



HAL
open science

Sur la réductibilité des graphes de contraintes géométriques

Samy Ait Aoudia, Dominique Michelucci, Adel Moussaoui

► **To cite this version:**

Samy Ait Aoudia, Dominique Michelucci, Adel Moussaoui. Sur la réductibilité des graphes de contraintes géométriques. 2017. hal-01489986v2

HAL Id: hal-01489986

<https://hal.science/hal-01489986v2>

Preprint submitted on 25 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la réductibilité des graphes de contraintes géométriques

Samy Ait-Aoudia¹, Dominique Michelucci², Adel Moussaoui¹

¹ESI – Ecole nationale Supérieure en Informatique (ex INI), Oued-Smar, Alger, Algérie

s_ait_aoudia@esi.dz, a_moussaoui@esi.dz

²Laboratoire LE2I, Université de Bourgogne, Dijon, France

dominique.michelucci@u-bourgogne.fr

Résumé.

La modélisation géométrique par contraintes dont les applications intéressent des communautés issues de divers domaines tels l'ingénierie mécanique, la conception assistée par ordinateur, le calcul symbolique ou la chimie moléculaire est maintenant intégré dans les outils standards de modélisation. Dans cette discipline une forme géométrique est spécifiée par les relations que doivent vérifier les composants de cette forme au lieu de spécifier explicitement ces composants. Le but de la résolution est de déduire la forme répondant à toutes ces contraintes. Diverses méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème. Nous nous intéresserons spécifiquement aux méthodes dites graphiques ou basées-graphes avec application à l'espace bidimensionnel.

I. INTRODUCTION

La modélisation géométrique par contraintes permet aux utilisateurs de spécifier des objets géométriques tels que des points, droites et cercles par des relations dites contraintes que doivent respecter ces objets. Des contraintes types sont données par : distance en deux points, angle entre deux droites, appartenance d'un point à une droite, tangence entre deux cercles. Sur la base de ces spécifications et avec une modélisation appropriée, un solveur de contraintes procède à l'analyse du problème et à la production d'un procédé de construction dans le cas de problèmes bien posés. Le terme bien posé désigne les configurations ayant exactement le nombre de contraintes requis à leurs définitions et qui peuvent être résolues par ce solveur. Après le solveur proposé par Owen (1991), le domaine a connu un foisonnement de travaux utilisant différentes approches pour résoudre un système de contraintes. Nous citons à titre non exhaustif (Ait-Aoudia, Jegou, & Michelucci, 1993) (Bouma, Fudos, Hoffmann, & Paige, 1995), (Latham & Middleditch, 1996), (Lamure & Michelucci, 1995), (Fudos & Hoffman, 1997), (Hoffman, Andrew, & Meera, 2001), (Michelucci & Foufou, 2004) (Owen & Power, 2007), (Ait-Aoudia & Foufou, 2010), (Cheng, Ni, & Liu, 2014), (Gao, Zhang, & Lu, 2015), .

Dans les méthodes basées-graphes, la forme géométrique à trouver est modélisé par un graphe non orienté $G = (V, E)$ où $|V| = n$ et $|E| = m$. Les éléments géométriques (i.e. l'ensemble V) sont représentés par les nœuds du graphe et les contraintes (relations que doivent vérifier les objets) sont les arêtes du graphe (l'ensemble E). La classe de configurations résolues par ces méthodes est typiquement un sous-ensemble des problèmes constructibles à la règle et au compas en supposant que les valeurs des contraintes sont elles-mêmes constructibles à la règle et au compas. Un exemple de modélisation est donné par la forme géométrique donnée à la figure 1 et son graphe

correspondant montré à la figure 2 (Moussaoui & Ait-Aoudia, 2016). La dénomination basée graphe utilisée dans cet article désignera les méthodes modélisant ainsi un problème de contraintes.

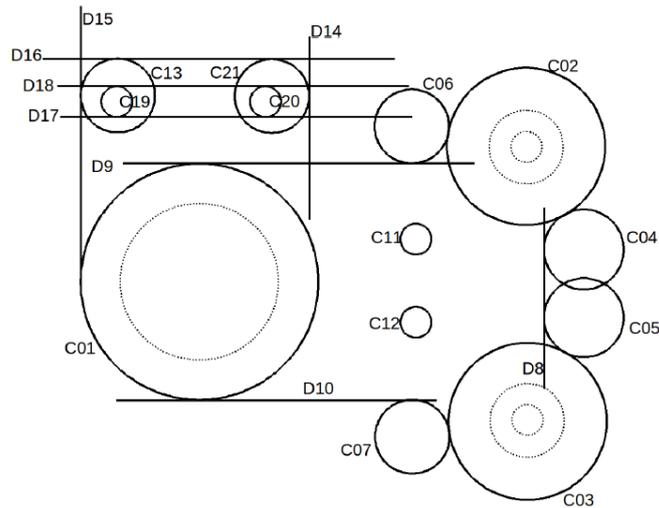


Figure 1. Une forme géométrique 2D avec contraintes.

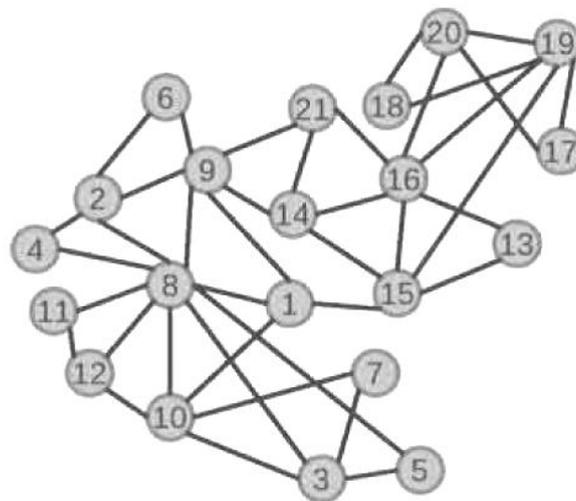


Figure 2. Graphe des contraintes.

Les méthodes basées graphes pour résoudre des problèmes de contraintes géométriques opèrent globalement en deux phases : une phase d'analyse et une phase de construction effective. Ces méthodes sont également appelées méthodes par décompositions-recombinaisons (le terme anglais usité est *decomposition-recombination methods*).

Durant la première phase, le graphe des contraintes est parcouru pour tenter de le décomposer en petits sous-problèmes. Une séquence de construction en est dérivée. Durant la seconde phase, les sous problèmes sont résolus et une combinaison des solutions est effectuée pour aboutir à la figure solution.

Les algorithmes de résolution exploitent les propriétés structurelles du graphe de contraintes pour établir un processus de résolution. Ces algorithmes identifient dans ce graphe, les sous-graphes bien contraints, sous-contraints et sur-contraints. Un graphe est bien contraint si le nombre de

contraintes est tel qu'il permet d'avoir des réalisations finies de la forme géométrique. Un graphe est sous-contraint si le nombre de contraintes est insuffisant i.e. on peut avoir une infinité de réalisations de la forme géométrique. Un graphe est sur-contraint si les contraintes sont données en excès i.e. on ne peut avoir de réalisation de la forme géométrique. Le théorème de Laman (1970), énoncé ci-après, donne une définition plus concise de ces aspects.

Théorème 1.

Un graphe de contraintes $G=(V,E)$ où $|V|=n$ et $|E|=m$ est structurellement bien contraint si et seulement si $m=2*n-3$ et $m' \leq 2*n'-3$ pour tout sous-graphe induit $G'=(V',E')$ où $|V'|=n'$ et $|E'|=m'$.

Théorème 2.

Un graphe de contraintes $G=(V,E)$ contient une partie structurellement sur-contrainte s'il existe un sous-graphe induit $G'=(V',E')$ ayant plus de $2*n'-3$ arêtes.

Théorème 3.

Un graphe de contraintes $G=(V,E)$ is est structurellement sous-contraint s'il n'est pas sur-contraint et le nombre d'arêtes est inférieur à $2*n-3$.

Le théorème de Laman considère des points dans l'espace euclidien ayant deux degré de liberté et des contraintes de distances entre points. Les droites et les cercles n'étaient pas considérés par ce théorème. Il est à noter que le cercle de rayon connu a 2 degrés de liberté tandis que le cercle de rayon inconnu a trois degrés de liberté. Une généralisation de ce théorème pour considérer les objets points, droites et cercles est donnée ci-après.

Théorème 4.

Un graphe de contraintes $G=(V,E)$ où $|V|=n, |E|=m, n=n_{-2}+n_{-3}, n_{-2}$ nombre d'entités à 2 degrés de liberté et n_{-3} nombre d'entités à 3 degrés de liberté est structurellement bien contraint si et seulement si $m=2*n_{-2}+3*n_{-3}-3$ et $m' \leq 2*n'_{-2}+3*n'_{-3}-3$ pour tout sous-graphe induit $G'=(V',E')$ où $|V'|=n', |E'|=m', n'=n'_{-2}+n'_{-3}, n'_{-2}$ nombre d'entités à 2 degrés de liberté et n'_{-3} nombre d'entités à 3 degrés de liberté.

Remarque 1.

Dans certains cas particuliers, l'extension du théorème de Laman peut induire des diagnostics incorrects. Un exemple type d'un tel cas (Ait-Aoudia & Fougou, 2010) est donné par un triangle contraint avec trois angles. Dans la figure 3.a, un triangle est défini avec trois contraintes d'angles (avec $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$). Ce triangle est géométriquement sous-contraint mais son graphe de contraintes, montrée à la figure 3.b, est bien contraint. Il est à souligné que ce cas sera tout de même détecté durant la phase de construction.

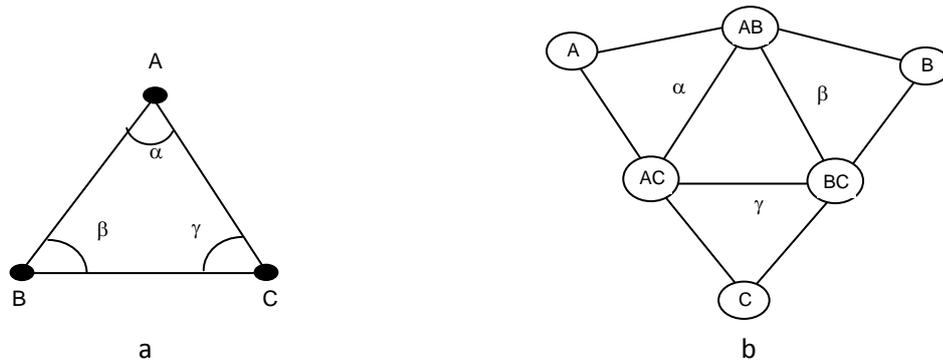


Figure 3. Une figure sous-contrainte (a), et son graphe de contraintes (b).

Remarque 2.

L'approche constructive basée graphe utilise seulement les propriétés structurelles du graphe des contraintes et ne prend pas en compte les informations numériques. Un graphe des contraintes peut être structurellement bien-contraint mais numériquement sous-contraint ou sans solutions. Un exemple d'esquisse géométrique numériquement sous-contrainte est montré à la figure 4.a (les valeurs indiquent des mesures de distances). Son graphe de contraintes correspondant montré à la figure 4.b est structurellement bien contraint car vérifiant la condition de Laman (1970). Les valeurs des contraintes peuvent mener à des graphes sans solution numérique. L'intersection de deux cercles, pour la construction d'un nouveau point, peut être vide. Ces cas, seront néanmoins détectés durant la phase de construction.

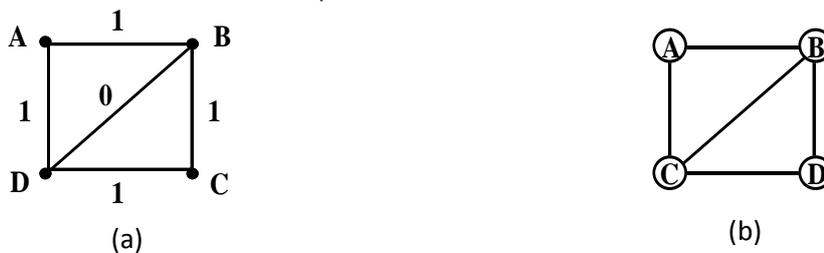


Figure 4. Une figure numériquement sous-contrainte (a) et son graphe de contraintes (b)

II. CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Les solveurs basés graphes sont souvent liés, par leurs développeurs, aux constructions à la règle et au compas. En effet ces constructions sont au cœur de divers domaines d'application. Historiquement ces constructions sont centrales dans les éléments d'Euclide. D'ailleurs la géométrie euclidienne est souvent considérée comme la géométrie "de la règle et du compas". Les droites et les cercles étaient considérés par les mathématiciens grecs comme figures idéales. Plusieurs problèmes en géométrie furent énoncés pour savoir s'ils étaient constructibles à la règle et au compas. Certains problèmes ont résisté deux millénaires pour avoir une réponse négative comme la quadrature du cercle, la duplication du cube, le polygone régulier à 7 cotés ou la trisection d'un angle.

Les constructions à la règle et au compas peuvent être obtenus par le procédé suivant : partant d'un ensemble de points de base noté B, on utilise deux constructions élémentaires pour construire de nouveaux points. Les deux constructions de base sont :

- Tracer à la règle, la droite passant par deux points de B
- Tracer au compas le cercle ayant pour centre un point de B et pour rayon la distance entre deux points de B.

Les points d'intersection des droites et des cercles nouvellement tracés sont ajoutés à la base de points B. Ce processus peut être réitéré à l'infini. Ce procédé de construction est formalisé par la définition de Carrega (2001) donnée ci-après :

Définition :

Soit P un plan euclidien et B un sous-ensemble fini de P ayant au moins deux éléments. Les éléments de B sont appelés points de base.

- Un point M de P est dit constructible à la règle et au compas à partir de B s'il existe une suite finie de points de P, M_1, M_2, \dots, M_n se terminant par M telle que pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, M_i est un point d'intersection :
 - soit de deux droites
 - soit d'une droite et d'un cercle
 - soit de deux cercles
 ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = B \cup \{ M_1, M_2, \dots, M_n \}$ de la façon suivante :
 - chaque droite passe par deux points distincts de E_i
 - chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre deux points de E_i .
- Une droite passant par deux points constructible est dite constructible.
- Un cercle centré en un point constructible et ayant pour rayon la distance entre deux points constructibles est dit constructible.

Tracer de nouveaux points à la règle et au compas revient à résoudre des équations algébriques linéaires ou de degré 2. En effet, intersecter deux droites revient à résoudre une équation linéaire et intersecter une droite et un cercle ou intersecter deux cercles revient à résoudre une équation algébrique de degré 2.

Pour caractériser algébriquement les constructions à la règle et au compas, considérons le plan euclidien P, avec pour origine le point O de coordonnées (0,0) et un deuxième point I (1,0) sur l'axe des abscisses. Ces deux points constituent la base de départ pour toute construction à la règle et au compas. Les problèmes de construction sont ramenés à des problèmes algébriques. Nous rappelons ci-après quelques définitions et théorèmes.

Définition 1. Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est dit constructible si le point de coordonnées (x; 0) sur l'axe des abscisses est constructible à la règle et au compas.

Définition 2. Un point $P \in P$ de coordonnées (x; y) est constructible à la règle et au compas si et seulement si ses deux coordonnées $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels constructibles.

Théorème de Wantzel. Un nombre réel x est constructible si et seulement si il existe des extensions quadratiques $(K_0 = \mathbb{Q}) \subset K_1 \subset \dots \subset K_c$ telles que $x \in K_c$. Chacune des extensions de corps est

quadratique i.e. $[K_{i+1} : K_i] = 2$. Autrement dit, chaque extension est une extension quadratique de la précédente : $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_i})$ pour un certain $d_i \in K_i$.

Corollaire du théorème de Wantzel. Tout nombre réel constructible est un nombre algébrique sur \mathbb{Q} dont le degré algébrique est de la forme 2^n , $n \geq 0$.

III. RÉSOLUTION

Le principe général de résolution des méthodes basées graphes est de trouver un processus de construction incrémentale de la figure géométrique en utilisant à chaque étape un dessin à la règle et au compas. Diverses techniques ont été proposées pour arriver à ce but.

Les méthodes basées graphes de résolution de problèmes géométriques contraints peuvent être divisées en deux grandes catégories à savoir les méthodes descendantes (Top-Down est la dénomination anglaise usitée) et les méthodes ascendantes (Bottom-Up pour la dénomination anglaise).

Les méthodes descendantes procèdent par une décomposition récursive du graphe de contraintes initial jusqu'à aboutir à des graphes dits élémentaires (solubles en une étape) dont la résolution est triviale. Le processus de construction effective procède dans le sens inverse du processus de décomposition.

Les méthodes ascendantes identifient les graphes élémentaires et procèdent par des groupements successifs par des règles élémentaires jusqu'à obtenir recouvrir le graphe initial. En fixant par exemple deux entités géométriques dans l'espace 2D, on procède par ajout successifs d'entités se rattachant à la figure fixée par un nombre d'arêtes équivalent à leur degré de liberté.

A titre d'exemple, la figure 6 illustre la décomposition du graphe de contrainte de la figure 5.b correspondant à la figure 5.a par la méthode décrite par Ait-Aoudia et al. (1999). Des graphes triangulés dits clusters sont obtenus lors de la première phase (figure 6.a). Des arêtes dites virtuelles déduites des clusters sont ajoutées pour pouvoir assembler la figure solution (figure 6.b).

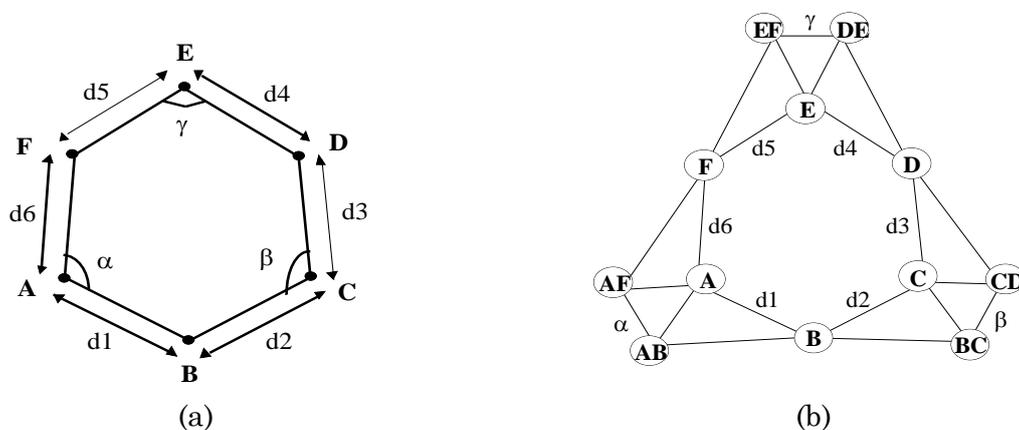


Figure 5. Une figure et son graphe de contraintes.

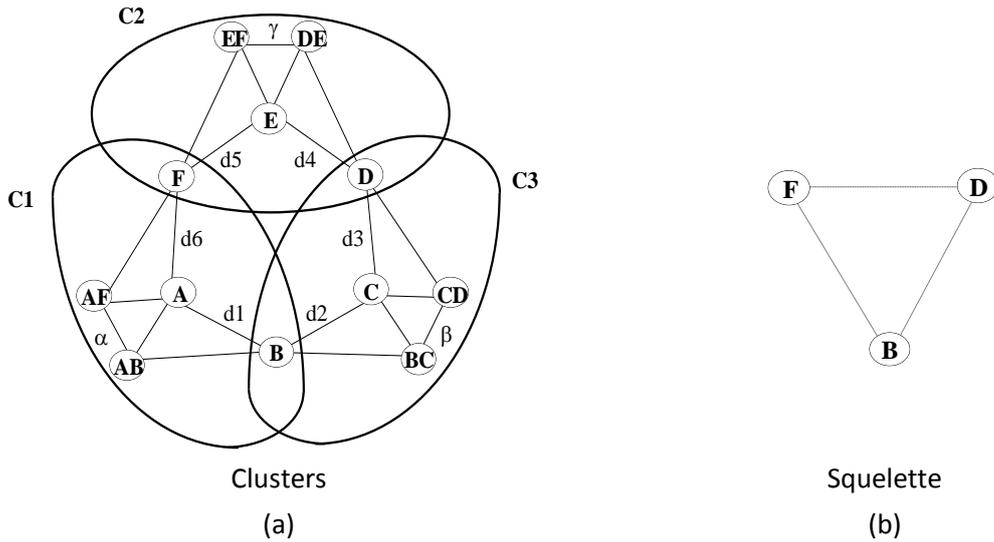


Figure 6. Résolution par une méthode ascendante.

IV. GRAPHES SOLUBLES ET CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Les méthodes basées graphes résolvent généralement bien des configurations géométriques constructibles à la règle et au compas mais butent sur certaines configurations dont le graphe des contraintes ne peut-être décomposé. Nous devons toutefois faire la distinction entre graphes de contraintes décomposables et constructions qui peuvent être dessinées à la règle et au compas, deux concepts souvent assimilés à tort. En effet, certains auteurs affirment hâtivement, à l'instar d'Owen (1991) et Lee et al. (2003), que toute configuration qui ne peut être résolu par les solveurs respectifs ne peut être dessinée à la règle et au compas. L'exemple suivant (Ait-Aoudia, 1994) donne un contre-exemple à cette affirmation.

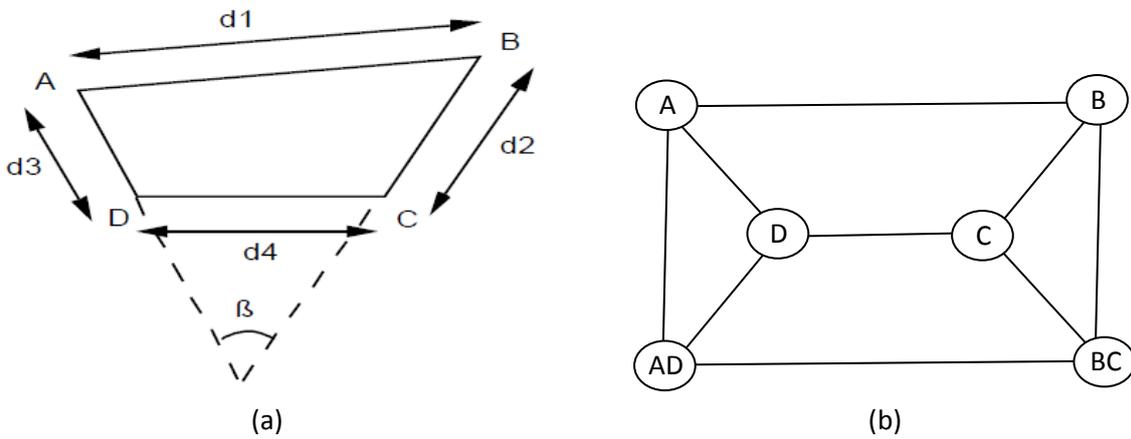


Figure 7. Figure géométrique et graphe de contraintes correspondant.

Soit le quadrilatère ABCD donné par ses quatre distances et un angle entre deux cotés opposés AD et BC (figure 7.a). Le graphe des contraintes correspondant est donné par la figure 7.b. Ce graphe de contraintes est tri-connexe donc non décomposable par l'algorithme d'Owen ou de Lee et al., alors que la figure géométrique est parfaitement constructible à la règle et au compas. Pour construire la

figure 7.a à l'aide de la règle et du compas (figure 8.a) on procède de la façon suivante : on fixe les points A et D, on trace le segment AE tel que l'angle (AE,AD) soit égal à β (l'angle donné entre AD et BC) et la distance AE soit égale à la distance CB. Le segment AE est parallèle au segment CB. Le point C est alors obtenu par l'intersection des deux cercles de centres D et E et de rayons respectifs d_4 et d_1 . Le point B est enfin obtenu par l'intersection des deux cercles de centres C et A et de rayons respectifs d_2 et d_1 .

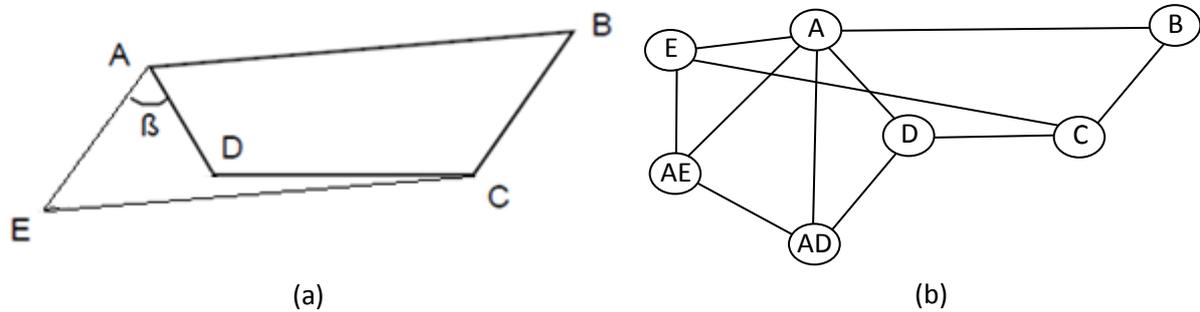


Figure 8. Construction à la règle et au compas et son graphe de contraintes.

Cette construction utilise un point supplémentaire E pour obtenir le résultat final, chose que les algorithmes de décomposition ne prennent pas en compte dans leur processus de construction. Ces algorithmes font abstraction des constructions intermédiaires. Si on construit le graphe des contraintes correspondant à ce procédé de construction avec le point E, ce graphe devient parfaitement décomposable comme montré à la figure 8.b.

Pour illustrer davantage cette remarque, nous prenons deux célèbres exemples constructibles à la règle et au compas et dont les graphes de contraintes correspondants ne sont pas solubles par les méthodes précitées.

Le premier exemple est le problème de Cramer-Castillon illustré par la figure 9 et dont l'énoncé est "étant donné un cercle Γ de centre O et de rayon R et trois points A, B et C, construire à la règle et au compas un triangle MNP inscrit dans le cercle et dont les côtés passent respectivement par les points A, B et C". Son graphe des contraintes est donné à la figure 10.

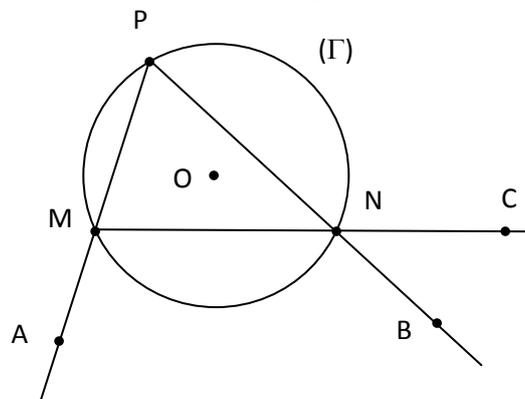


Figure 9. Problème de Cramer-Castillon.

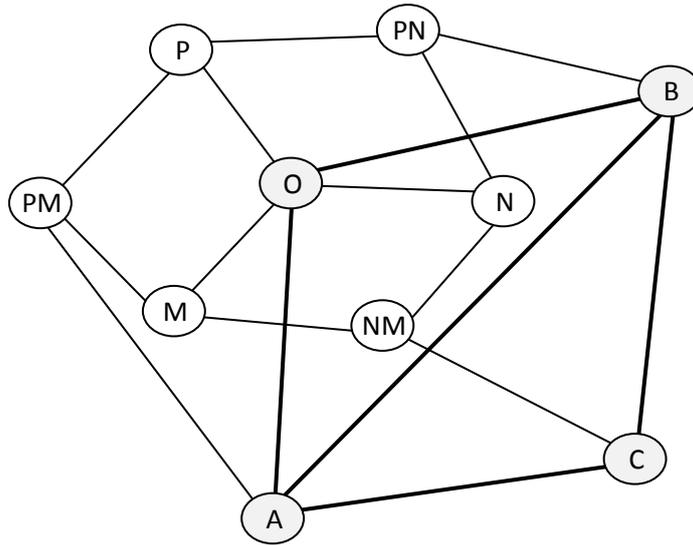


Figure 10. Graphe de contraintes du problème de Cramer-Castillon.

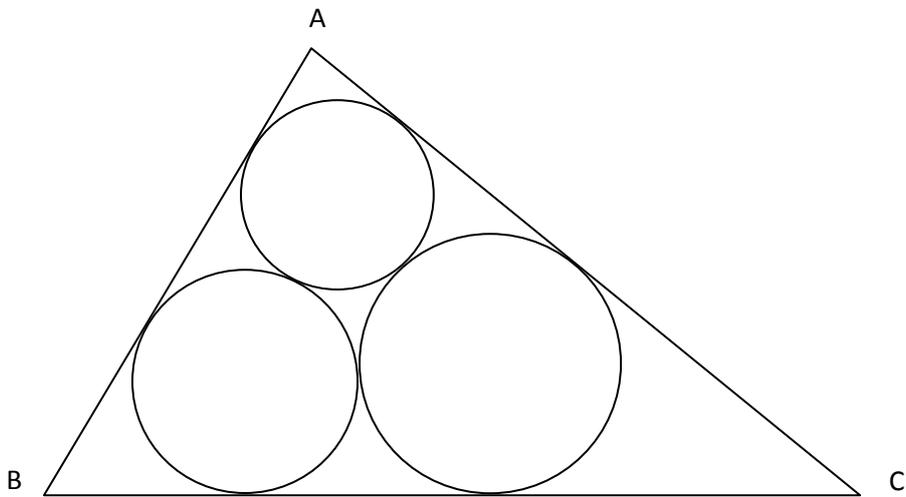


Figure 11. Problème de Malfatti.

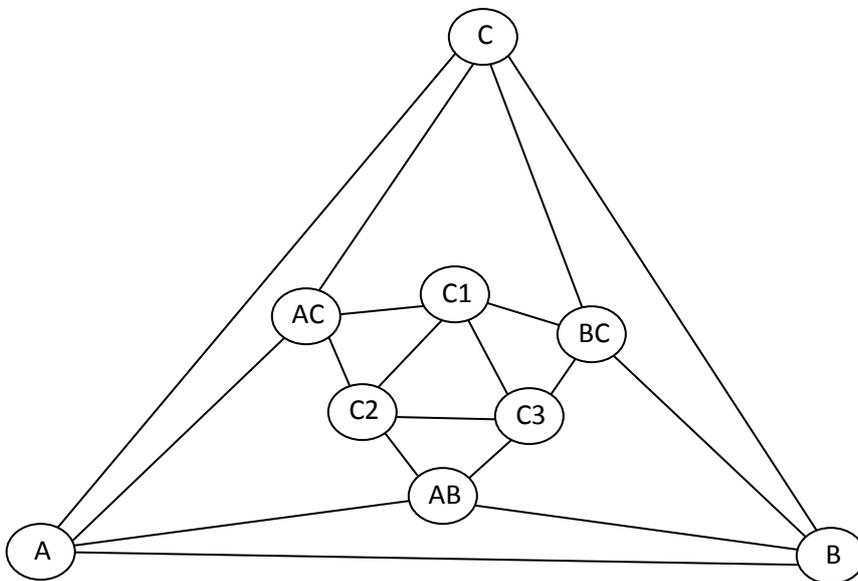


Figure 12. Graphe de contraintes du problème de Malfatti.

Le deuxième exemple est le problème de Malfatti illustré par la figure 11 et dont l'énoncé est "étant donné un triangle ABC, construire à la règle et au compas trois cercles C1, C2 et C3 inscrits dans les angles A, B et C du triangle et tels que chacun d'eux soient tangent aux deux autres". Le graphe de contraintes du problème Malfatti est donné par la figure 12.

Les solveurs de contraintes ne peuvent résoudre ces graphes et les déclarent non constructibles à la règle et au compas. Ce faux constat vient du fait que les constructions intermédiaires non triviales et indispensables au procédé de construction à la règle et au compas ne sont pas matérialisées dans le graphe des contraintes.

V. REDUCTIBILITÉ DES GRAPHES DE CONTRAINTES

Cette clarification étant faite, nous distinguerons deux classes de configurations qu'on ne peut résoudre avec les méthodes basées graphes :

- i. Les graphes partiellement réductibles : ces configurations peuvent être résolues partiellement mais pas dans leur totalité. Dans ce type de graphes, on peut détecter des sous-graphes décomposables mais la recombinaison globale est impossible avec des règles de construction de base. Un exemple d'un tel graphe est donné par la figure suivante. Les sommets représentent des points et les arêtes sont des contraintes de distance. On peut détecter les deux triangles mais la résolution globale est impossible.

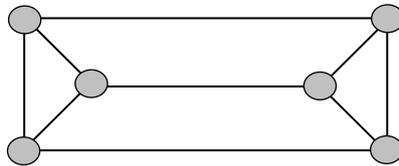


Figure 13. Graphe partiellement réductible.

- ii. Les graphes irréductibles : Ces configurations sont totalement non décomposables que nous désignerons par N-IR-Graphe, N désignant le nombre de d'entités géométriques ou sommets du graphe. Dans ce type de graphe aucune décomposition n'est possible. Nous illustrons des exemples de tels graphes avec les sommets représentant des points et les arêtes représentant des contraintes de distance. Un tel graphe à six sommets est donné par la figure 14. La figure 15 montre les N-IR-Graphes pour N allant de 8 à 13. Les graphes irréductibles pour N allant jusqu'à 100 et générés par Moussaoui et al. (2016) sont donnés dans (Moussaoui & Ait-Aoudia, 2016).

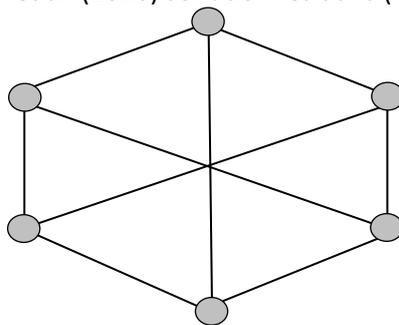


Figure 14. 6-IR-Graphe

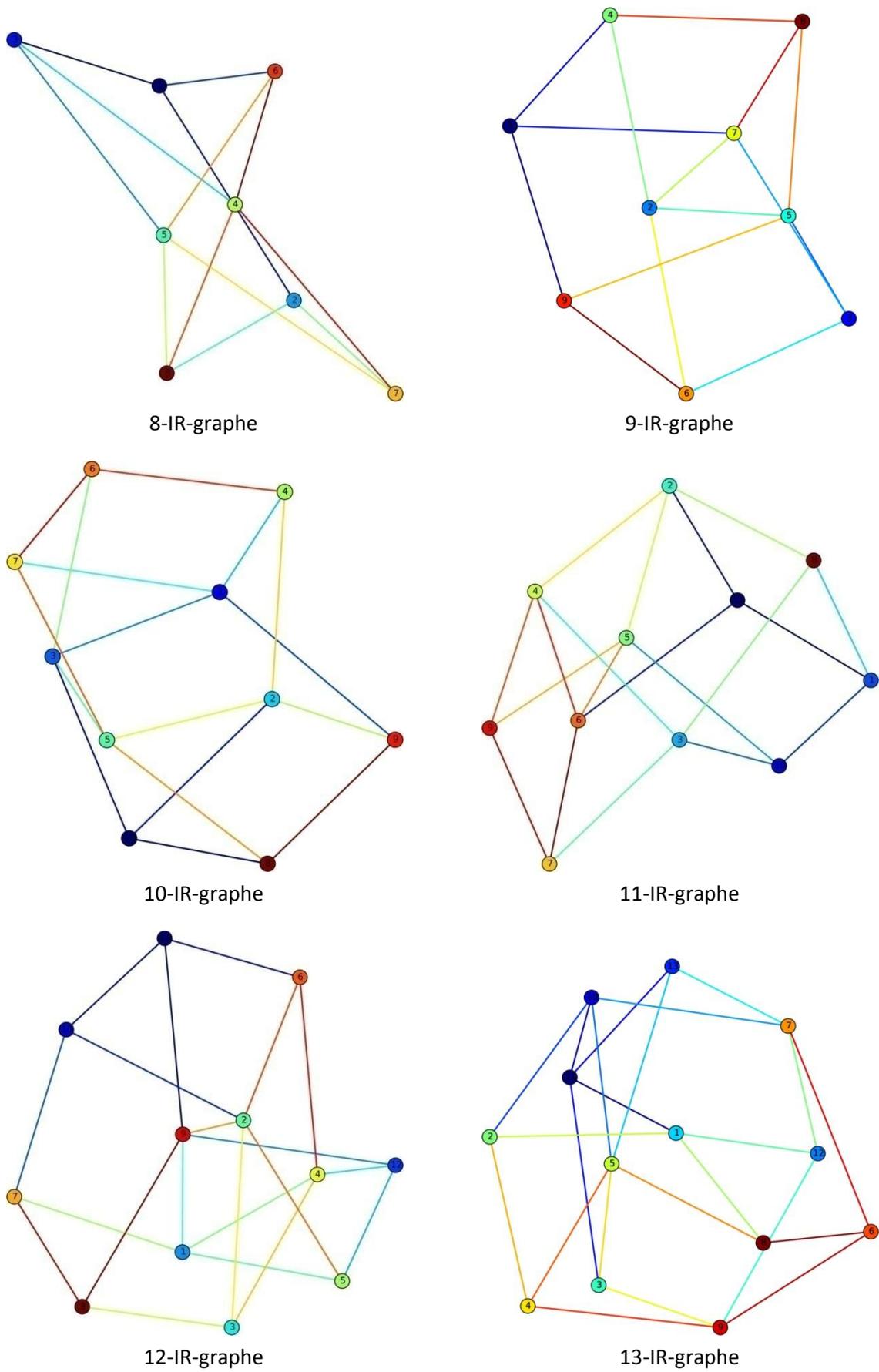


Figure 15. Quelques graphes irréductibles.

VI. CONCLUSION

Les configurations résolues par les méthodes basées graphes sont des figures constructibles à la règle et au compas. Ces méthodes ont l'avantage de pouvoir fournir une explication géométrique à l'utilisateur durant la phase de résolution. Elles échouent par contre sur des configurations constructibles à la règle et au compas dont les étapes intermédiaires de construction ne sont pas matérialisées dans le graphe des contraintes. Il en va de même pour les graphes irréductibles où aucune décomposition n'est possible. Il est alors nécessaire d'avoir un algorithme capable d'expliquer l'échec de la résolution et de basculer sur la résolution numérique (Ait-Aoudia & Mana, 2004). Des tests de constructibilité à la règle et au compas de certaines configurations sont donnés par Gao et Chou (1998) et Schreck et Mathis (2016).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ait-Aoudia, S. (1994). *Modélisation géométrique par contraintes: quelques méthodes de résolution*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne; Université Jean Monnet-Saint-Etienne.
- [2] Ait-Aoudia, S., & Foufou, S. (2010). A 2D geometric constraint solver using a graph reduction method. *Advances in Engineering Software, Elsevier*, 41 (10), 1187-1194.
- [3] Ait-Aoudia, S., & Mana, I. (2004). Numerical solving of geometric constraints by bisection: a distributed approach. *International Journal of Computing & Information Sciences*, 2 (2), 66.
- [4] Ait-Aoudia, S., Hamid, B., Moussaoui, A., & Saadi, T. (1999). Solving geometric constraints by a graph-constructive approach. *IEEE International Conference on Information Visualization*, (pp. 250-255). London.
- [5] Ait-Aoudia, S., Jegou, R., & Michelucci, D. (1993). Reduction of constraint systems. *Compugraphics*. Algarve, Portugal.
- [6] Bouma, W., Fudos, I., Hoffmann, C., & Paige, R. (1995). Geometric constraint solver. *Computer-Aided Design*, 27 (6), 487-501.
- [7] Carrega, J.-C. (2001). *Théorie des corps, la règle et le compas*. Hermann.
- [8] Cheng, Y., Ni, Z. L., & Liu, X. (2014). An intelligent approach for dimensioning completeness inspection in 3D based on transient geometric elements. *Computer-Aided Design*, 53, 14-27.
- [9] Fudos, I., & Hoffman, C. (1997). A Graph-Constructive approach to Solving Systems of Geometric Constraints. *ACM Transactions on Graphics*, 16 (2), 179-216.
- [10] Gao, X.-S., & Chou, S.-C. (1998). Solving geometric constraint systems. II. A symbolic approach and decision of Rc-constructibility. *Computer-Aided Design*, 30 (2), 115-122.
- [11] Gao, X.-Y., Zhang, C.-X., & Lu, Z.-M. (2015). 2D Geometric Constraint Optimum Solving Based on Problem Decomposition. *International Journal of Hybrid Information Technology*, 8 (1).
- [12] Hoffman, C., Andrew, L., & Meera, S. (2001). Decomposition plans for geometric constraint problems, part II: new algorithms. *Journal of Symbolic Computation*, 31 (4), 409-427.
- [13] Laman, G. (1970). On graphs and rigidity of plane skeletal structures *Journal of Engineering mathematics* 4.4 (1970): 331-340. *Journal of Engineering mathematics*, 4 (4), 331-340.
- [14] Lamure, H., & Michelucci, D. (1995). Solving geometric constraints by homotopy. *Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications*, (pp. 263-269).
- [15] Latham, R. S., & Middleditch, A. E. (1996). Connectivity analysis: a tool for processing geometric constraints. *Computer-Aided Design*, 28 (11), 917-928.
- [16] Lee, K.-Y., Kwon, O.-H., Lee, J.-Y., & Kim, T.-W. (2003). A hybrid approach to geometric constraint solving with graph analysis and reduction. *Advances in Engineering Software*, 34 (2), 103-113.
- [17] Michelucci, D., & Foufou, S. (2004). Using Cayley-Menger determinants for geometric constraint solving. *Proceedings of the ninth ACM symposium on Solid modeling and applications*.

- [18] Moussaoui, A., & Ait-Aoudia, S. (2016). Generator of 2D geometric constraint graphs. *Computer-Aided Design and Applications*, 13 (3), 271-280.
- [19] Moussaoui, A., & Ait-Aoudia, S. (2016). *Some irreducible Laman graphs*. ESI, Ecole nationale Supérieure en Informatique, Alger.
- [20] Owen, J. C. (1991). Algebraic solution for geometry from dimensional constraints." . *Proceedings of the first ACM symposium on Solid modeling foundations and CAD/CAM applications*. ACM.
- [21] Owen, J., & Power, S. (2007). The non-solvability by radicals of generic 3-connected planar Laman graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359 (5), 2269-2303.
- [22] Schreck, P. I., & Mathis, P. (2016). Automatic Constructibility Checking of a Corpus of Geometric Construction Problems. *Mathematics in Computer Science*, 10 (1), 41-56.