



**HAL**  
open science

# Eléments finis enrichis espace-temps pour l'interaction fluide-structure mince

Antoine Legay, Andreas Kölke

► **To cite this version:**

Antoine Legay, Andreas Kölke. Eléments finis enrichis espace-temps pour l'interaction fluide-structure mince. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01487610

**HAL Id: hal-01487610**

**<https://hal.science/hal-01487610>**

Submitted on 12 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Eléments finis enrichis espace-temps pour l'interaction fluide-structure mince

Antoine Legay\* et Andreas Kölke†

\*Laboratoire des Structures et des Systèmes couplés  
Conservatoire National des Arts et Métiers, 2 rue Conté, 75003 Paris, France  
antoine.legay@cnam.fr

†Institut für Statik  
Technische Universität Braunschweig, Beethovenstraße 51,  
38106 Braunschweig, Germany  
a.koelke@tu-bs.de

---

*RÉSUMÉ.* Cette communication présente une nouvelle approche pour traiter les problèmes d'interaction fluide structure spécifiques où la structure est mince et immergée dans un fluide incompressible (Legay et al., 2006a, Legay et al., 2006b, Kölke et al., 2006, Legay et al., 2007). Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées par des éléments finis espace-temps en utilisant un schéma de Galerkin discontinu en temps. La structure est localisée une ligne de niveau définie dans le domaine espace-temps. Afin de prendre en compte les différentes discontinuités dues à la présence de la structure dans le fluide, les champs d'approximations de vitesse et de pression sont enrichis par des fonctions appropriées sur le principe de la partition de l'unité (XFEM). Le maillage de la structure peut alors se déplacer librement dans le domaine fluide.

*ABSTRACT.* This paper presents a new numerical approach to deal with fluid structure interaction problems where a thin structure is immersed in an incompressible fluid. Space-time finite elements are used to discretized the equations. The structure is localized by a level-set function defined in the space-time domain. In order to take into account the discontinuities due to the structure in the fluid domain, the approximation fluid fields are enriched with appropriate discontinuous functions through a partition of unity (XFEM). The method allows incompatible meshes between fluid and structure, the structure mesh can move freely in the fluid fixed Eulerian mesh.

*MOTS-CLÉS :* fluide structure interaction, éléments finis espace temps, maillages incompatibles, enrichissement, partition de l'unité, XFEM.

*KEYWORDS:* fluid structure interaction, space-time finite elements, incompatible meshes, enrichment, partition of unity, XFEM.

---

## 1. Equations locales

### 1.1. *Fluide*

Le fluide est supposé incompressible et visqueux. Une description Eulérienne est utilisée. Les équations de Navier-Stokes et d'incompressibilité sont

$$\rho v_{i,t}^F + \rho v_{i,j}^F v_j^F - \sigma_{ij,j} - \rho g_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad [1]$$

$$v_{i,i}^F = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad [2]$$

où  $\rho$  est la densité,  $v_i^F$  est la vitesse Eulérienne et où  $g_i$  est la gravité. L'opérateur des contraintes de Cauchy  $\sigma_{ij}$  est donné par  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$  où  $p$  est la pression et  $\mu$  est la viscosité. L'opérateur des taux de déformation  $e_{ij}$  vaut  $e_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^F + v_{j,i}^F)$ . Les conditions aux limites en terme de vitesse imposée sont  $v_i^F - v_i^{F^d} = 0$  sur  $\partial_v \Omega$  tandis que pour les efforts extérieurs, elles sont  $\sigma_{ij} n_j - t_i^d = 0$  sur  $\partial_f \Omega$  où  $v_i^{F^d}$  est la vitesse imposée sur  $\partial_v \Omega$  et  $t_i^d$  est la force imposée sur  $\partial_f \Omega$ . Les conditions initiales ne sont pas explicitées ici.

### 1.2. *Couplage à l'interface*

Le long de l'interface fluide-structure  $\Gamma$ , les vitesses fluide et structure ainsi que les vecteurs contrainte sont égaux. En notant  $v_i^F$  la vitesse fluide,  $v_i^S$  la vitesse structure,  $t_i^F$  le vecteur contrainte fluide et  $t_i^S$  le vecteur contrainte structure, il vient :  $v_i^F - v_i^S = 0$  sur  $\Gamma$  et  $t_i^F + t_i^S = 0$  sur  $\Gamma$ . Cette condition est écrite pour une continuité complète du vecteur vitesse, dans le cas d'une interface glissante, seule la continuité de la partie normale du vecteur vitesse est imposée.

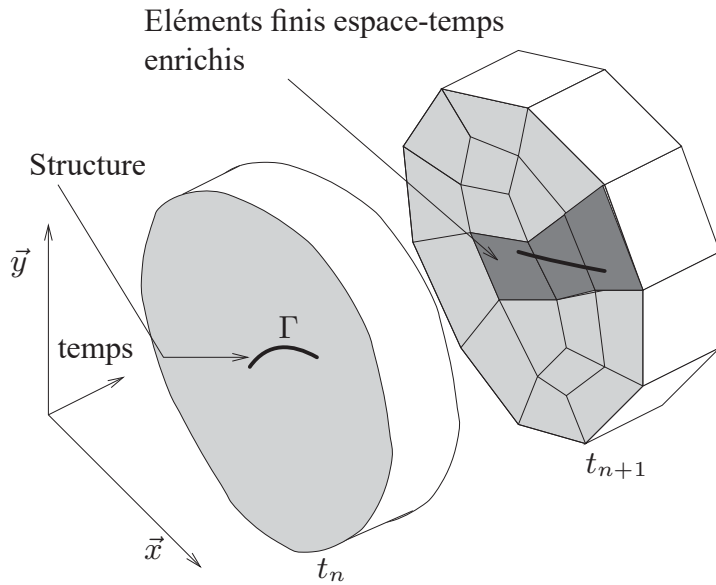
### 1.3. *Structure*

La structure est modélisée comme une poutre en non-linéaire géométrique, traitée en Lagrangien total. Dans le cas d'un fluide tri-dimensionnel la structure serait de type coque. L'équation d'équilibre écrite sur le domaine de référence  $\Omega_0^S$ , et la relation de comportement s'écrivent :

$$\rho^S (\dot{\mathbf{v}}^S - \mathbf{g}) - \nabla \cdot (\mathbf{FS}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad [3]$$

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad [4]$$

où  $\rho^S$  est la densité,  $\mathbf{g}$  est la gravité,  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation,  $\mathbf{S}$  est le vecteur des forces généralisées dans une section d'aire  $A$  et de moment quadratique



**Figure 1.** *Domaine espace-temps pour une structure mince flexible immergée dans un fluide.*

d'inertie  $I$ ,  $\mathbf{C}$  est la matrice de comportement et  $\dot{\mathbf{E}}$  est le taux de déformation. les vecteurs  $\dot{\mathbf{E}}$  et  $\mathbf{S}$  et la matrice  $\mathbf{C}$  valent :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} v_{x,x} + u_{x,x}v_{x,x} + u_{y,x}v_{y,x} \\ -v_{x,x} \sin \theta + v_{y,x} \cos \theta - w \\ w_{,x} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} N \\ Q \\ M \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{pmatrix}$$

où  $v_x$  et  $v_y$  sont les composantes de la vitesse,  $u_x$  et  $u_y$  sont les composantes du déplacement,  $w$  est la vitesse angulaire,  $N$  est l'effort normal,  $Q$  est l'effort tranchant,  $M$  est le moment de flexion,  $E$  est le module d'Young et  $G$  est le module d'élasticité transverse. Le déplacement se déduit de la vitesse par intégration temporelle.

## 2. Formulation variationnelle du problème couplé

La discrétisation utilisée est de type éléments finis espace-temps (fig. 1) (Hughes *et al.*, 1988) (Tezduyar *et al.*, 2005). On note  $\mathcal{Q} = \Omega \times [0 \ t_f]$  le domaine espace temps du problème couplé, où  $[0 \ t_f]$  est l'intervalle de temps étudié. Le domaine espace-temps est découpé en tranches de temps résolues pour chaque pas de temps de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ . Les conditions initiales sont données sur le bord du maillage espace-temps correspondant à  $t = 0$ .

La formulation variationnelle du problème est écrite pour le domaine espace-temps  $\mathcal{Q}_n = \Omega \times [t_n^+ \ t_{n+1}^-]$  : Trouver  $(v_i^F, v_i^S, p, \lambda_i)$  tels que  $\forall (\delta v_i, \delta p, \delta \lambda_i)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}_n} \delta v_i^F \rho \left( v_{i,t}^F + v_{i,j}^F v_j^F \right) d\mathcal{Q} - \int_{\mathcal{Q}_n} \delta v_{i,i}^F p d\mathcal{Q} + \int_{\mathcal{Q}_n} \delta v_{i,j}^F 2\mu e_{ij} d\mathcal{Q} \\ & \quad - \int_{\mathcal{Q}_n} \delta v_i^F \rho^F g_i d\mathcal{Q} - \int_{\partial\mathcal{Q}_n} \delta v_i^F \tau_{ij} n_j^F dS \\ & \quad + \int_{\mathcal{Q}_n} \delta p v_{i,i}^F d\mathcal{Q} + \delta \left( \int_{\Gamma} \lambda_i \left( v_i^F - v_i^S \right) d\Gamma \right) \\ & \quad + \int_{\mathcal{Q}_0^S} \delta v_i^S \rho^S (\dot{v}_i^S - g_i) d\mathcal{Q}_0^S + \int_{\mathcal{Q}_0^S} \mathbf{E}_i (\delta v^S, \delta u^S) \mathbf{C}_{ij} \mathbf{E}_j d\mathcal{Q}_0^S \\ & \quad + \int_{\partial\mathcal{Q}(t_n^+)} \delta v_i^F(t_n^+) \rho^F (v_i^F(t_n^+) - v_i^F(t_n^-)) dS \\ & \quad + \int_{\Omega_0^S} \delta v_i^S(t_n^+) \rho^S (v_i^S(t_n^+) - v_i^S(t_n^-)) d\Omega_0^S = 0 \end{aligned}$$

La continuité de vitesse à l'interface  $\Gamma$  est obtenue par des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  qui sont des variables additionnelles. Les deux derniers termes permettent d'assurer de façon faible la continuité du champ de vitesse d'un pas de temps à l'autre (intégration en temps de Galerkin discontinu).

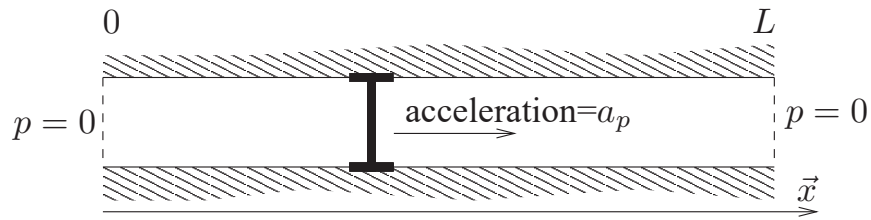
### 3. Elements finis espace-temps enrichis

La structure est localisée par l'isovaleur nulle d'une fonction ligne de niveau  $\phi(\underline{x}, t)$ , par exemple la distance signée à l'interface fluide-structure. Cette ligne de niveau est définie dans le domaine espace-temps.

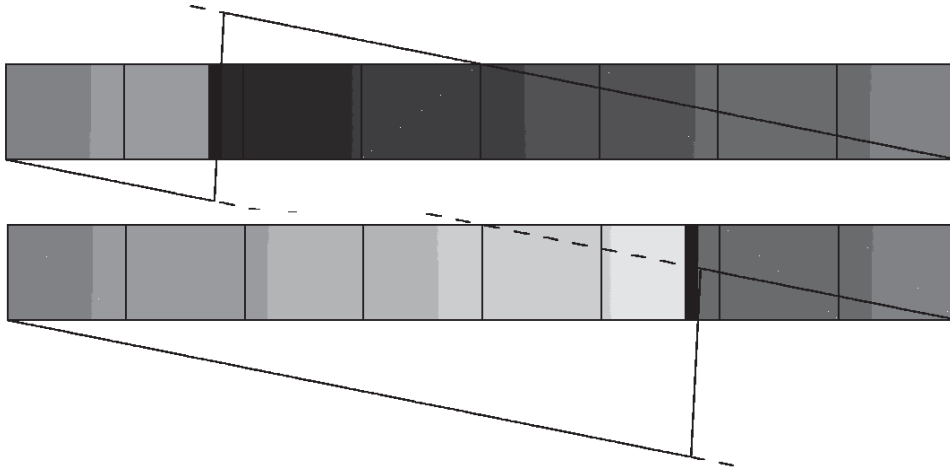
A la traversée de la structure, considérée sans épaisseur dans le fluide, la pression et le gradient de vitesse sont discontinus alors que la vitesse est continue. L'approximation de la pression est enrichie par le biais d'une partition de l'unité (Melenk *et al.*, 1996, Belytschko *et al.*, 2001) avec une fonction de type Heaviside, par exemple le signe de  $\phi(\underline{x}, t)$  :

$$p(\underline{x}, t) = \sum_{I \in \mathcal{S}} N_I^p(\underline{x}, t) P_I + \sum_{J \in \mathcal{S}^{enr}} N_J^{pu}(\underline{x}, t) \text{sign}(\phi(\underline{x}, t)) A_J^p$$

où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des noeuds du domaine fluide,  $N_I^p(\underline{x}, t)$  est la fonction de forme associée au noeud  $I$ ,  $P_I$  est la valeur nodale de pression associée au noeud  $I$ ,  $\mathcal{S}^{enr}$  est l'ensemble des noeuds enrichis du domaine fluide,  $N_J^{pu}(\underline{x}, t)$  est la  $J$ ième fonction de la partition de l'unité et  $A_J^p$  est la nouvelle inconnue associée à la  $J$ ième fonction de la partition de l'unité.



**Figure 2.** *Piston en translation dans un tunnel.*



**Figure 3.** *Evolution du champ de pression pour le piston en translation dans un tunnel. Les pointillés correspondent à la pression exacte attendue, Le trait fort est le résultat numérique.*

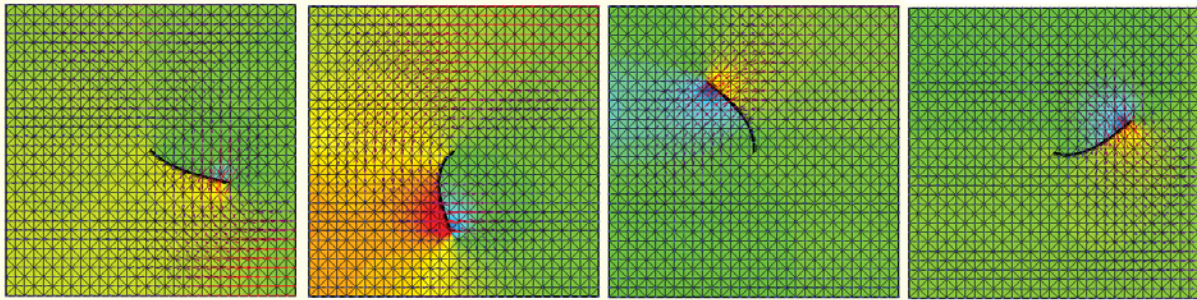
Avec les mêmes conventions d'écriture, le champ de vitesse est enrichi par une fonction de type rampe, par exemple la valeur absolue de  $\phi(\underline{x}, t)$  :

$$v_i(\underline{x}, t) = \sum_{I \in \mathcal{S}} N_I^v(\underline{x}, t) V_{Ii} + \sum_{J \in \mathcal{S}^{enr}} N_J^{pu}(\underline{x}, t) |\phi(\underline{x}, t)| A_{Ji}^v$$

#### 4. Exemple d'application

Un piston rigide est en translation dans un tunnel uni-dimensionnel ( $10 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ) (Fig. 2). Son accélération est constante  $a_p = 0,1 \text{ m.s}^{-2}$ . Le pression de pression dans le fluide vaut alors  $p_{,x} = -\rho a_p$  où  $\rho = 2 \text{ kg.m}^{-3}$  est la densité du fluide, tandis que la vitesse en tout point du fluide dans la direction  $\vec{x}$  est égale à celle du piston à chaque instant. La pression étant imposée nulle aux deux extrémités du tunnel, un saut de pression est présent à la traversée du piston. La figure 3 présente les profils de pression exact et analytique. Les résultats numériques sont identiques à la solution exacte.

La figure 4 présente une structure mince flexible en rotation dans un écoulement fluide. Les maillages fluide et structure sont totalement indépendants. La méthode



**Figure 4.** *Rotation imposée d'une structure flexible dans un écoulement fluide.*

permet de bien représenter le saut de pression ainsi que la discontinuité du gradient de vitesse à la traversée de l'interface pour une structure en grand mouvement tout en gardant un maillage fluide fixe.

## 5. Bibliographie

- Belytschko T., Moës T., Usui S., Parimi C., « Arbitrary Discontinuities in Finite Elements. », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 4, p. 993-1013, 2001.
- Hughes T., Hulbert G., « Space-time finite element methods for elastodynamics : Formulations and error estimates. », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, n° 3, p. 339-363, 1988.
- Kölke A., Legay A., « An enriched space-time finite element method for fluid-structure interaction - Part II : Thin flexible structures. », *Proceedings of the third European Conference on Computational Mechanics*, 5-8 June, 2006.
- Legay A., Chessa J., Belytschko T., « An Eulerian-Lagrangian Method for Fluid-Structure Interaction Based on Level Sets. », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 17-18, p. 2070-2087, 2006a.
- Legay A., Kölke A., « An enriched space-time finite element method for fluid-structure interaction - Part I : prescribed structural displacement. », *Proceedings of the third European Conference on Computational Mechanics*, 5-8 June, 2006b.
- Legay A., Tralli A., « An Euler-Lagrange enriched finite element approach for fluid-structure interaction. », *European Journal of Computational Mechanics*, 2007.
- Melenk J., Babuška I., « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n° 1-4, p. 289-314, 1996.
- Tezduyar T., Sathe S., Keedy R., Stein K., « Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 17-18, p. 2002-2027, 2005.