  selon les classes d'équivalence inertielles  $\text{Cusp}_v(g)$  des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$  :

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}. \quad (\text{B.2.7})$$

Les résultats du §7 de [5] sur  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  sont résumés par la proposition 3.4.3 de [6] que nous reproduisons ci-dessous.

**B.2.2. Proposition.** — (cf. [6] 3.4.3) Soit

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  de la proposition 1.3.16. Pour tout  $r$  non divisible par  $g$ , le gradué  $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est nul et pour  $r = tg$  avec  $1 \leq t \leq s$ , il est à support dans  $X_{\mathcal{I}, s}^{\geq tg}$  avec<sup>(8)</sup>

$$j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq j^{\geq tg, *} \mathcal{P}(t, \pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right).$$

La surjection  $j_!^{=tg} j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ , a alors pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=t}^s \left[ \mathcal{P}(i, \pi_v) \left( \frac{1+i-2t}{2} \right) \right].$$

8. à un facteur  $e_{\pi_v}$  près,  $j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est donc isomorphe à  $\widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right)$

*Remarque* : dans [6], on explique comment ce résultat permet de calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ , i.e. d'en déduire le corollaire 2.2.10 de [5]. En particulier la fibre en un point fermé de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}$  de  $\mathcal{H}^{h-d} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  est munie d'une action de  $(D_{v, tg}^\times)^0 := \text{Ker}(\text{val orn} : D_{v, tg}^\times \rightarrow \mathbb{Z})$  et de  $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$  que l'on voit plongé dans  $F_v^\times \subset D_{v, tg}^\times$ . D'après le théorème 2.2.6 de [5], ou plus simplement d'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \text{ind}_{(D_{v, tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, tg}^\times} \left( \mathcal{H}^{tg-d} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \right)_{|X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}} &\simeq \mathcal{H}^{tg-d} P(t, \pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right) \\ &\simeq \widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

**B.3. Compléments.** — Etant donnée une inclusion de strates pures  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ , l'ingrédient essentiel et nouveau par rapport à [5] est l'utilisation des morphismes

$$j_{a-c}^{\geq h} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$$

que l'on notera simplement  $j_{\neq c}^{\geq h}$  lorsque  $a = \overline{1}_h$ . On s'intéressera plus particulièrement, pour  $P$  un faisceau pervers libre supporté dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ , aux morphismes d'adjonction  $j_{a-c}^{\geq h}, j_{a-c}^{\geq h, *} P \rightarrow P$ . Dans les applications  $P$  sera en fait à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g}$ , pour  $g \geq 1$ , de sorte que

$$j_{a-c}^{\geq h}, j_{a-c}^{\geq h, *} P = j_{a-c}^{\geq h+g}, j_{a-c}^{\geq h+g, *} P,$$

où  $j_{a-c}^{\geq h+g} = i^{h+g} \circ j_{a-c}^{\geq h+g}$  avec

$$j_{a-c}^{\geq h+g} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g}.$$

*Remarque* : on autorise  $h = 0$  auquel cas  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq 0}$  est la variété de Shimura  $X_{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$ .

L'intérêt principal des inclusions  $j_{a-c}^{\geq h}$  est son caractère affine rappelé dans le lemme suivant.

**B.3.1. Lemme.** — *L'inclusion ouverte  $j_{a-c}^{\geq h}$  est affine.*

*Démonstration.* — Par symétrie il suffit de traiter le cas de  $a = \overline{1}_h$  et  $c = \overline{1}_{h+1}$ . Or pour tout  $\text{Spec } A \rightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ , le fermé  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_{h+1}}^{\geq h+1} \times_{X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}} \text{Spec } A$  est, avec les notations du §1.2, donné par l'annulation de  $\iota(e_{h+1})$ .  $\square$

En utilisant la description des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du complexe des cycles évanescents, donnée dans [5] et rappelée plus haut, nous allons donner quelques résultats sur l'effet du foncteur exact  $j_{\neq c}^{\geq h}, j_{\neq c}^{\geq h, *}$  sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents. On commence par  $h = 0$  et un faisceau pervers d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}$  de sorte que pour toute strate pure  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq 1}$ ,

$$j_{\neq c}^{\geq 1}, j_{\neq c}^{\geq 1, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \simeq \cdots \simeq j_{\neq c}^{\geq tg}, j_{\neq c}^{\geq tg, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)).$$

Pour simplifier les notations on prendra  $c = \overline{1}_1$ .

**B.3.2. Lemme.** — *Etant donné un système local d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  relativement à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $Gl_g(F_v)$ , on a la suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \text{Ind}_{P_{1,(t+1)g-1,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,d-1}(F_v)} {}^{p,j_{\overline{1}(t+1)g},!} HT_{\overline{1}(t+1)g}(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, 1)_{P_{1,(t+1)g-1}(F_v)}) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow j_{\neq \overline{1},!}^{=1}, j_{\neq \overline{1}}^{=1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \rightarrow {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Comme  ${}^{p,j_{\neq \overline{1},!}^*=1}, j_{\neq \overline{1}}^{=1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \simeq {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ , il s'agit simplement d'identifier le noyau  ${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right)$  de

$$j_{\neq \overline{1},!}^{=1}, j_{\neq \overline{1}}^{=1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \rightarrow {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$$

avec le premier terme de la suite exacte courte de l'énoncé. La technique est commune avec les preuves des lemmes qui suivront : on construit tout d'abord une surjection de  ${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right)$  vers le faisceau pervers de l'énoncé et on vérifie dans un deuxième temps que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique. Pour le premier point notons tout d'abord que

$${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \simeq {}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{\neq \overline{1},!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right).$$

D'après [5], on a

$${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{tg+1,*} \left( {}^{p,j_{\overline{1}tg,!}^*=tg} HT_{\overline{1}tg}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \twoheadrightarrow \\ \text{Ind}_{P_{1,tg-1,g,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,tg-1,d-tg}(F_v)} {}^{p,j_{\overline{1}(t+1)g,!}^*=tg} HT_{\overline{1}(t+1)g} \left( \pi_v, \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)} \otimes \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{tg+1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \twoheadrightarrow \\ \text{Ind}_{P_{1,(t+1)g-1,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,d-1}(F_v)} {}^{p,j_{\overline{1}(t+1)g,!}^*=tg} HT_{\overline{1}(t+1)g} \left( \pi_v, \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}}$$

où d'après le lemme A.1.7,

$$\left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \simeq LT_{\pi_v}(t-1, 1)_{|P_{1,(t+1)g-1}(F_v)}.$$

Ainsi on obtient bien une surjection de  ${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{\neq \overline{1},!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right)$  vers le faisceau pervers induit de l'énoncé.

Passons à présent au deuxième point. Pour tout point géométrique  $z$  de  $X_{\mathcal{L},\overline{s},\overline{1}}^h$ , le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^{p}\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} \left( {}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right)$  est isomorphe à celui du  $(i-1)$ -ème de  ${}^{p,j_{!}^*=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ . Ainsi d'après [5], ce germe est

— nul si  $(h, i)$  n'est pas de la forme  $\left( (t+\delta)g, (t+\delta)g - d - \delta \right)$  avec  $(t+\delta)g \leq d$ ,

— et sinon il est isomorphe au germe en  $z$  de  $HT(\pi_v, \Pi)$  où  $\Pi$  est l'induite normalisée

$$\Pi := \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ -\frac{\delta}{2} \right\}) \right)_{|P_{1, tg-1}(F_v)} \times \text{Speh}_\delta(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \simeq LT(t-1, \delta, \pi_v)_{|P_{1, (t+\delta)g-1}(F_v)},$$

le dernier isomorphisme étant donné par le lemme A.1.7.

On calcule de même le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie du premier faisceau pervers de la suite exacte courte de l'énoncé. Les conditions d'annulation sont les mêmes et sinon on trouve le germe en  $z$  de  $HT(\pi_v, \Pi')$  avec

$$\Pi' := LT_{\pi_v}(t-1, 1)_{|P_{1, (t+1)g-1}(F_v)} \left\{ \frac{1-\delta}{2} \right\} \times \text{Speh}_{\delta-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\})$$

qui d'après le lemme A.1.7 est isomorphe à  $\Pi \simeq LT_{\pi_v}(t-1, \delta)_{|P_{1, (t+\delta)g-1}(F_v)}$ . □

Considérons à présent  $h \geq 1$  et  $a = \overline{1}_h$ . Pour  $\mathcal{L}[d-h] = HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  un système local d'Harris-Taylor relativement à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$  avec  $h = tg$ , ne jouant aucun rôle, on notera

$$P_{\mathcal{L}} := i_*^{h+1} p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_h}^{h+1,*} \left( {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{\leq h} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \right),$$

de sorte que

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j_{\overline{1}_h, !}^{\leq h} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{\leq h} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

**B.3.3. Lemme.** — On a une suite exacte courte de faisceaux pervers libres  $P_{\Delta(c)}(F_v)$ -équivariants

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\leq h+1} j_{\neq c}^{\leq h+1,*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow {}^p j_{c, !}^{\leq h+g} j_c^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

*Remarque :* rappelons que dans [5], on calcule dans un premier temps l'image de  $j_{\overline{1}_h, !}^{\leq h} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants au moyen de la formule des traces calculant la somme alternée de la cohomologie à support compact de  $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ . Moralement donc la suite exacte de l'énoncé est à portée de la formule des traces puisque

- d'une part l'injectivité du morphisme d'adjonction  $j_{\neq c, !}^{\leq h+1} j_{\neq c}^{\leq h+1,*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$  est formelle et découle du caractère affine de  $j_{\overline{1}_h, \neq c}^{\leq h+1}$ ,
- et que l'image dans le groupe de Grothendieck du quotient se déduit par récurrence de celle de  $P_{\mathcal{L}}$  et de  $j_{\neq c, !}^{\leq h+1} j_{\neq c}^{\leq h+1,*} P_{\mathcal{L}}$ .

*Démonstration.* — En ce qui concerne le fait que le morphisme d'adjonction

$$j_{\neq c, !}^{\leq h+1} j_{\neq c}^{\leq h+1,*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

soit injectif, on renvoie le lecteur au lemme 3.2.1 qui traite ce point plus généralement sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ . Le quotient de ce morphisme d'adjonction est  ${}^p \mathcal{H}_c^{0; h+1,*} P_{\mathcal{L}}$  et il s'agit donc de montrer qu'il est isomorphe à  ${}^p j_{c, !}^{\leq h+g} j_c^{\leq h+g,*} P_{\mathcal{L}}$ . On suit la stratégie détaillée dans la preuve du lemme



précédent : le morphisme d'adjonction  $j_{c,!}^{=h+g} j_c^{=h+g,*} ({}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}}) \longrightarrow ({}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}})$  est surjectif et fournit donc une surjection

$$({}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}}) \twoheadrightarrow {}^p j_{c,!}^{=h+g} j_c^{=h+g,*} P_{\mathcal{L}}.$$

On est, comme précédemment, ramené à montrer que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s},c}}^{\geq h+g}$ . Par symétrie du problème et afin de simplifier les notations on suppose que  $c = \overline{1}_{h+1}$  et que  $z$  est un point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s},\overline{1}_{h+\delta}}}^{=h+\delta}$ . Notons que le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} P_{\mathcal{L}}$  est isomorphe à celui de  $P_{\mathcal{L}}$  lequel, d'après la suite exacte courte

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h] \longrightarrow {}^p j_{!*}^{=h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow 0,$$

est isomorphe à celui du  $(i-1)$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h]$ . D'après [5], le germe en  $z$  de  $\mathcal{H}^i({}^p j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h])$  est non nul si et seulement si  $\delta$  est de la forme  $rg$  avec  $h+rg \leq d$  et  $i = h-d+r(g-1)$  auquel cas il est isomorphe, en tant que  $P_{\Delta(\overline{1}_{h+1} \subset \overline{1}_{h+rg})}(F_v)$  au germe en  $z$  de

$$HT_{\overline{1}_{h+rg}} \left( \pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left( \text{Speh}_r(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \Big|_{P_{1,rg-1}(F_v)} \right) \right) [rg+h-d].$$

En ce qui concerne le germe en  $z$  de  ${}^p j_{c,!}^{=h+g} j_c^{=h+g,*} P_{\mathcal{L}}$ , notons tout d'abord que

$$j_{\overline{1}_{h+1}}^{=h+g,*} P_{\mathcal{L}} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta(\overline{1}_{h+1} \subset \overline{1}_{h+g})}(F_v)}^{P_{\Delta(\overline{1}_{h+1})}(F_v)} \left( j_{\overline{1}_{h+g}}^{=h+g,*} P_{\mathcal{L}} \right),$$

et que donc, d'après [5], le germe en question est isomorphe à celui de

$$HT_{\overline{1}_{h+rg}} \left( \pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left( (\pi_v \left\{ \frac{t-r+1}{2} \right\}) \Big|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\}) \right) \right) [rg+h-d].$$

Le résultat découle alors du fait, cf. A.1.7, que  $(\text{Speh}_r(\pi_v)) \Big|_{P_{1,rg-1}(F_v)}$  est irréductible isomorphe à  $(\pi_v \left\{ \frac{-r+1}{2} \right\}) \Big|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{1}{2} \right\})$ .  $\square$

Terminons par l'effet de  $j_{\neq a,!}^{\geq 1} j_{\neq a}^{\geq 1,*}$  sur le complexe des cycles évanescents. Rappelons qu'en notant

$$\bar{j} : X_{\mathcal{I},\bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} : i,$$

où  $\bar{j}_! = {}^p \bar{j}_!$  et  $\bar{j}_* = {}^p \bar{j}_*$ , le complexe des cycles évanescents est  ${}^p \mathcal{H}^{-1} i_*^* \bar{j}_* \bar{\mathbb{Q}}_l$ . Ainsi en utilisant que pour toute strate pure  $X_{\overline{\mathcal{I},\bar{s},a}}^{\geq 1}$ , l'inclusion  $\bar{j}_{\neq a}^{\geq 1} : X_{\mathcal{I},\bar{\eta}} - X_{\overline{\mathcal{I},\bar{s},a}}^{\geq 1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{\eta}}$  étant affine, le lemme 3.2.1 nous donne que  $i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  est pervers et libre, ce qui donne la suite exacte courte de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$

$$0 \rightarrow j_{\neq a,!}^{\geq 1} j_{\neq a}^{\geq 1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow i_a^{1,*} {}^p \mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow 0.$$

Rappelons, cf. [5], que  $\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l}$  se décompose en une somme directe

$$\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l} \simeq \bigoplus_{\pi} \Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}$$

où  $\pi$  décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $1 \leq g \leq d$ .

**B.3.4. Proposition.** — Avec les notations précédentes, et pour  $\pi$  irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ , le faisceau pervers  $i_{a,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}$  admet une filtration

$$\mathrm{Fil}_a^1(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \subset \mathrm{Fil}_a^2(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_a^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}),$$

où  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  avec pour gradués

$$\mathrm{gr}_a^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \simeq {}^p j_{a,!}^{=kg} HT_a(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{1-k}{2}}.$$

*Remarque :* comme dans la remarque suivant le lemme B.3.3, ce résultat est à la portée de la formule des traces et permet d'éviter le recours aux arguments les plus complexes de [5] autour de la compatibilité à l'involution de Zelevinsky expliquée dans l'appendice de loc. cit. due à Laurent Fargues.

*Démonstration.* — Par symétrie il suffit de considérer le cas  $a = \overline{1}_1$ . On rappelle que d'après [5], l'image  $I_\pi$  du morphisme d'adjonction

$$\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi} \longrightarrow j_*^{-g} j^{=g,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}$$

admet une filtration  $\mathrm{Fil}^1(I_\pi) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^s(I_\pi)$  dont les gradués sont  $\mathrm{gr}^k(I_\pi) \simeq {}^p j_{!*}^{=kg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{1-k}{2}}$ .

**B.3.5. Lemme.** — Pour tout  $1 \leq r \leq s$ , le faisceau pervers  $i_{\overline{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_1}^{1,*} \mathrm{Fil}^r(I_\pi)$  admet une filtration similaire à celle de l'énoncé de la proposition précédente, i.e. dont les gradués sont les  ${}^p j_{\overline{1}_1,*}^{=kg} HT_{\overline{1}_1}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{k}{2}}$  pour  $1 \leq k \leq r$ .

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur  $r$  de 1 à  $s$ . Comme il est clair que

$$i_{\overline{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_1}^{1,*} ({}^p j_{!*}^{=rg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_r(\pi_v))) \simeq {}^p j_{\overline{1}_1,*}^{=rg} HT_{\overline{1}_1}(\pi_v, \mathrm{St}_r(\pi_v)),$$

il suffit de vérifier que

$$i_{\overline{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1,*} ({}^p j_{!*}^{=rg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{1-r}{2}}) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1,*} (\mathrm{Fil}^{r-1}(I_\pi)) \quad (\text{B.3.9})$$

est nulle. Or d'après l'hypothèse de récurrence tous les constituants irréductibles de  ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1,*} (\mathrm{Fil}^{r-1}(I_\pi))$  sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux sur des strates  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{=kg}$  pour  $1 \leq k \leq r-1$  alors que  ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1,*} ({}^p j_{!*}^{=rg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{1-r}{2}})$  est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq (r+1)g}$  de sorte que (B.3.9) est nécessairement nulle.  $\square$

On a ainsi une surjection de  $i_{\overline{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1}_1}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}$  vers le  $\mathrm{Fil}_{\overline{1}_1}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  de l'énoncé et comme dans la preuve du lemme B.3.3 il suffit de montrer que ces deux faisceaux pervers ont les mêmes germes en tout point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_1}^{\geq 1}$ . Considérons donc  $z$  un point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{=h}$ . D'après [5], la fibre en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie

$\mathcal{H}^i j_{1_{kg},*}^{-kg} HT_{1_{kg}}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  est nulle si  $(h, i)$  n'est pas de la forme  $(tg-d, tg-d+k-t)$  avec  $k \leq t \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  et sinon est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})) \otimes \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}}.$$

On en déduit alors que la fibre en  $z$  de  $j_{1_1,*}^{-kg} HT_{1_1}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}}\left(\pi_v, \left(\text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})\right)_{|P_{1,kg-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \})\right) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}},$$

où on induit de  $P_{1,kg-1}(F_v) \otimes GL_{(t-k)g}(F_v)$  à  $P_{1,tg-1}(F_v)$ . Par ailleurs, en regardant les poids, on voit que la suite spectrale calculant la fibre des faisceaux de cohomologie de  $\text{Fil}_{1_1}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  en fonction de ceux des  $\text{gr}_{1_1}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  dégénère en  $E_1$ . D'après A.1.7,

$$\left(\text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})\right)_{|P_{1,kg-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \simeq \left(LT_{\pi}(k, t-1-k)_{\pi_v}\right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)}$$

de sorte que d'après le résultat principal de [5], la fibre en  $z$  de  $\mathcal{H}^i(\text{Fil}_{1_1}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}))$  est isomorphe à celle de  $\mathcal{H}^i(p\mathcal{H}^0 i_{1_1,*}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* les mêmes arguments que précédemment appliqués à  $\text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  donnent

$$i_{a,*}^1 p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*}(\text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})) \simeq \text{Fil}_a^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}).$$

On en déduit alors que l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{1_1,!}^{-g} j_{1_1,*}^{g,*} \left( i_{1_1,*}^1 p\mathcal{H}^0 i_{1_1,*}^{1,*} \text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right) \longrightarrow i_{1_1,*}^1 p\mathcal{H}^0 i_{1_1,*}^{1,*} \text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$$

est  $j_{1_1,!}^{-g} HT(\pi_v, \pi_v)(\frac{1}{2})$ . Plus généralement les applications successives des morphismes d'adjonction

$$j_{1_1,!}^{-kg} j_{1_1,*}^{kg,*} \left( i_{1_1,*}^1 p\mathcal{H}^0 i_{1_1,*}^{k,*} \text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right) \longrightarrow i_{1_1,*}^1 p\mathcal{H}^0 i_{1_1,*}^{r,*} \left( \text{Fil}_{1_1}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right)$$

donnent pour images les  $j_{1_1,!}^{-kg} HT_{1_1}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  pour  $1 \leq k \leq r$ .

## Références

- [1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [2] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [3] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.

- [4] Cédric Bonnafé and Raphaël Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.
- [5] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [6] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [7] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne  $l$ -entière. *Duke Math. J.* 161 (6), pages 951–1010, 2012.
- [8] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo  $l$ . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [9] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [10] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes  $p$ -adiques*, number 223 in *Astérisque*, 1994.
- [11] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [12] M.-F. Vignéras. *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [13] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [14] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.