



**HAL**  
open science

## Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les structures stratifiées composites

Guillaume Inquiété, Patricia Saad, Bernard Troclet, Mohamed Ichchou, Louis  
Jezequel

► **To cite this version:**

Guillaume Inquiété, Patricia Saad, Bernard Troclet, Mohamed Ichchou, Louis Jezequel. Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les structures stratifiées composites. 8e Colloque National en Calcul des Structures, May 2007, Giens, France. hal-01487382

**HAL Id: hal-01487382**

**<https://hal.science/hal-01487382>**

Submitted on 11 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les structures stratifiées composites

**Guillaume Inquiété\*\*\*\* — Patricia Saad\* — Bernard Troclet\*\*  
Mohamed Ichchou\*\*\* — Louis Jezequel\*\*\***

*\* Mechanical Modelling Team, EADS Innovation Works  
12 rue Pasteur, BP76, F-92152 Suresnes cedex  
[guillaume.inquiete@eads.net](mailto:guillaume.inquiete@eads.net), [patricia.saad@eads.net](mailto:patricia.saad@eads.net)*

*\*\* TE35, EADS Astrium Space Transportation  
66 route de Verneuil, F-78133 Les Mureaux cedex  
[bernard.troclet@space.eads.net](mailto:bernard.troclet@space.eads.net)*

*\*\*\* Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes  
Ecole Centrale Lyon  
36 avenue Guy de Collongue, F-69134 Ecully cedex  
[mohammed.ichchou@ec-lyon.fr](mailto:mohammed.ichchou@ec-lyon.fr), [louis.jezequel@ec-lyon.fr](mailto:louis.jezequel@ec-lyon.fr)*

---

*RÉSUMÉ. Cet article présente une démarche permettant d'étudier la capacité des éléments finis standard à décrire la propagation des ondes élastiques dans les poutres composites stratifiées. Pour cela, une méthode est proposée afin d'identifier la vitesse de phase des ondes à partir d'une simulation transitoire réalisée par un code explicite. Les résultats sont ensuite confrontés à ceux obtenus par la méthode Wave Finite Element. En vue d'interpréter les résultats, une analyse théorique de la dispersion dans les poutres vient compléter cette étude. Enfin, deux cas test sont présentés pour démontrer l'intérêt de la démarche.*

*ABSTRACT. This paper highlights a methodology to study the accuracy of classical finite elements to predict propagation of elastic waves in laminate composite beams. An identification technique is applied to transient simulations computed by explicit software in order to predict phase velocity of waves. Results are compared to those obtained by Wave Finite Element Method. To analyze the results, theoretical study of dispersion in beam is achieved. Then, simulations are presented to demonstrate method ability.*

*MOTS-CLÉS : propagation d'ondes, poutre composite stratifiée, éléments finis, identification, dispersion, wave finite element method, vitesse de phase, courbe de dispersion*

*KEYWORDS: wave propagation, laminate composite beam, finite element, identification, dispersion, wave finite element method, phase velocity, dispersion curve*

---

## 1. Introduction

Sur les lanceurs spatiaux, la séparation de la coiffe et des étages est assurée par des systèmes pyrotechniques. Les chocs générés lors de leurs activations peuvent engendrer des dégradations sur les équipements de la charge utile. En vue d'éviter ce type d'incident, il est nécessaire de prédire correctement les niveaux vibratoires en pied de ces équipements. Des simulations numériques sont donc réalisées à partir de codes explicites, mais peuvent parfois conduire à des prévisions médiocres. Des travaux de recherche ont donc été entrepris afin de fiabiliser ces prévisions.

Dans ce contexte, nous étudions la capacité des éléments finis standard de poutre et de plaque à représenter la propagation d'ondes élastiques dans les structures stratifiées composites, dès lors qu'on s'intéresse à des fréquences relativement élevées. Pour ce faire, nous proposons de comparer les vitesses de phase associées aux différentes ondes élastiques pouvant se propager dans une structure.

Tout d'abord, une analyse théorique de la dispersion dans les poutres est menée en vue d'interpréter les résultats numériques obtenus. Ensuite, nous identifions numériquement la vitesse de phase des ondes par intercorrélation à partir de simulations transitoires basées sur des éléments finis de poutre. Conjointement, des prédictions ont été réalisées par la méthode Wave Finite Element (WFE) afin d'obtenir des résultats de référence. A travers différents cas test, nous étudions enfin les limitations des éléments finis à représenter la propagation des ondes dans les poutres.

## 2. Analyse théorique de la dispersion dans une poutre

La dispersion, c'est à dire la dépendance de la vitesse de phase par rapport à la fréquence, a été analysée par (Muller, 1983) pour différentes théories de poutre. A travers l'analyse faite par l'auteur, on constate qu'en basses fréquences la théorie d'Euler-Bernoulli est suffisante pour prédire correctement la vitesse de phase des différentes ondes. Dès lors qu'on étudie la dispersion à fréquences plus élevées, on constate que la vitesse de phase des ondes de flexion est sous estimée par cette théorie. De plus, elle ne prédit pas la conversion de l'onde évanescence de flexion en onde progressive. Cette limitation est due au fait que cette théorie ne prend pas en compte l'inertie de rotation de section, ni le cisaillement transverse contrairement à la théorie proposée par Timoshenko. De même pour les ondes longitudinales, on constate que la théorie d'Euler-Bernoulli ne prédit pas le comportement dispersif de l'onde progressive, ni la conversion des ondes évanescences en ondes progressives. Pour estimer correctement la dispersion des ondes longitudinales, il faut donc employer la théorie de Mindlin-Hermann qui prend en compte la déformation de la section induite par les inerties radiales. D'autres phénomènes de dispersion sont décrits dans (Muller, 1983), toutefois ils interviennent à des fréquences trop élevées

pour être rencontrés dans les problèmes de dynamique des structures comme le fait remarquer (Doyle, 1997). Pour les poutres en matériau composite stratifié, il existe là encore plusieurs théories. Les plus simples consistent à homogénéiser le matériau pour ainsi se baser sur les théories précédemment citées. Seulement une nouvelle fois elles sont limitées dès lors qu'on s'intéresse aux fréquences relativement élevées. Différents auteurs comme (Touratier, 1979) proposent des théories plus complexes prenant en compte un nombre plus important de paramètres pour décrire la poutre. Toutefois là encore tous les phénomènes n'interviennent pas dans les problèmes de dynamique des structures. Dans les codes explicites, on propose donc des éléments finis formulés à partir de la théorie d'Euler-Bernoulli pour le comportement longitudinal et la théorie de Timoshenko pour le comportement en flexion pour traiter les problèmes. Or notre problématique impose des fréquences d'excitation suffisamment élevées pour remettre en cause la formulation des éléments proposés. Il est donc important de vérifier la dispersion si l'on veut modéliser correctement la propagation des ondes dans les structures industrielles.

### 3. Identification numérique de la dispersion par intercorrélation

L'identification par intercorrélation est à l'origine employée pour identifier expérimentalement la dispersion des ondes de Lamb (Grondel *et al.*, 1999). Toutefois, elle a aussi été appliquée dans (Grédé *et al.*, 2005) pour identifier numériquement la vitesse de phase des ondes dans les structures sandwich. Cette technique consiste tout d'abord à acquérir dans le sens de propagation 2 signaux temporels. Pour notre étude, ils sont issus de simulations numériques réalisées à partir d'un code explicite. Les éléments finis employés sont formulés à partir de la théorie d'Euler-Bernoulli pour les ondes longitudinales et la théorie de Timoshenko pour les ondes de flexion. Le matériau composite stratifié a été homogénéisé. L'effort d'entrée est un signal de Ricker centré à 50kHz. A partir des 2 signaux, nous sommes capables de déterminer la vitesse de phase fonction de la fréquence. La démarche de calcul mise en œuvre est la suivante. Soient  $u(a, t)$  et  $v(b, t)$ , les 2 signaux mesurés en  $a$  et  $b$ . On définit,  $d = a - b$  la distance algébrique entre les 2 positions de mesure. Les 2 signaux sont traités par une fenêtre naturelle afin d'éliminer les ondes réfléchies. À partir des transformées de Fourier discrètes des 2 signaux  $\hat{u}(\omega)$  et  $\hat{v}(\omega)$ , on estime la fonction d'interspectre suivante :

$$S_{12}(\omega) = \frac{\hat{u}(\omega) \cdot \overline{\hat{v}(\omega)}}{\|\hat{u}(\omega) \cdot \overline{\hat{v}(\omega)}\|}$$

Le déphasage des 2 signaux est ensuite calculé à partir de la fonction d'interspectre précédemment calculée :

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{Im}(S_{12}(\omega))}{\text{Re}(S_{12}(\omega))} \right] + k\pi$$

Une fois l'estimation du modulo  $-\pi$  réalisée à partir d'une fonction standard de dépliement de phase, il est alors possible de déduire la vitesse de phase :

$$c(\omega) = \frac{\omega \cdot d}{\Delta\phi}$$

#### 4. Identification numérique de la dispersion par la méthode WFE

La méthode WFE développée dans (Mencik *et al.*, 2005) couple la méthode des éléments finis et la théorie des milieux périodiques afin de prédire la vitesse de phase des ondes d'une structure, dès lors que cette dernière répond aux hypothèses de milieu périodique. L'utilisation d'éléments finis est particulièrement intéressante car cela permet d'analyser des structures à géométrie complexe comme les poutres à section creuse (Houillon *et al.*, 2005) ou bien dans notre cas des poutres composites stratifiées. Pour identifier la dispersion des ondes d'une poutre par la méthode WFE, il faut tout d'abord discrétiser un tronçon de longueur  $\mathbf{d}$  de la poutre à partir d'éléments finis solides. A partir des degrés de liberté en déplacement et en force des sections gauche et droite ainsi que les matrices de masse et raideur, on peut exprimer l'équation du mouvement du tronçon de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix}$$

Avec  $\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$  : Matrice de rigidité dynamique

En récrivant l'équation du mouvement précédente à partir de vecteurs d'état, on obtient une équation faisant intervenir la matrice de transfert  $[\mathbf{T}]$  :

$$[\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad \text{avec :}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{-1} \mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR}^{-1} \\ \mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} \mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix}$$

D'après la théorie des milieux périodiques, le théorème de Bloch permet de relier le vecteur d'état de la section gauche à celui de la section droite via le terme de constante de phase  $\mu = e^{-ikd}$  faisant intervenir le nombre d'onde  $\mathbf{k}$ . Cette relation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix}$$

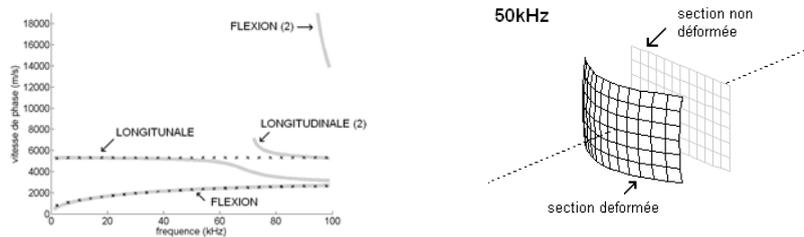
En injectant la relation précédente dans l'équation du mouvement, on obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix}$$

En résolvant ce problème, on obtient les nombres d'ondes associés à chaque onde élastique pouvant se propager dans le tronçon, ainsi que les déformées de la section de la poutre.

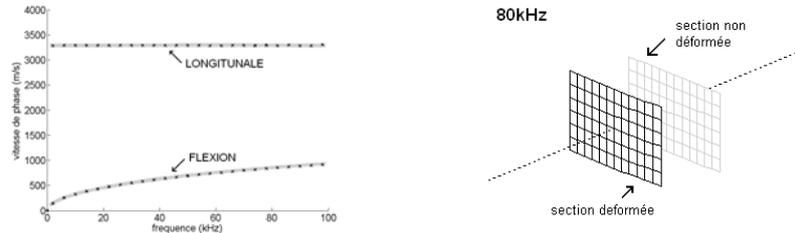
## 5. Résultats numériques

Afin de démontrer l'intérêt de la démarche proposée, nous allons présenter les résultats obtenus pour 2 cas test. Le premier test est une poutre en aluminium à section rectangulaire (1,8cm x 3,6cm). Le second est une poutre à section rectangulaire (1.8mm x 3.6mm) constituée d'un empilement de 6 plis de composite G803/914 orientés à  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$ .



**Figure 1.** (a) courbes de dispersion (b) déformée de la section de la poutre

A la figure 1a, les courbes de dispersion obtenues par intercorrélation (croix noires) pour la poutre en aluminium sont comparées à celles déterminées par la méthode WFE (traits gris). On constate qu'à partir de 50 kHz l'onde longitudinale devient dispersive. Afin de comprendre l'origine de la dispersion, on analyse la déformée de la section obtenue par la méthode WFE représentée à la figure 1b. On constate que les inerties latérales de la section ne peuvent plus être négligées. De plus, on observe sur les courbes de dispersion l'existence d'une seconde onde longitudinale. Il devient donc indispensable d'utiliser la théorie de Mindlin-Herrmann dans la formulation de l'élément fini. Pour la première onde de flexion, on constate que les résultats obtenus par intercorrélation sont en accord avec ceux de la méthode WFE. Par contre, la seconde onde de flexion n'est pas identifiée par intercorrélation. Cette limitation vient du fait que cette technique d'identification est monomode. Il serait donc intéressant d'employer d'autres techniques comme les méthodes temps-fréquence qui sont elles multimodes.



**Figure 2.** (a) courbes de dispersion (b) déformation de la section droite

Pour la poutre composite stratifiée, les courbes de dispersion identifiées par intercorrélation (croix noires) et par la méthode WFE (traits gris) sont comparées à la figure 2a. On constate que les résultats sont en accord entre les méthodes d'identification. De plus, la visualisation de la déformée de section de l'onde longitudinale à la figure 2b montre bien que les hypothèses de section indéformable suffisent pour décrire la structure. Les éléments finis standard sont donc suffisants pour traiter cet exemple.

## 5. Conclusions

Dans ce travail, nous avons dans un premier temps étudié les phénomènes de dispersion dans les poutres composites stratifiées à partir de différentes théories. Suite à cette analyse théorique, deux méthodes numériques ont été présentées. La première méthode permet d'identifier par intercorrélation la vitesse de phase des ondes à partir de simulations transitoires réalisées sous un code explicite. La seconde méthode est quant à elle basée sur la résolution d'un problème aux valeurs propres formulé à partir de la méthode des éléments finis et la théorie des milieux périodiques. Afin d'évaluer la capacité des éléments finis standard de poutre implémentés dans les codes, nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode intercorrélation à ceux de référence identifiés par la méthode WFE. A partir de deux cas test, l'approche proposée a montré son efficacité à étudier et interpréter la limitation des éléments finis à décrire la dispersion des ondes élastiques lorsqu'on s'intéresse à des fréquences relativement élevées. Toutefois, certaines limitations concernant l'identification par intercorrélation ont été mises en avant. Ce travail doit ensuite être étendu au cas des plaques en vue de proposer un outil d'aide à la conception.

## 6. Bibliographie

Doyle J.F., *Wave propagation in structures*, Springer édition, 1997

Grédé A., Tie B., Aubry D., Roux P., « Numerical modelling of elastic wave propagation in honeycomb sandwich panel under moving loads: application to space launchers »,

Proceedings of the 6th International symposium on launcher technologies, Munich, 8-11 November 2005

Grondel S., Delebarre C., Assaad J., Dupuis J-P., Reithler L., « The propagation of lamb waves in multilayered plates: phase velocity measurement », *Meas. Sci. Technol.*, 10, 348-353, 1999

Houillon L, Ichchou M.N, Jezequel L., « Wave motion in thin wall structures », *Journal of Sound and Vibration*, 281, 483-507, 2005

Mencik J-M., Ichchou M.N., « Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements », *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24, 877-898, 2005

Muller P., Contribution à l'étude de la dispersion dans les guides élastiques uniformes, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1983

Touratier M., Sur la propagation des ondes dans les tiges rectangulaires a isotropie transverse, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1979