



Sur une expression du spectre dans les algèbres a-normées pseudo complètes

Mohammed El Azhari

► To cite this version:

Mohammed El Azhari. Sur une expression du spectre dans les algèbres a-normées pseudo complètes. Bulletin mathématique de la Société des Sciences mathématiques de Roumanie, 1995, 38 (86) (3/4), pp.113-116. hal-01487776

HAL Id: hal-01487776

<https://hal.science/hal-01487776>

Submitted on 13 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR UNE EXPRESSION DU SPECTRE DANS LES ALGÈBRES A-NORMÉES PSEUDO COMPLETES

M. EL AZHARI

Résumé . Soit E une algèbre topologique, on note par $M^{\#}(E)$ l'ensemble des caractères algébriques (non nuls) de E et par $M(E)$ l'ensemble des caractères continus (non nuls) de E . Nous donnons un exemple d'une algèbre A -normée pseudo-complète, commutative unitaire, notée E , pour laquelle $M^{\#}(E) \neq M(E)$ et telle que la propriété

$$(P) \quad \text{spx} = \left\{ F(x) : F \in M(E) \right\} \quad \text{pour tout } x \in E$$

(où spx est le spectre de x) n'est pas vérifiée.

I. Préliminaires.

Soit E une algèbre sur $\mathbb{F}$. On dit que E est une algèbre topologique si E est munie d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue.

Une algèbre localement convexe (en abrégé a.l.c) est une algèbre topologique munie d'une topologie localement convexe.

Soit (E, τ) une algèbre topologique. On dit que (E, τ) est une algèbre A -normée si τ est définie par une norme d'espace vectoriel.

Soit (E, τ) une a.l.c séparée, soit β_E l'ensemble des disques bornés idempotents fermés de E . Pour chaque $B \in \beta_E$, soit E_B le sous-espace vectoriel

engendré par B. E_B est une algèbre, on la munit de la norme définie par la Jauge de B notée $\|\cdot\|_B$, ainsi $(E_B, \|\cdot\|_B)$ est une algèbre normée. Si pour tout $B \in \beta_E$, $(E_B, \|\cdot\|_B)$ est complet, on dit que E est une a.l.c pseudo-complète.

II. Exemple.

Soit $E = C[0,1]$ l'algèbre des fonctions continues sur le segment $[0,1]$.

On considère une application $\Phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Φ est bornée sur $[0,1]$, non nulle sur une partie dense de $[0,1]$.

(ii) $Z(\Phi) = \{x \in [0,1] : \Phi(x) = 0\}$ est non vide.

(iii) Si $x \in Z(\Phi)$, Φ est continue en x.

Soit $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(f) = \sup \{|f(x)\Phi(x)| : x \in [0,1]\}$ pour tout $f \in E$.

Si $f \in E$, $p(f) \leq \|f\| \sup \{|\Phi(x)| : x \in [0,1]\}$ (Si $f \in E$, on pose

$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [0,1]\}$). On vérifie facilement que p est une norme

d'espace vectoriel sur E. p est une A-norme sur E, en effet :

$$\begin{aligned} p(fg) &= \sup \{|f(x)g(x)\Phi(x)| : x \in [0,1]\} \\ &\leq \|f\| p(g) \end{aligned}$$

1. (E, p) est une algèbre A-normée pseudo-complète :

a) Soit $B_0 = \{f \in E : \|f\| \leq 1\}$, vérifions que $B_0 \in \beta_E$: Il est clair que B_0 est disqué, idempotent et p-borné. Pour tout $x \in [0,1] \setminus Z(\Phi)$, $\psi_x: E \rightarrow \mathbb{R}$ est

p-continue car $|f(x)| \leq \frac{1}{|\Phi(x)|} p(f)$ pour tout $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} B_0 &= \bigcap_{x \in [0,1]} \{f \in E : |f(x)| \leq 1\} \\ &= \bigcap_{x \in [0,1] \setminus Z(\Phi)} \{f \in E : |f(x)| \leq 1\} \quad ([0,1] \setminus Z(\Phi) \text{ est dense dans } [0,1]) \\ &= \bigcap_{x \in [0,1] \setminus Z(\Phi)} \psi_x^{-1}(\{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}) \end{aligned}$$

d'où B_0 est p-fermé, ainsi $B_0 \in \beta_E$.

b) Soit $B \in \beta_E$, montrons que $B \subset B_0$:

Supposons qu'il existe $f \in B$ tel que $f \notin B_0$, il existe $x \in [0,1] \setminus Z(\bar{\phi})$ tel que

$|f(x)| > 1$. B est p -borné, il existe $M > 0$ tel que $p(g) \leq M$ pour tout $g \in B$.

B est idempotent, $p(f^n) \leq M$ pour tout $n \geq 1$, $|f^n(x) \bar{\phi}(x)| \leq M$ pour tout $n \geq 1$,

ainsi $|f(x)|^n \leq \frac{M}{|\bar{\phi}(x)|}$ pour tout $n \geq 1$, ceci est absurde car

$|f(x)|^n \xrightarrow{n} \infty$ ($|f(x)| > 1$).

c) $\{B_0\}$ est une base de β_E , comme $(E_{B_0}, \|\cdot\|_{B_0}) = (E, \|\cdot\|)$, il s'ensuit que (E, p) est une algèbre A -normée pseudo-complète.

2. $M^\#(E) \setminus M(E) = \{\psi_z : z \in Z(\bar{\phi})\}$:

Pour tout $x \in [0,1]$, on considère l'application $\psi_x : E \rightarrow \mathbb{R}$, on sait que $f \mapsto f(x)$

$M^\#(E) = \{\psi_x : x \in [0,1]\}$. Si $x \in [0,1] \setminus Z(\bar{\phi})$, on a vu que ψ_x est p -continue.

a) Si $z \in Z(\bar{\phi}) \setminus \{0,1\}$, ψ_z n'est pas p -continue :

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]z-\varepsilon, z+\varepsilon[\subset]0,1[$. $\bar{\phi}$ est continue en z , pour tout $n \geq 1$,

il existe $r_n \in]0, \varepsilon[$ tel que $|\bar{\phi}(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [z-r_n, z+r_n]$. Pour

chaque $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 0 \quad \text{Si } x \in [0, z-r_n] \cup [z+r_n, 1]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{r_n} x - \frac{1}{r_n} z + 1 \quad \text{Si } x \in [z-r_n, z]$$

$$f_n(x) = -\frac{1}{r_n} x + \frac{1}{r_n} z + 1 \quad \text{si } x \in [z, z+r_n]$$

On a $\psi_z(f_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, d'autre part

$p(f_n) = \sup \{ |f_n(x) \bar{\phi}(x)| : x \in [0,1] \} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

ainsi $p(f_n) \xrightarrow{n} 0$ mais $\psi_z(f_n) \not\rightarrow 0$, donc ψ_z n'est pas p -continue.

b) Si $0 \in Z(\phi)$, ψ_0 n'est pas p-continue :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = 0$, pour tout $n \geq 1$, il existe $s_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que

$|\phi(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0, s_n]$. Pour chaque $n \geq 1$, on définit

la fonction $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = -\frac{1}{s_n}x + 1 \quad \text{si } x \in [0, s_n]$$

$$g_n(x) = 0 \quad \text{si } x \in [s_n, 1]$$

On a $\psi_0(g_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, d'autre part

$p(g_n) = \sup \{ |g_n(x)\phi(x)| : x \in [0, 1] \} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

ainsi $p(g_n) \xrightarrow{n} 0$ mais $\psi_0(g_n) \not\rightarrow 0$, donc ψ_0 n'est pas p-continue.

c) Si $1 \in Z(\phi)$, ψ_1 n'est pas p-continue :

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) = 0$, pour tout $n \geq 1$, il existe $t_n \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que

$|\phi(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [t_n, 1]$. Pour chaque $n \geq 1$, on définit

la fonction $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = 0 \quad \text{Si } x \in [0, t_n]$$

$$h_n(x) = \frac{1}{1-t_n}x - \frac{t_n}{1-t_n} \quad \text{si } x \in [t_n, 1]$$

On a $\psi_1(h_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, d'autre part

$p(h_n) = \sup \{ |h_n(x)\phi(x)| : x \in [0, 1] \} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

ainsi $p(h_n) \xrightarrow{n} 0$ mais $\psi_1(h_n) \not\rightarrow 0$, donc ψ_1 n'est pas p-continue

3. (E, p) ne vérifie pas la propriété (P) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, il est clair que $\text{sp}_E f = [0, 1]$
 $x \dashrightarrow x$

d'autre part

$$\begin{aligned} \{ F(f) : F \in M(E) \} &= \{ f(x) : x \in [0,1] \setminus Z(\bar{\phi}) \} \\ &= [0,1] \setminus Z(\bar{\phi}) \end{aligned}$$

$$\text{d'ou } \text{sp}_E f \neq \{ F(f) : F \in M(E) \}$$

Remarque. L'algèbre (E,p) satisfait aux hypothèses du lemme 5.13 de [5], mais ne vérifie pas la propriété (P). Ainsi l'exemple (E,p) met aussi en défaut le lemme 5.13 de [5] (cf : [2]).

Remerciements. Je remercie Messieurs les Professeurs M.Akkar et M.Oudadess pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée durant l'élaboration de ce travail.

Références.

- [1] M.Akkar, Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques ou bornologiques, Thèse Sc.Math., Univ. Bordeaux I (1976).
- [2] M.Akkar, M.El Azhari and M.Oudadess, On an expression of the spectrum in BP^* -algebras, Period.Math.Hungar. Vol.19(1), 1988, 65-67.
- [3] G.R.Allan, A spectral theory for locally convex algebras, Proc.London Math.Soc.(3) 15 (1965), 399-421.
- [4] A.C.Cochran, R.Keown and C.R.Williams, On a class of topological algebras, Pacific J.Math.34 (1970), 17-25.
- [5] T.Husain and S.A.Warsi, Positive functionals on BP^* -algebras, Period. Math.Hungar.8 (1977), 15-28.

Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoun, Rabat
B.P. 5118, Maroc.