



**HAL**  
open science

# Application de la méthode des champs virtuels en grandes déformations pour identifier des paramètres matériaux à partir de mesures de champs cinématiques: principe et simulation

Nattawit Promma, Evelyne Toussaint, Xavier Balandraud, Michel Grediac

## ► To cite this version:

Nattawit Promma, Evelyne Toussaint, Xavier Balandraud, Michel Grediac. Application de la méthode des champs virtuels en grandes déformations pour identifier des paramètres matériaux à partir de mesures de champs cinématiques: principe et simulation. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01491494

**HAL Id: hal-01491494**

**<https://hal.science/hal-01491494v1>**

Submitted on 17 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Application de la méthode des champs virtuels en grandes déformations pour identifier des paramètres matériaux à partir de mesures de champs cinématiques: principe et simulation

**Nattawit PROMMA, Evelyne TOUSSAINT, Xavier BALANDRAUD et Michel GREDIAC**

*Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI-IFMA / UBP), Campus de Clermont-Ferrand - Les Cézeaux, BP 265, 63175 AUBIÈRE Cedex*

---

*RESUME. Ce papier traite de l'identification de paramètres de lois de comportement de matériaux hyperélastiques en grandes déformations à partir de la Méthode des Champs Virtuels (MCV). L'idée de base est d'exploiter des mesures de champs hétérogènes en surface d'échantillon, afin d'identifier tous les paramètres constitutifs à partir d'un seul essai. Cette méthode nécessite une stratégie de dépouillement des champs hétérogènes car aucun lien explicite n'existe entre mesures et sollicitation, contrairement aux champs de contraintes homogènes. Bien intégrée dans la communauté scientifique dans le cas des petites déformations, l'idée fondamentale de ce travail est d'appliquer cette méthode au cas des grandes déformations. L'approche est développée ici pour des matériaux hyperélastiques comme les élastomères afin de tester les performances de la méthode, l'idée étant de l'étendre ensuite à l'élastoplasticité en grandes déformations.*

*ABSTRACT. This present paper deals with the identification of constitutive parameters of a hyperelastic law from heterogeneous stress and strain fields using the Virtual Fields Method (VFM). The main idea consists in the exploitation of heterogeneous kinematic fields in order to directly identify all the constitutive parameters from only one test. The main drawback of such an approach is the fact that no direct link between displacement measurement data and unknown parameters is available in the general case. In this paper, the VFM is applied for the first time in the case of large deformations. The approach is developed here for a hyperelastic law in order to test the performances of this method, the idea will be then to test it in case of elastoplasticity in large deformations.*

*MOTS-CLES: Méthode des champs virtuels, grandes déformations, matériau hyperélastique, loi de Mooney Rivlin*

*KEYWORDS: Virtual Fields Method, large deformations, hyperelastic material, Mooney-Rivlin law*

---

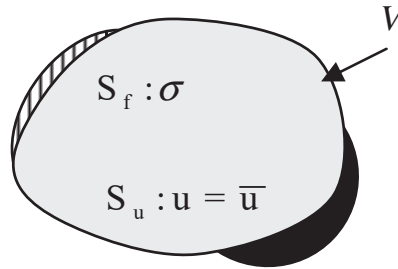
## 1. Introduction

Cet article traite de l'identification de paramètres matériaux hyperélastiques à partir d'une seule mesure de champ de déplacements hétérogène en surface d'échantillon. La Méthode des Champs Virtuels (MCV) (Grédiac *et al.*, 2002) sert de base à ce travail. Le principal avantage de la méthode réside dans la possibilité d'identifier un nombre important de paramètres matériaux à partir d'une seule mesure. Bien intégrée dans la communauté scientifique, la méthode est pour la première fois développée au cas des grandes déformations. La loi de Mooney-Rivlin sert de support au développement de la méthode. Des données d'entrée en déplacements sont simulées par Eléments Finis pour cette première approche. Elles permettent d'apprécier les performances de la méthode.

## 2. MCV en grandes déformations

### 2.1 Préambule

Dans cette section, la MCV en grandes déformations est présentée afin de déterminer les paramètres constitutifs d'une loi hyperélastique. On considère un volume  $V$  de surface  $S$  sur lequel un chargement mécanique extérieur est appliqué (Fig. 1). On considère  $S_u$  la partie de  $S$  sur laquelle le déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  est imposé et  $S_f$  celle où une densité surfacique d'effort  $\vec{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}}$  est connue.  $\vec{\mathbf{n}}$  est la normale sortante extérieure à la surface.



**Figure 1** Modèle mécanique (cas général)

### 2.2 PTV avec grandes déformations

En statique et en l'absence de forces volumiques extérieures, le principe des travaux virtuels en grandes déformations s'écrit en configuration Eulérienne :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \vec{\mathbf{U}}^*}{\partial \vec{\mathbf{x}}} dV = \int_{S_f} \vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{U}}^* dS \quad \forall \vec{\mathbf{U}}^* \text{ cinématiquement admissible} \quad [1]$$

où  $\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial \vec{x}}$  est la dérivée des déplacements virtuels sur la configuration déformée,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Le cas d'un état plan de contraintes est développé dans la présente approche et l'équation [1] devient :

$$\int_S \sigma_{11} \frac{\partial U_1^*}{\partial x_1} dS + \int_S \sigma_{22} \frac{\partial U_2^*}{\partial x_2} dS + \int_S \sigma_{12} \left( \frac{\partial U_2^*}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1^*}{\partial x_2} \right) dS = \frac{1}{e} \int_{S_f} T \cdot U^* dS \quad [2]$$

La loi de comportement reliant contrainte et déformation est supposée connue. Elle fait intervenir les paramètres matériaux à identifier. Contrairement à une approche linéaire, les paramètres sont identifiés à partir d'une fonction coût qui doit être minimisée.

### 2.3 Fonction coût

En notant  $C_1, C_2, \dots, C_N$  les paramètres de la loi de comportement, on définit la fonction coût  $f(C_1, C_2, \dots, C_N)$  comme suit

$$f(C_1, C_2, \dots, C_N) = \left\{ \left( \int_V \sigma : \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial \vec{x}} dV \right) - \int_{S_f} \vec{T} \cdot \vec{U}^* dS \right\}^2 \quad [3]$$

Cette fonction doit être minimisée pour identifier les paramètres. Pratiquement, plusieurs champs virtuels sont choisis arbitrairement et leur influence sur les résultats est testée.

## 3. Loi de Mooney-Rivlin

### 3.1 Équations constitutives

Dans ce travail, une loi hyperélastique de type Mooney-Rivlin est choisie. D'une façon générale, les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation  $W$  dépendant uniquement de l'état de déformation courant  $F$  et dont dérivent les contraintes de Cauchy :

$$\sigma = -pI + 2B \frac{\partial W}{\partial B} \quad [4]$$

où  $p$  est pression hydrostatique qui joue le rôle de multiplication de Lagrange pour tenir compte de l'incompressibilité du matériau,  $B$  est le tenseur de Cauchy-Green gauche. Dans les directions principales de  $\sigma$ , la relation [4] devient

$$\sigma_i = 2 \left( \lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - p \quad [5]$$

où les  $\lambda_i$  sont les extensions principales et  $I_1$  et  $I_2$  les deux premiers invariants de  $\mathbf{B}$ . En contraintes planes ( $\sigma_3 = 0$ ), la différence  $\sigma_i - \sigma_3$  (pour  $i = 1$  et  $2$ ) permet d'éliminer  $p$  (Marckmann, 2004) et l'équation [5] devient :

$$\sigma_i = 2 \left[ (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad [6]$$

### 3.2 Energie de déformation (W)

Pour des matériaux hyperélastiques incompressibles ou presque incompressibles, le modèle de Mooney-Rivlin prend la forme polynomiale suivante (Mooney, 1940):

$$W = \sum_{i+j=n}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad [7]$$

où les  $C_{ij}$  sont les paramètres matériaux qui sont ici les paramètres à déterminer.

Dans cet article, deux paramètres de Mooney-Rivlin sont choisis pour la simulation d'un champ de déplacements ( $C_1 = 0,293$  MPa et  $C_2 = 0,177$  MPa) (Ansys, 2004). Ces valeurs servent de référence et l'objectif est de les retrouver à partir de points de mesure donnés ici par ANSYS. L'énergie  $W$  correspond au modèle de Mooney-Rivlin bien adapté au caoutchouc naturel pour des déformations modérées (inférieures à 300%).

## 4. Application

### 4.1 Modèle numérique

L'objectif dans cette section est d'examiner l'efficacité du procédé décrit ci-dessus pour identifier des paramètres constitutifs. Seules des mesures simulées par le code ANSYS sont ici considérées. Pour ce test purement numérique, le modèle géométrique est un rectangle de longueur  $l_0 = 100$  mm et largeur  $h_0 = 50$  mm et d'épaisseur unité. Le modèle avec 2 paramètres de Mooney-Rivlin est employé. Une force linéairement distribuée est imposée à tous les noeuds suivant la ligne située sur le bord droit. Le maillage est établi avec l'élément bidimensionnel à 8 noeuds (plane183) en état de contraintes planes. Le modèle possède 3200 éléments (voir Figure 2). Le déplacement maximum est de 203 millimètres le long de x (ou i).

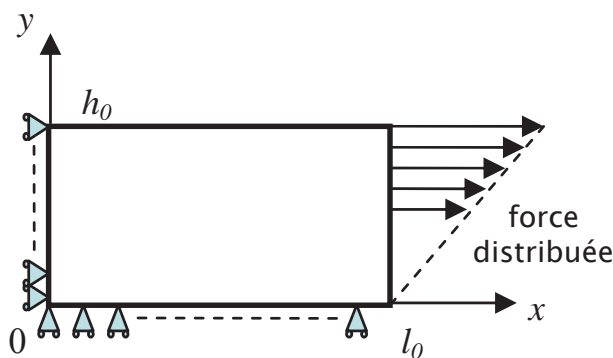
#### 4.2 Fonction coût, influence des champs virtuels

L'influence du choix du champ virtuel sur la fonction coût est examinée dans cette section par l'intermédiaire de deux champs de déplacements virtuels arbitraires définis par les équations 8 et 9.

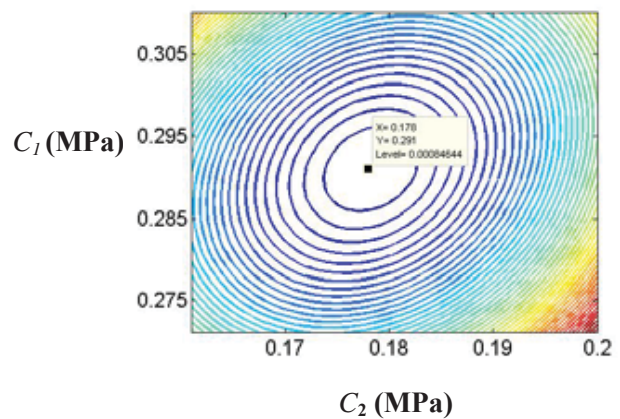
$$U_x^{*(1)} = 0, \quad U_x^{*(2)} = \sin\left(\frac{2\pi x}{3L}\right) \quad [8]$$

$$U_y^{*(1)} = \frac{xy}{2L}, \quad U_y^{*(2)} = 0 \quad [9]$$

Dans chaque cas la fonction coût associée présente la forme d'une vallée dans l'espace  $(C_1, C_2)$ . Par conséquent aucun minimum global n'est atteint. Cependant ces vallées présentent des orientations différentes d'un champ virtuel à un autre. Par conséquent, l'idée est de combiner les deux fonctions coût précédentes en les ajoutant. La carte de fonction coût finale est présentée sur la Fig. 3. Cette nappe est obtenue en calculant la fonction coût lorsque  $C_1$  et  $C_2$  décrivent un intervalle choisi autour des valeurs de référence. Les valeurs des paramètres constitutifs correspondant au minimum de la fonction coût sont présentées dans le Tableau 1.



**Figure 2** *Modèle mécanique (configuration étudiée)*



**Figure 3** *Carte de fonction coût finale*

#### 4.3 Identification avec fminsearch

Une autre façon de caractériser les paramètres matériaux est d'utiliser la fonction de minimisation fminsearch disponible dans Matlab. Le point de départ  $(C_1, C_2)$  est ici (1 MPa, 1 MPa). Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 1.

Tableau 1 Comparaison des paramètres

	$C_1$ MPa	$C_2$ MPa
Référence	0.293	0.177
Fonction coût finale	0.291	0.178
écart (%)	-0.68 %	0.56 %
Identifié par <i>fminsearch</i>	0.2910	0.1782
écart (%)	-0.68 %	0.67 %

## 5. Conclusion

Ce papier présente la première application de la MCV au cas des grandes déformations en utilisant une loi matérielle hyperélastique. Dans un premier temps, une loi simple de Mooney-Rivlin avec 2 paramètres est considérée. Les données numériques servent de donnée d'entrée et illustrent la performance de cette méthode. Dans une prochaine étape, un bruit simulé sera ajouté puis l'identification sera effectuée sur des données expérimentales obtenues sur des échantillons de formes différentes et pour des modèles de lois de comportement présentant davantage de paramètres.

## Remerciements

Ce projet est soutenu par le Ministère de la Recherche du gouvernement Français dans le cadre du projet ANR n° 0327-03 qui implique le LaMI-IFMA/UBP de Clermont-Ferrand, le LMT-ENS de Cachan et le LMPF-ENSAM de Châlons-en-Champagne.

## Référence

Ansys, Inc., Hyperelasticity, Ansys Release 9.0 Documentation, 2004.

Grédiac, M., Toussaint, E., Pierron, F., « Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1 - Principle and definition », International Journal of Solids and Structures, 39 (10), 2002, 2691–2705.

Marckmann, G., Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.

Mooney, M., « A theory of large elastic deformation », J. Appl. Phys., Vol. 11, 1940, 582 – 592.