



**HAL**  
open science

## Optimisation de dispositifs passifs d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique

Julien Ducarne, Olivier Thomas, Jean-François Deü

### ► To cite this version:

Julien Ducarne, Olivier Thomas, Jean-François Deü. Optimisation de dispositifs passifs d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01488887

**HAL Id: hal-01488887**

**<https://hal.science/hal-01488887v1>**

Submitted on 14 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Optimisation de dispositifs passifs d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique

**Julien Ducarne — Olivier Thomas — Jean-François Deü**

*Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196,  
Conservatoire National des Arts et Métiers, case 353, 2 rue Conté 75003 Paris  
{julien.ducarne,olivier.thomas,deu}@cnam.fr*

---

*RÉSUMÉ. On s'intéresse dans cet article à la réduction de vibrations obtenue en associant à une structure des éléments piézoélectriques shuntés. On étudie le cas particulier d'une poutre munie d'éléments piézoélectriques. On propose une représentation du problème électromécanique couplé sous forme de projection modale. À partir de cette représentation, des shunts résistifs et résonants optimaux sont calculés. Leurs performances sont évaluées, en terme de réduction de vibration. Ensuite, une optimisation de la taille des éléments piézoélectriques et de leur position sur la structure est proposée. Tous ces résultats sont vérifiés expérimentalement.*

*ABSTRACT. This article is devoted to vibration reduction by means of shunted piezoelectric elements. First, a model of a beam with piezoelectric patches is expanded on the short-circuit vibration modes in order to obtain a simple representation of the electromechanical coupled problem. Then, from this representation, the optimal resistive and inductive shunts are calculated. The obtained attenuation is deduced. Finally, an optimization of the piezoelectric patches dimensions as well as their position on the structure is proposed. All these results are compared to experimental ones.*

*MOTS-CLÉS : Atténuation de vibrations, piézoélectrique, shunt résistif, shunt inductif*

*KEYWORDS: Vibration reduction, piezoelectric, resistive shunt, inductive shunt*

---

## 1. Introduction

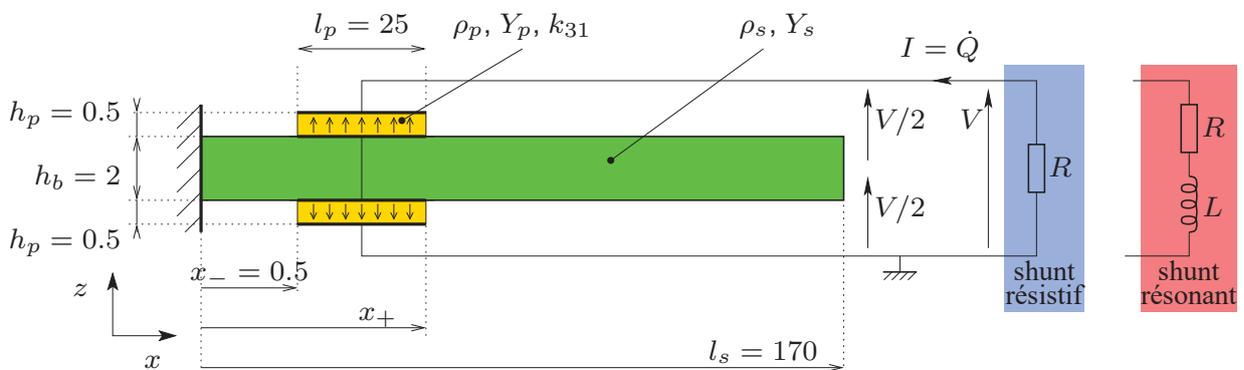
On s'intéresse dans ce travail à la réduction des vibrations d'une structure mécanique par des éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique, communément appelé "shunt". Deux cas de circuits électriques passifs sont étudiés. Pour le shunt résistif (shunt "R"), on utilise une résistance électrique, qui dissipe l'énergie par effet Joule et se comporte comme un amortisseur visqueux. Pour le shunt résonant (shunt "RL"), on ajoute une inductance, ce qui permet d'obtenir un circuit électrique résonant que l'on peut accorder sur la résonance mécanique à atténuer. Ce dernier système s'apparente à un amortisseur mécanique à masse accordée.

Ces techniques élémentaires de shunt, étudiées en détail dans (Hagood *et al.*, 1991), ont fait l'objet de plusieurs développements depuis : formulations du problème électromécanique analytiques et semi-analytiques (Davis *et al.*, 1995, Lesieutre, 1998, Park, 2003) ou numériques (Nguyen *et al.*, 2006). D'autre-part, des articles récents proposent des évolutions de ces shunts qui permettent d'élargir la bande de fréquences sur laquelle la technique est efficace : circuit complexe permettant d'amortir plusieurs modes (Behrens *et al.*, 2003) ou commutation (*switch*) entre l'état isolé et un shunt inductif (Richard *et al.*, 2000, Corr *et al.*, 2003).

Alors que (Hagood *et al.*, 1991) propose seulement un modèle mécanique à un degré-de-liberté, on propose ici de prendre en compte l'intégralité du système mécanique, pour d'une part évaluer les performances du shunt et d'autre-part optimiser la taille des éléments piézoélectriques et leur position sur la structure. Une étude expérimentale permet de valider ces résultats.

Ce travail est préparatoire à une étude de type *switch*, dans laquelle la formulation mécanique sera réutilisée. On s'attend à obtenir des résultats analogues, notamment sur l'optimisation des éléments piézoélectriques.

## 2. Modèle théorique



**Figure 1.** Poutre étudiée, munie des pastilles piézoélectriques et associée aux shunt  $R$  ou  $RL$ . (Les dimensions sont en mm.)

On étudie une poutre encastree-libre munie de deux éléments piézoélectriques en vis-à-vis. La poutre est constituée d'un matériau homogène isotrope. Les pastilles sont polarisées dans la direction  $z$  (voir figure 1) et constituées d'un matériau homogène isotrope transverse, de plan orthogonal à la direction de polarisation. Elles sont recouvertes sur leurs faces supérieure et inférieure par des électrodes, qui imposent dans les pastilles un champ électrique dirigé suivant  $z$ . C'est leur capacité à se déformer dans la direction longitudinale (suivant  $x$ ), sous l'action du champ électrique suivant  $z$ , qui est utilisée ici. Elles sont reliées électriquement en série au shunt et polarisées en sens inverse, de manière à être couplées aux mouvements de flexion de la poutre.

Pour la partie mécanique, on utilise un modèle de poutre fondé sur la théorie classique des stratifiés (Reddy, 1997), c'est à dire avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Pour la partie électrique, les électrodes imposent un potentiel uniforme sur toute la surface des pastilles. On suppose de plus que le champ électrique est constant suivant  $z$  et on calcule la charge libre présente dans les électrodes par intégration, sur la surface des électrodes, du flux de déplacement électrique.

Après adimensionnement, on montre que le déplacement transverse  $w(x, t)$ , la charge  $Q(t)$  et la tension  $V(t)$  dans le circuit, à une date  $t$ , vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \alpha^2 \Delta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} = \alpha \Delta Q + p, \quad [1]$$

$$Q = V + \alpha \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x_-}^{x_+}, \quad [2]$$

où  $\bar{m}(x)$  est la masse linéique et  $\bar{D}(x)$  la raideur en flexion du système, constants par morceaux ;  $p(x, t)$  est un effort linéique extérieur ;  $\alpha$  est un paramètre qui caractérise le couplage électromécanique ;  $\Delta(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_-) - \delta(x - x_+)]$  avec  $\delta$  la fonction de Dirac. Ce dernier terme, dans l'équation [1], montre que l'effet piézoélectrique inverse crée deux moments concentrés aux extrémités des pastilles piézoélectriques ( $x = x_-, x_+$ ). Inversement, d'après l'équation [2], les pastilles piézoélectriques sont équivalentes électriquement à un condensateur associé à une force électromotrice proportionnelle à la différence des pentes en  $x = x_-, x_+$  (effet piézoélectrique direct).

Une solution au problème précédent est obtenue par projection sur les modes propres  $\Phi_r(x)$  de la structure avec les pastilles en court-circuit ( $V = 0$ ) :

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(x) q_r(t). \quad [3]$$

Le problème devient alors, en tenant compte des deux shunts possibles,  $\forall r \in \mathbb{N}^*$  :

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) + \omega_r k_r \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i k_i q_i(t) - \omega_r k_r Q(t) = F_r(t), \quad [4]$$

$$\begin{cases} \text{shunt R} & \tau_e \dot{Q}(t) + Q(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i k_i q_i(t) = 0 \\ \text{shunt RL} & \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q}(t) + \frac{\xi_e}{\omega_e} \dot{Q}(t) + Q(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i k_i q_i(t) = 0 \end{cases} \quad [5]$$

avec  $\omega_r$ ,  $\xi_r$ ,  $k_r$  et  $F_r$  respectivement la pulsation propre, le facteur d'amortissement, le coefficient de couplage et le forçage du  $r^e$  mode. Les coefficients de [5] sont la constante de temps  $\tau_e$  du circuit  $RC$ , la pulsation propre  $\omega_e$  et le facteur d'amortissement  $\xi_e$  du circuit  $RLC$ . Ils sont décrits dans le tableau 1 ( $C$  est la capacité des pastilles). On montre que  $k_r$  s'écrit :

$$k_r = \sqrt{6} k_{31} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_s}} \sqrt{\frac{l_s}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_s}\right) \sqrt{\frac{h_p}{h_s}} \frac{1}{\omega_r} \left[ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+}. \quad [6]$$

Si on se place en circuit ouvert ( $Q \equiv 0$  dans [4]), on peut observer que les oscillateurs sont couplés par le terme  $\omega_r \omega_i k_r k_i$ , qui correspond à un ajout de raideur par rapport au cas en court-circuit. Les pulsations propres en circuit-ouvert, notées  $\hat{\omega}_r$ , peuvent alors être calculées par diagonalisation. Néanmoins, une bonne estimation de  $\hat{\omega}_r$  s'obtient en tronquant le système [4] à un seul oscillateur ; dans ce cas on a  $\hat{\omega}_r^2 \simeq \omega_r^2 (1 + k_r^2)$ . On montre ainsi que  $k_r$  est voisin du coefficient de couplage effectif (ANSI/IEEE Std 176-1987, 1988) :

$$k_r \simeq k_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}}. \quad [7]$$

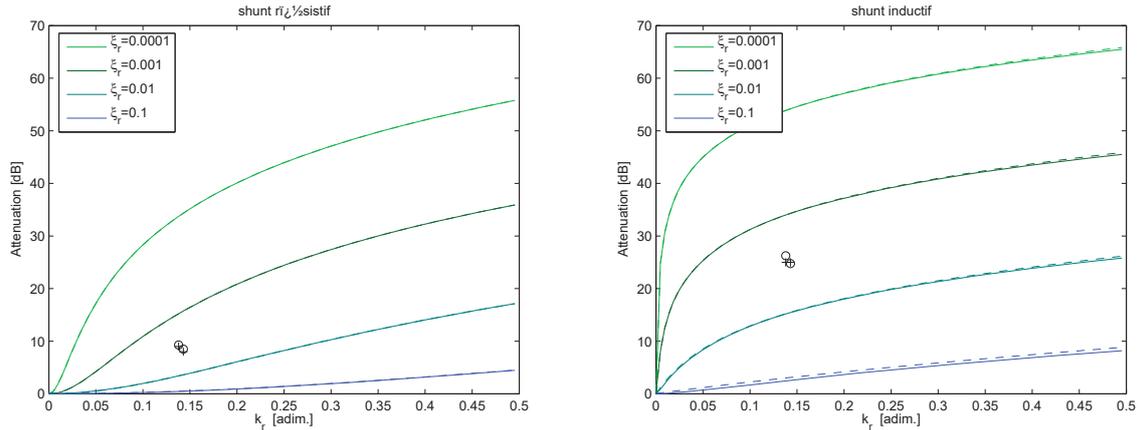
### 3. Optimisation de l'atténuation

La présence d'un shunt fait apparaître une relation entre tension et charge libre qui se traduit par l'une ou l'autre des deux formes de [5]. Pour les deux types de shunt on peut trouver des valeur de  $R$  et  $L$  minimisant la réponse vibratoire de la structure autour du  $r^e$  mode (Hagood *et al.*, 1991). Cela nous permet d'écrire l'atténuation  $A_{dB}$  apportée par le shunt, qu'on définit comme le rapport (en dB) du maximum de la réponse avec shunt court-circuit et du maximum de la réponse avec shunt optimal. Pour les deux types de shunt, moyennant quelques hypothèses, on établit une expression analytique de cette atténuation qui ne dépend **que de  $k_r$  et  $\xi_r$** . Les résultats sont résumés dans le tableau 1 et les atténuations sont comparées à un calcul numérique (figure 2) afin de valider les hypothèses.

Comme  $A_{dB}$  ne dépend que de  $k_r$  et  $\xi_r$ , il suffit de maximiser  $k_r$  pour optimiser le système. Connaissant une expression semi-analytique de  $k_r$  (eq. [6]) en fonction des caractéristiques géométriques et matérielles du système, on peut trouver par itérations les valeurs de  $l_p$ ,  $h_p$  et  $x_-$  qui maximisent  $k_r$  pour une poutre donnée.

	Shunt R	Shunt RL
Paramètres	$\tau_e = \frac{RC}{\tau_m}$	$\omega_e = \frac{\tau_m}{\sqrt{LC}}, \xi_e = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$
Valeurs optimales	$\tau_e^{\text{opt}} = \frac{1}{\omega_r \sqrt{1+k_r^2/2}}$	$\omega_e^{\text{opt}} = \hat{\omega}_r, \xi_e^{\text{opt}} = \sqrt{3/8} k_r$
Atténuation possible	$A_{dB}^R = 20 \log \frac{k_r^2 + 2\sqrt{2}\xi_r \sqrt{2+k_r^2}}{4\xi_r \sqrt{1-\xi_r^2}}$	$A_{dB}^{RL} = 20 \log f(k_r, \xi_r)$

**Tableau 1.** Paramètres électriques à optimiser et valeurs optimales ;  $\tau_m$  : constante de temps de la partie mécanique.



**Figure 2.** Atténuation du pic de réponse obtenue avec des shunts optimaux en fonction de  $k_r$  et  $\xi_r$  : — résultats numériques, — résultats analytiques,  $\circ$  atténuations calculées d'après  $k_r$  et  $\xi_r$  mesurés,  $+$  atténuations mesurées.

#### 4. Résultats expérimentaux

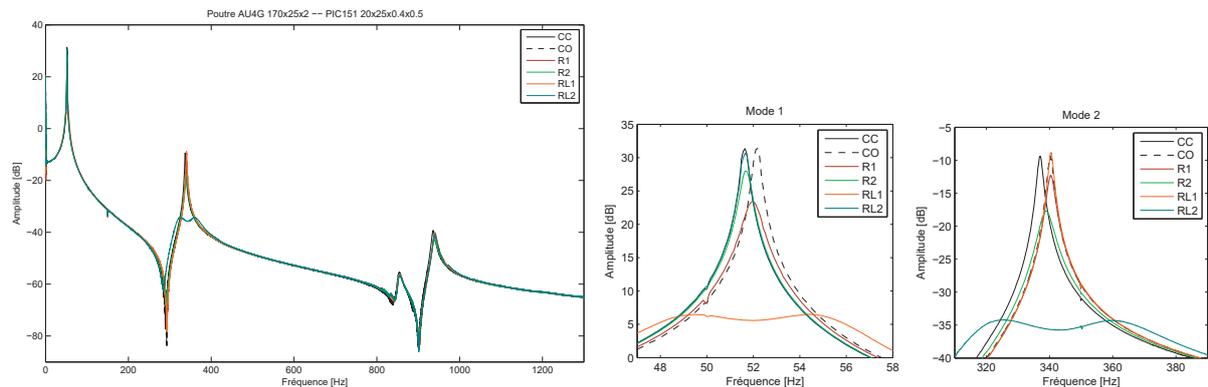
		Mode 1		Mode 2	
		Théo.	Exp.	Théo.	Exp.
Amortissement	$\xi_r$ [%]	—	0.31	—	0.28
Couplage	$k_r$ [adim.]	0.147	0.142	0.143	0.136
$A_{dB}$ shunt R	$A_{dB}^R$ [dB]	8.5	8	9.3	8.3
$A_{dB}$ shunt RL	$A_{dB}^{RL}$ [dB]	24.8	24.9	26.3	24.8

**Tableau 2.** Facteurs d'amortissement  $\xi_r$ , coefficient de couplage  $k_r$ , atténuation obtenue et estimée d'après les paramètres mesurés.

La structure est excitée par un aimant collé à l'extrémité, plongé dans le champ magnétique d'une bobine fixe. Un vibromètre permet de mesurer la vitesse et la FRF déplacement/effort est calculée. Les shunts sont optimisés par réglage manuel de  $R$  et  $L$  et les FRF (fig. 3) présentent l'aspect attendu. Les résultats sont consignés dans le tableau 2. On constate un excellent accord théorie/expérience.

D'autre part, on a montré que : (i) le shunt résistif est bien moins efficace que le shunt inductif ; (ii) il est en revanche efficace sur d'autres modes que le mode d'accord, ce qui n'est pas le cas du shunt inductif ; (iii) le shunt résistif conserve ses performances

en cas de déviation d'un paramètre (on parlera de technique robuste) tandis que le shunt inductif requiert un accord très précis.



**Figure 3.** FRF de la structure étudiée, agrandissement au voisinage des deux premiers pics de résonance.

## 5. Bibliographie

- ANSI/IEEE Std 176-1987, *IEEE Standard on Piezoelectricity*, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1988.
- Behrens S., Moheimani S., Fleming A., « Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 266, p. 929-942, 2003.
- Corr L. R., Clark W. W., « A novel semi-active multimodal vibration control law for a piezoceramic actuator », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 125, p. 214-222, 2003.
- Davis C. L., Lesieutre G. A., « A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 184, n° 1, p. 129-139, 1995.
- Hagood N. W., Flotow A. V., « Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, n° 2, p. 243-268, 1991.
- Lesieutre G. A. ., « Vibration Damping and Control using Shunted Piezoelectric Materials », *Shock and Vibration Digest*, vol. 3, p. 187-195, May, 1998.
- Nguyen C. H., Pietrzko S. J., « FE analysis of a PZT-actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel R-L shunt circuit », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, p. 1231-1239, 2006.
- Park C. H., « Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 268, p. 115-129, 2003.
- Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates*, CRC press, 1997.
- Richard C., Guyomar D., Audigier D., Bassaler H., « Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor », *Smart Structures and Materials : Passive Damping and Isolation, SPIE*, vol. 3989, p. 288-299, 2000.