HAL open science

Méthode de réduction de modèles pour des structures élancées

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin

To cite this version:

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin. Méthode de réduction de modèles pour des structures élancées. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01490604

HAL Id: hal-01490604

https://hal.science/hal-01490604v1

Submitted on 15 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Méthode de réduction de modèles pour des structures élancées - Prise en compte des effets de bords

Stéphane Lejeunes — Adnane Boukamel — Bruno Cochelin

Ecole Centrale de Marseille
IMT/Technopôle Chateau-Gombert, 13451 Marseille Cedex 20

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille
31 chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille cedex 20

stephane.lejeunes@ec-marseille.fr

RÉSUMÉ. *La méthode de réduction de modèle développée lors de la thèse de S. Lejeunes (Lejeunes, 2006) et présentée lors de l'édition 2005 du Colloque National en Calcul des Structures (Lejeunes* et al., *2005) peut être utilisée pour modéliser des structures lamifiées élastomère-métal ou des structures élancés à section composite (mais invariantes dans la direction d'élancement). Elle permet d'obtenir des gains importants en terme de temps de calcul ou de taille de modèle variant de 5 à 50. Cependant cette méthode, qui utilise une projection polynomiale des inconnues, nécessite un degré d'interpolation élevé pour pouvoir traduire les effets de bords. Nous proposons à travers cette communication, l'exploration d'une méthode permettant de mieux capter ces effets de bords sans pour autant augmenter l'ordre de la base polynomiale.*

ABSTRACT. *The model reduction method developed in (Lejeunes, 2006) and presented during the previous edition of the "Colloque National en Calcul des Structures" (Lejeunes* et al., *2005), has been shown to be efficient to compute laminated rubber bearing or beam like structures. This method leads to important cpu gain time or memory gain: from 5 to 50. However, a polynomial projection of the unknowns is used and the boundary effects are accurate if and only if the polynomial order is high. We propose in this paper a new approximation of the unknowns in the view to diminish the degree of freedoms needed to take into account of the boundary effects.*

MOTS-CLÉS : *réduction de modèle, hyperélasticité, éléments-finis, fonctions exponentiels.*

KEYWORDS: *model reduction, hyperelasticity, finite-element, exponential funtions.*

1. Introduction

Les composites à matrice élastomérique sont de nos jours couramment employées dans de nombreux secteurs industriels et plus particulièrement dans celui des transports (lamifiés élastomère-métal ou bras de liaison élancé). Néanmoins, la prévision du comportement des ces pièces, peut poser des problèmes à l'ingénieur, de part la complexité du modèle élément-fini nécessaire. En particulier, l'élancement de certaines structures conduit à une taille de modèle prohibitive. Nous avons donc développé des éléments finis spécifiques permettant d'effectuer des réductions de modèles en tirant parti de l'invariance matérielle et géométrique de ces structures dans au moins une directions. Cette méthode peut être vu comme une extension de la méthode des «finite strip» développée par Cheung dans les années 70 pour la modélisation de plaque élastique et étendue depuis à d'autres domaines (voir (Cheung *et al.,* 1995b, Cheung *et al.,* 1995a)). L'idée principale consistant à projeter les inconnues[1] sur une base de fonctions dans la (ou les) direction d'élancement, on peut ainsi condenser une (ou plusieurs) direction géométrique dans l'élément-fini.

Lorsque l'on considère une base de fonction polynomiale, la prise en compte des effets de bords est correctement obtenue uniquement à partir d'un ordre polynomial de projection élevé. Ainsi, le gain en terme de taille de modèle peut être très important si l'on s'intéresse uniquement au comportement global ou si le niveau de sollicitation est faible mais il devient plus réduit lorsque l'on souhaite également obtenir un bon comportement local. Pour résoudre ce problème nous avons envisagé deux voix d'amélioration. La première pourrait consister à coupler les éléments-finis réduits avec des éléments-finis standards. On peut ainsi imaginer mailler finement les bords de la structure avec des éléments tridimensionnels et traduire le comportement dans le reste de la structure avec des éléments-finis réduits d'ordres faibles. La liaison entre ces deux modèles devant se traduire en terme de continuité des variables déplacement, ce qui impose la prise en compte de relations linéaires entre les degrés de libertés des deux modèles. Ce type d'approche est utilisé dans d'autres méthodes comme la méthode Arlequin (Ben Dhia, 1998). La seconde voix est celle que nous proposons d'explorer dans ce papier, il s'agit d'enrichir la base de projection avec des fonctions exponentielles de manière a mieux capturer les effets locaux tout en gardant un comportement global cohérent. Des travaux ont déjà été réalisés en ce sens par (LaZghab *et al.,* 2002) pour la modélisation de l'extrusion de profilés en aluminium.

2. Formulation variationnelle en hyperélasticité quasi-incompressible

En désignant par $\mathbf{F}$, le tenseur gradient décrivant le mouvement local et en notant $J = \det\mathbf{F}$, la transformation peut être décomposée en une partie compressible $J^{1/3}\mathbf{I}$ et une partie incompressible $\overline{\mathbf{F}}$, soit : $\mathbf{F} = (J^{1/3})\overline{\mathbf{F}}$. L'énergie de déformation est alors décomposée en une partie isochore et une partie volumique.

1. champs de déplacement et pression dans le cas de l'hyperélasticité incompressible ou faiblement compressible

En considérant J comme une variable indépendante, la résolution du problème d'équilibre hyperélastique peut se ramener au problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}, J) = \int_{\Omega_0} \left(\widetilde{\psi}_{iso} \left(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v}) \right) + \widetilde{\psi}_{vol}(J) \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \qquad [1]$$

Or, en utilisant la loi de compressibilité $p = kG(J)$, ou k est le module de compressibilité du matériau, et en utilisant une transformation de Legendre, on peut obtenir le problème dual suivant : trouver le point selle de la fonctionnelle en Lagrangien perturbé (Malkus *et al.*, 1978, Chen *et al.*, 1997) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega_0} \left(\widetilde{\psi}_{iso} \left(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v}) \right) - qG(J(\mathbf{v})) + \widetilde{\psi}^*_{vol}(q) \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \qquad [2]$$

Avec $\widetilde{\psi}^*_{vol}(q) = (1/2k)q^2$ et $G(J) = J - 1$.

3. Élément-fini réduit 3D-2D

Pour une structure de type poutre ou plaque, élancée dans la direction Z, l'idée de départ consiste à projeter les champs de déplacement et de pression sur une base polynomiale $T(Z)$. Après avoir paramétré la direction Z ($\xi = 2Z/L$ si L est la longueur totale de la structure) on peut approximer le déplacement et la pression par :

$$\mathbf{u}(X, Y, Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(X, Y) T_i(\xi), \qquad p(X, Y, Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} p^i(X, Y) T_i(\xi) \qquad [3]$$

Les variables n_u et n_p représentant les ordres de troncature de l'approximation en déplacement et en pression. Ces ordres doivent être choisi en fonction de la précision désirée et en prenant garde à la stabilité numérique de l'élément-fini associé.
L'approximation élément-fini ne concerne ensuite que les champs projetés : $\mathbf{u}^i(X, Y)$ et $p^i(X, Y)$ si bien qu'une direction géométrique a été condensée[2] (voir la représentation schématique de la figure 1). On obtient donc :

$$\mathbf{u}(X, Y, Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(X, Y) \mathbf{u}_j^i, \quad p(X, Y) \approx \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{l_p} N_p^j(X, Y) p_j^i \qquad [4]$$

N_u^j et N_p^j étant les polynômes classiques d'approximation éléments-finis de Lagrange.

La base de projection est constituée de polynômes de Lagrange d'ordre 1 (permettant d'imposer directement les conditions cinématiques de type translations et/ou ro-

2. En fait seule la section de la structure est maillée par éléments-finis, sous réserve que la structure soit invariante géométriquement et matériellement dans la direction d'élancement.

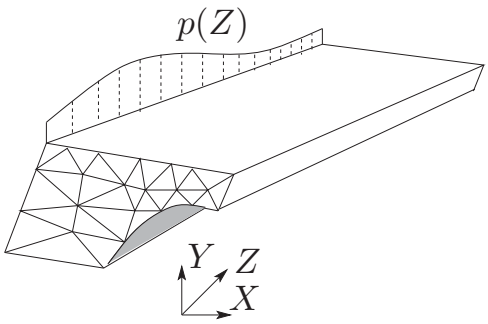


Figure 1. *Réduction 3D-2D*

tations), enrichis par des fonctions bulles, constituant une correction dans la direction condensée. Soit de façon formelle, en utilisant les polynômes de Legendre $L_n(\xi)$:

$$T_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad T_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad T_n(\xi) = \frac{L_n(\xi) - L_{n-2}(\xi)}{\sqrt{2(2i-1)}} \qquad [5]$$

Ainsi, les degrés libertés pour les noeuds de déplacement sont les composantes $\mathbf{u}_j^i$, les composantes p_j^i de la pression constituent les ddls des noeuds de pression. Dans ce travail nous utilisons des éléments-finis réduits quadratique en déplacement et linéaire en pression (Q9P3).

4. Prise en compte des effets de bords

Pour mieux prendre en compte les effets de bords dus aussi bien aux non-linéarités géométriques et matérielles ainsi qu'à la quasi-incompressibilité, nous proposons d'enrichir l'approximation [3] de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(X,Y,Z) &\approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(X,Y)T_i(\xi) + \mathbf{u}^g(X,Y)T_g(\xi) + \mathbf{u}^d(X,Y)T_d(\xi) \\ p(X,Y,Z) &\approx \sum_{i=0}^{n_p} p^i(X,Y)T_i(\xi) + p^g(X,Y)T_g(\xi) + p^d(X,Y)T_d(\xi) \end{aligned} \qquad [6]$$

avec :

$$T_g(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)\exp(-a(1+\xi)), \quad T_d(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)\exp(-a(1-\xi)) \qquad [7]$$

Les fonctions d'enrichissements aux bords ont été construites de manière à être nulles sur les bords ($\xi = -1$ ou 1, voir figure 2) afin que l'écriture de conditions aux limites homogènes en $\xi = -1$ ou 1 ne fasse pas intervenir les degrés de libertés $\mathbf{u}^g$ ou $\mathbf{u}^d$. Le paramètre a n'est pour l'instant pas traité comme un degré de liberté, il est fixé à priori au début du calcul et peut être vu comme étant inversement proportionnel à la longueur caractéristique de la zone d'influence des effets de bords.

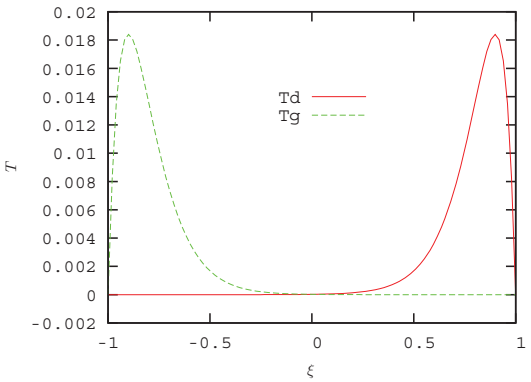


Figure 2. *Fonctions T_g et T_d pour $a = 10$*

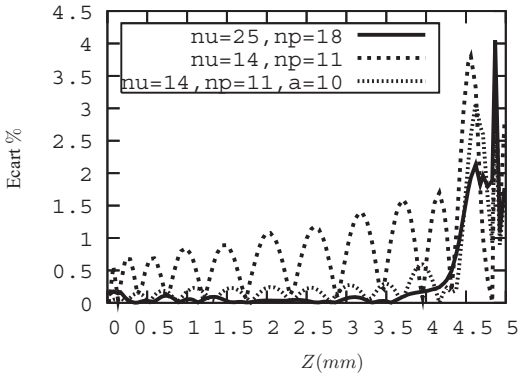


Figure 3. *Ecart sur la contrainte Π_{ZZ} le long de la direction Z de modèles réduits par rapport à un modèle 3D*

5. Application

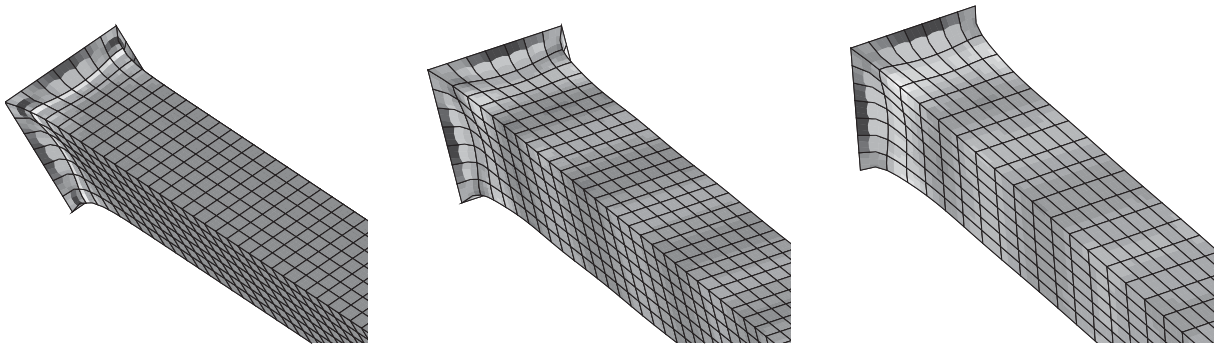
A titre d'application, nous présentons l'exemple de la traction d'une poutre en élastomère à section carré de 1 mm de coté pour 10 mm de longueur (seule la moitié est modélisée). L'élastomère est représenté par un modèle de (James *et al.*, 1975) à 5 termes avec $a_{10} = 0.2535$ Mpa, $a_{01} = -0.06$ Mpa, $a_{11} = 0.0019$ Mpa, $a_{02} = 0.0001$ Mpa, $a_{20} = 0.0126$ Mpa son module de compressibilité est de $k = 5000$ Mpa.

modèle	Nb dof
$n_u = 14, n_p = 11$	9 450
$n_u = 25, n_p = 18$	16 875
$n_u = 14, n_p = 11, a = 10$	10 800
standard (3D)	90 450

Le modèle de référence (3D) est constitué d'éléments de type H27P4, le modèle réduit comporte des éléments finis de type Q9P3. La figure 3 présentent l'écart relatif obtenu sur la contrainte Π_{ZZ} des différents modèles réduits par rapport au modèle de référence. On peut observer le gain significatif apporté par la corection des effets de bords. La figure 4 illustre également la diminution de l'effet d'oscillation de la solution avec un modèle réduit lorsque l'on ajoute cette corection.

6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce papier une extension de la technique de réduction de modèles, adaptée à la modélisation non-linéaire de structures élancés. L'ajout de fonctions en exponentiels dans la base d'approximation permet de diminuer de manière significative l'ordre nécessaire et ainsi le nombre de degré de liberté pour traduire des



(a) Modèle standard (3D)

(b) Modèle réduit ($n_u = 14$, $n_p = 11$)

(c) Modèle réduit ($n_u = 14$, $n_p = 11$,$a = 10$)

Figure 4. *Contrainte de Von-Mises.*

effets locaux. Une étude précise de l'influence du paramètre puissance de l'exponentiel (a) reste encore à mener, l'enjeu à terme étant de pouvoir traiter ce paramètre comme un degré de liberté du problème mécanique.

7. Bibliographie

Ben Dhia H., « Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 326, p. 899-904, 1998.

Chen J. S., Han W., Wu C. T., Duan W., « On the perturbed Lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, p. 335-351, 1997.

Cheung Y., Au F., « Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerate Shells », *Thin-Walled Structures*, vol. 21, p. 65-92, 1995a.

Cheung Y., Kong J., « The application of a new finite strip to the free vibration of rectangular plates of varying complexity », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 181, p. 341-353, 1995b.

James A., Green A., Simpson G., « Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates », *Jounal of Applied Polymer Science*, vol. 19, p. 2033-2058, 1975.

LaZghab S. Aukrust T., Holthe K., « Adaptive exponential finite elements for the shear boundary layer in the bearing channel during extrusion », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 191, p. 1113-1128, 2002.

Lejeunes S., Modélisation de structure lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2006.

Lejeunes S., Boukamel A., Cochelin B., « Méthode de réduction de modéles, application à l'étude de stabilité d'un lamifié élastomére-métal », *Actes du septième colloque national en calcul des structures*, vol. II, Giens, p. 259-265, mai, 2005.

Malkus D., Hughes T., « Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques : a unification of concepts », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 15, p. 63-81, 1978.