



**HAL**  
open science

## Réponse harmonique de structures comportant des paramètres imprécis

Karine Ruffin-Mourier, Thierry Tison, Bertrand Lallemand, Franck Massa

► **To cite this version:**

Karine Ruffin-Mourier, Thierry Tison, Bertrand Lallemand, Franck Massa. Réponse harmonique de structures comportant des paramètres imprécis. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01487636

**HAL Id: hal-01487636**

**<https://hal.science/hal-01487636v1>**

Submitted on 12 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Réponse harmonique de structures comportant des paramètres imprécis

**Karine Ruffin-Mourier, Thierry Tison, Bertrand Lallemand, Franck Massa**

*Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH)*

*UMR CNRS 8530, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis*

*Le Mont Houy, 59313 Valenciennes Cedex 9, France*

*Karine.Ruffin@univ-valenciennes.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article présente une méthode numérique de calcul de la réponse harmonique, d'un modèle de structure mécanique comportant des paramètres imprécis. Les imprécisions, portent sur les paramètres modaux et sont modélisées par des nombres flous. Le problème est formulé sur la base du principe de superposition modale en considérant un modèle d'amortissement proportionnel. Le traitement des nombres flous est réalisé à partir du concept d' $\alpha$ -coupure couplé à l'arithmétique des intervalles. Les résultats obtenus sont les enveloppes pondérées des réponses en fréquence. Elles sont ici comparées aux résultats d'essais réalisés sur une famille de structures.*

*ABSTRACT. This article presents a numerical method for calculating the harmonic response of a mechanical structure including imprecise parameters. The imprecision deals with modal parameters and is modelled by fuzzy numbers. The problem is formulated on modal superposition principle considering a proportional damping. The treatment of fuzzy number is realized from the concept of  $\alpha$ -cut coupled with interval arithmetic. The results obtained are the weighted envelopes of frequency responses. They are compared with results of tests from a set of similar structures.*

*MOTS-CLÉS: Imprécision, Intervalle, Fonction de Réponse en Fréquence*

*KEYWORDS: Imprecision, Interval, Frequency Response Function*

---

## 1. Introduction

Les simulations numériques utilisées en phase de conception ont énormément évoluées ces dernières années grâce notamment au développement important des moyens informatiques. Néanmoins les modélisations sont souvent déterministes, alors que les sources d'imperfection sont nombreuses et concernent aussi bien les chargements, les conditions aux limites que les propriétés matérielles ou géométriques du modèle. La prédiction du comportement de la structure ne reflète

donc pas la réalité. Le développement d'approches non déterministes répond à ce besoin et rend possible la prise en compte de ces imprécisions.

Dans cet article, la réponse dynamique d'une structure sous sollicitation harmonique est étudiée. Les sources d'imprécision sont les paramètres modaux et le chargement. Deux cas peuvent alors être envisagés : soit les caractéristiques modales sont calculées à partir d'un modèle, dont les paramètres physiques sont imprécis (Massa *et al.*, 2005 et Massa *et al.*, 2006), soit elles sont identifiées à partir d'essais réalisés sur une famille de structures ou dans des conditions expérimentales différentes (Plessis *et al.*, 2000). Différents auteurs ont proposé des solutions par des approches de type probabiliste (Soize, 2005), intervalle (Dessombz, 2000), convexe (Takewaki *et al.*, 2005) ou ensembliste avec la théorie des sous-ensembles flous (Moens *et al.*, 2005 et De Gerssem *et al.*, 2005). Le formalisme flou (Zadeh, 1965) est ici retenu pour prendre en compte ces imprécisions.

En utilisant le concept d' $\alpha$ -coupure, la méthodologie proposée repose sur l'utilisation conjointe du principe de superposition modale avec un modèle d'amortissement proportionnel et de l'arithmétique des intervalles. Les combinaisons de paramètres nécessaires aux calculs des extrema de l'enveloppe des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sont déterminées pour éviter les surestimations et les coûts numériques importants. L'efficacité de la méthode est montrée sur un cas test dont les caractéristiques sont issues d'essais réalisés sur une famille de structures.

## 2. Réponse dynamique imprécise

### 2.1. Formulation du problème

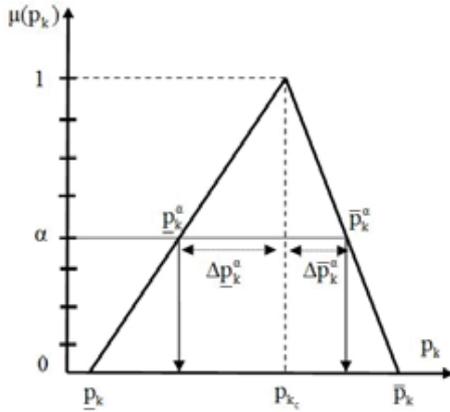
Chaque paramètre modal ainsi que l'excitation est modélisé par un nombre flou. Ce dernier est caractérisé par sa fonction de forme variant entre 0 et 1, pondérant l'appartenance des valeurs d'un paramètre sur un sous-ensemble borné : le support (Figure 1).

La recherche des extrema des FRF peut être traitée par une discrétisation en  $\alpha$ -coupure de la fonction d'appartenance de chaque paramètre imprécis. A l' $\alpha$ -coupure considérée, la FRF observée au point  $i$  pour  $m$  modes et  $k$  excitations est s'écrit :

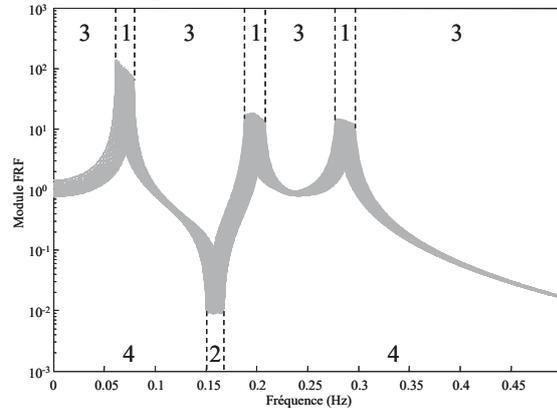
$$X_i^\alpha(\Omega) = \sum_{v=1}^m \frac{\Phi_{iv}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{jv}^\alpha \cdot F_j^\alpha}{\omega_{0v}^{\alpha 2} + 2 \cdot j \cdot \zeta_v^\alpha \cdot \omega_{0v}^\alpha \cdot \Omega - \Omega^2} \quad [1]$$

où  $\omega_{0v}^\alpha$ ,  $\zeta_v^\alpha$  et  $\Phi_v^\alpha$  représentent respectivement la pulsation propre, le taux d'amortissement et le vecteur propre du  $v^{\text{ème}}$  mode,  $F^\alpha$  le vecteur des forces

appliquées. Chaque paramètre et composante des vecteurs est un intervalle.  $\Omega$  est la pulsation d'excitation. Tous les paramètres peuvent prendre toutes les valeurs de leur support. Or le calcul de toutes les combinaisons, qu'aux bornes des intervalles constitue déjà ne serait-ce que  $2^{3.m+2.k}$  possibilités par  $\alpha$ -coupure. En phase de conception, cela représente un coût prohibitif qu'il est nécessaire de réduire.



**Figure 1.** Discretisation d'un nombre flou en  $\alpha$ -coupure.



**Figure 2.** Ensemble des FRF sur une plage de trois modes.

## 2.2. Méthodologie

La méthodologie consiste à étudier l'expression [1] pour déterminer le nombre de combinaisons minimal permettant de définir l'enveloppe de toutes les FRF. Le module des réponses dynamiques issues de toutes les combinaisons de paramètres peut être discrétisé en trois types de zones : des zones de résonance (1), des zones d'antirésonance (2) et des zones intermédiaires (3 et 4) (Figure 2).

Une analyse de sensibilités du module de [1] vis-à-vis des paramètres modaux a montré que le taux d'amortissement était peu influent sur les zones (3 et 4). Il est alors possible de lui attribuer la valeur nominale ( $\alpha=1$ ) pour ces zones. Pour la zone (1), la valeur la plus adéquate est déterminée, comme pour les autres paramètres, par le processus décrit ci-après.

Pour retenir les combinaisons de paramètres utiles, la méthodologie s'appuie sur l'analyse du module de l'équation [1]. On s'intéresse au module de la FRF plus utile au dimensionnement, dont le carré s'écrit :

$$\|X_i^\alpha(\Omega)\|^2 = \left[ \sum_{v=1}^m \frac{\left( \Phi_{iv}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{jv}^\alpha \cdot F_j^\alpha \right) \cdot (\omega_{0v}^{\alpha 2} - \Omega^2)}{(\omega_{0v}^{\alpha 2} - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \xi_v^\alpha \cdot \omega_{0v}^\alpha \cdot \Omega)^2} \right]^2 +$$

$$\left[ \sum_{v=1}^m \frac{\left( \Phi_{iv}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{jv}^\alpha \cdot F_j^\alpha \right) \cdot (2 \cdot \xi_v^\alpha \cdot \omega_{0v}^\alpha \cdot \Omega)}{\left( \omega_{0v}^{\alpha 2} - \Omega^2 \right)^2 + \left( 2 \cdot \xi_v^\alpha \cdot \omega_{0v}^\alpha \cdot \Omega \right)^2} \right]^2 \quad [2]$$

Pour chaque  $\alpha$ -coupure, les combinaisons des paramètres modaux et du vecteur force à intervalles fournissant les solutions extrêmes sont évaluées en simplifiant l'équation [2] sur chaque zone d'étude. Les combinaisons des paramètres déterminées sont ensuite introduites dans l'équation [1] pour calculer les enveloppes pondérées des FRF.

### 2.2.1. Zones intermédiaires (Types 3 et 4)

En s'éloignant de la zone de résonance du mode  $v$ , le terme  $(2 \cdot \xi_v^\alpha \cdot \omega_{0v}^\alpha \cdot \Omega)$  devient négligeable devant  $((\omega_{0v}^\alpha)^2 - \Omega^2)$  dans l'équation [2], qui peut alors s'écrire :

$$\|X_i^\alpha(\Omega)\| \approx \left| \sum_{v=1}^m \frac{\Phi_{iv}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{jv}^\alpha \cdot F_j^\alpha}{\omega_{0v}^{\alpha 2} - \Omega^2} \right| \quad [3]$$

Maximiser l'expression simplifiée [3] (resp. minimiser) revient à maximiser (resp. minimiser) le numérateur et minimiser (resp. maximiser) le dénominateur. Le numérateur étant une somme de termes positifs et négatifs, il n'est pas possible de dégager analytiquement les combinaisons nécessaires. Le choix des bornes des paramètres est alors déterminé par calcul avec l'arithmétique des intervalles.

### 2.2.2. Zones de résonance et d'antirésonance (Types 1 et 2)

Au niveau d'une zone de résonance, la réponse d'un mode  $\mu$  devient prépondérante. Les niveaux extrêmes sont donnés pour  $\Omega = \omega_{0\mu}$  avec  $\omega_{0\mu}$  compris entre les bornes inférieure et supérieure de la pulsation  $\omega_{0\mu}^\alpha$ . De plus  $((\omega_{0\mu}^\alpha)^2 - \Omega^2)$  devient négligeable devant  $(2 \cdot \xi_\mu^\alpha \cdot \omega_{0\mu}^\alpha \cdot \Omega)$  dans l'équation [2], qui s'écrit alors :

$$\|X_i^\alpha(\Omega)\| = \left| \frac{\Phi_{i\mu}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{j\mu}^\alpha \cdot F_j^\alpha}{2 \cdot \xi_\mu^\alpha \cdot \omega_{0\mu}^\alpha \cdot \Omega} + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^m \frac{\Phi_{iv}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_{jv}^\alpha \cdot F_j^\alpha}{\omega_{0v}^{\alpha 2} - \Omega^2} \right| \quad [4]$$

Comme pour les zones intermédiaires, l'étude de l'expression simplifiée [4] permet par le calcul à intervalles de déterminer les bornes des paramètres à prendre en compte dans le calcul des FRF. Dans le cas particulier du chevauchement des

supports des pulsations propres  $\omega_{0\mu}^\alpha$ , on retient le maximum des FRF calculées avec chaque combinaison des paramètres déterminée.

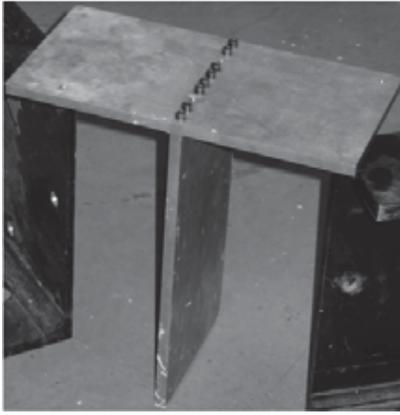
Pour la zone d'antirésonance, le niveau minimal des réponses correspond à la valeur minimale des seules FRF calculées.

### 3. Application

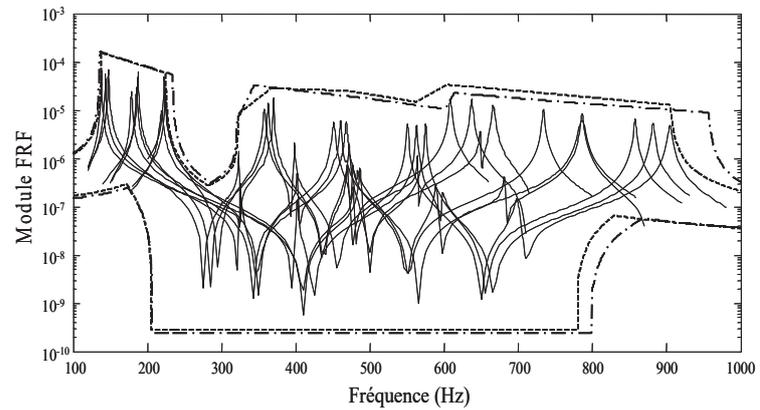
Afin de valider la méthodologie développée, une comparaison des FRF floues calculées est effectuée avec la base de données expérimentales obtenue en faisant varier les paramètres de contrôle du prototype étudié. Cette structure (Figure 3) est composée de deux plaques vissées-collées. Une variabilité a été volontairement introduite sur les épaisseurs et les longueurs des plaques. Des mesures complémentaires ont également révélées une variabilité significative du module d'Young. Les paramètres modaux flous ont été obtenus soit par agrégation des résultats des identifications, soit par calcul avec la méthode proposée par (Massa *et al.*, 2007). Cette méthode exploite un modèle éléments finis nominal et la variabilité des paramètres physiques décrits précédemment. L'enveloppe des FRF est ensuite calculée par la méthode exposée dans les paragraphes précédents. La Figure 4 présente deux enveloppes extrêmes ( $\alpha=0$ ) calculées à partir de ces deux jeux de paramètres modaux. Elles sont comparées à l'ensemble des neuf FRF expérimentales obtenues au même point. On peut noter une bonne prédiction de la propagation des imprécisions prises en compte sur l'amplitude de la réponse observée.

### 4. Conclusion

Une méthode permettant de prendre en compte les imprécisions au niveau des paramètres modaux et du chargement a été présentée. La recherche des combinaisons des paramètres à chaque  $\alpha$ -coupure et le principe de superposition modale permet de calculer les enveloppes pondérées de toutes les réponses dynamiques d'un système ayant des caractéristiques imprécises. La comparaison, sur une structure-test comportant des paramètres physiques imprécis, entre les réponses obtenues expérimentalement et calculées par cette méthodologie montre son efficacité.



**Figure 3.** *Structure test.*



**Figure 4.** *Enveloppes déterminées à partir des paramètres modaux identifiés (- - -), calculés (- . -) et FRF expérimentales (—) au point d'excitation.*

## 5. Bibliographie

De Gersem H., Moens D., Desmet W., Vandepitte D., « A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency response functions of damped structures: Part 2 – Numerical case studies », *Journal of sound and vibration*, vol. 288, 2005, p. 463-486.

Dessombz O., Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2000.

Massa F., Lallemand B., Tison T., « A fuzzy procedure for the static design of imprecise structures », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, 2006, p. 925-941.

Massa F., Tison T., Lallemand B., « Méthode d'aide à la conception en présence d'imprécisions », *7<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures*, Giens, France, 2005.

Massa F., Ruffin-Mourier K., Lallemand B., Tison T., « Calcul de structures par approche intervalle », *8<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures*, Giens, France, 2007

Moens D., Vandepitte D., « A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency response functions of damped structures: Part 1 - Procedure », *Journal of sound and vibration*, vol. 288, 2005, p. 431-462.

Plessis G., Lallemand B., Tison T., Level P., « Fuzzy modal parameters », *Journal of sound and vibration*, vol. 223, 2000, p. 469-474.

Soize C., « A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics », *Journal of sound and vibration*, vol. 288, 2005, p. 623-652.

Takewaki I., Ben-Haim Y. « Info-gap robust design with load and model uncertainties », *Journal of sound and vibration*, vol. 288, 2005, p. 551-570.

Zadeh L.A., « Fuzzy set », *Information and control*, vol. 8, 1965, p. 338-353.