HAL
open science

# UN CRITÈRE SIMPLE

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro

▶ **To cite this version:**

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro. UN CRITÈRE SIMPLE. Notre Dame Journal of Formal Logic, 2019, 60 (4), pp.639–663. 10.1215/00294527-2019-0023 . hal-01485675v5

**HAL Id: hal-01485675**

**https://hal.science/hal-01485675v5**

Submitted on 9 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UN CRITÈRE SIMPLE

THOMAS BLOSSIER ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

Résumé. Nous isolons des propriétés valables dans certaines théories de purs corps ou de corps munis d'opérateurs afin de montrer qu'une théorie est simple lorsque les clôtures définissables et algébriques sont contrôlées par une théorie stable associée.

## English Summary

In this article, we mimic the proof of the simplicity of the theory ACFA of generic difference fields in order to provide a criterion, valid for certain theories of pure fields and fields equipped with operators, which shows that a complete theory is simple whenever its definable and algebraic closures are controlled by an underlying stable theory.

## Introduction

Les corps différentiellement clos, les corps séparablement clos et les corps aux différences génériques sont des exemples de corps munis d'opérateurs qui jouent un rôle important en théorie des modèles et ses applications à la géométrie diophantienne. Les corps aux différences génériques, c'est-à-dire, les modèles existentiellement clos dans la classe des corps munis d'un automorphisme, sont un cas particulier d'un procédé général : étant donnée une théorie stable $T$, on considère la classe des modèles de

$$T_\sigma = T \cup \{\text{« } \sigma \text{ est un automorphisme »}\}.$$

Quand la sous-classe des modèles existentiellement clos de $T_\sigma$ est élémentaire, on dénote sa théorie par $TA$. Pour une théorie stable, l'existence de $TA$ s'avère équivalente à une finitude imaginaire uniforme, dite NFCP, et une condition technique donnée dans [2], valable pour toute théorie fortement minimale avec multiplicité définissable, ce qui est le cas des corps algébriquement clos. Ainsi, la théorie ACFA des corps aux différences génériques existe [11] et est complète lorsque l'on détermine le type d'isomorphisme de $(\mathrm{acl}_T(\emptyset), \sigma)$. Le corps fixe d'un modèle de ACFA est un corps parfait pseudo-algébriquement clos avec groupe

*Date*: 9 juillet 2018.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45, 12H05, 12H10.

*Key words and phrases.* Model Theory, Simple Theories, Fields with operators, Pseudo-algebraically Closed Fields.

Les auteurs ont conduit cette recherche grâce au soutien du projet ValCoMo ANR-13-BS01-0006. Ils regrettent de ne pas encore avoir eu l'occasion d'utiliser le nouveau réfrigérateur mis à disposition au bâtiment Braconnier par le projet LABEX MILYON (ANR-10-LABX-0070) de l'Université de Lyon, dans le cadre du programme "Investissements d'Avenir" (ANR-11-IDEX-0007) de l'État Français, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR).

de Galois $\hat{\mathbb{Z}}$. Ax [1] montre qu'un tel corps est un corps pseudo-fini, c'est-à-dire un corps infini modèle de la théorie des corps finis. Hrushovski [20] étudie la classe des corps parfaits pseudo-algébriquement clos avec groupe de Galois borné et montre qu'ils satisfont une propriété d'amalgamation généralisée. Il en déduit que la théorie est simple, une notion introduite par Shelah comme généralisation de la stabilité. L'amalgamation généralisée a été traitée par la suite de façon homologique [16]. À partir d'une configuration de groupe dans une théorie simple, l'amalgamation généralisée permet d'améliorer la construction dans [3] pour obtenir un groupe *hyperdéfinissable* [22].

Cet article est une simple réécriture (nos excuses pour le mauvais jeu de mots), sans nouvel apport, de la démonstration de la simplicité de ACFA réalisée dans [11]. Elle a pour seul but d'isoler des propriétés, valables dans de nombreuses théories de corps munis d'opérateurs (partie 1), qui permettent de déduire dans la partie 2 la simplicité lorsque les clôtures définissables et algébriques sont contrôlées par une théorie stable. La description de la déviation permet de donner une démonstration uniforme de l'élimination des imaginaires (au dessus d'une sous-structure élémentaire nommée) pour les théories de corps précédentes.

Dans la partie 3, nous étudions les groupes définissables dans ce contexte. Une propriété supplémentaire sur la clôture définissable, satisfaite par certaines théories de corps, entraîne que tout groupe type-définissable connexe se plonge à l'intérieur d'un groupe algébrique. On retrouve alors le résultat connu dans le cas différentiel ainsi qu'une version faible de [7, Propositions 4.2 & 4.9] pour les corps séparablement clos.

Certaines théories de corps ne rentrent pas dans ce contexte, entre-autres les paires propres de corps algébriquement clos ou les corps séparablement clos (ou PAC bornés) de degré d'imperfection infini. Dans ces exemples, la non-déviation est donnée en ajoutant une condition à l'indépendance purement algébrique. En la partie 4 en annexe, on montre que la démonstration du Théorème de l'indépendance s'adapte facilement à ce cadre.

Les auteurs tiennent à remercier Zoé Chatzidakis pour ses suggestions et remarques. Elle a joué un rôle fondamental pour la production de cette note. Toute incohérence ou erreur sont uniquement de la responsabilité des auteurs. Ils remercient également le rapporteur anonyme pour ses remarques et sa lecture détaillée, qui nous ont permis d'améliorer les premières versions de cet article.

## 1. De simples théories

**Définition 1.1.** Une théorie complète est *simple* si dans un (tout) modèle suffisamment saturé, il existe une relation ternaire $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ entre sous-ensembles satisfaisant les propriétés suivantes :

**Invariance:** Si $ABC \equiv A'B'C'$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$ si et seulement si $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{C'} B'$.

**Symétrie:** Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$, alors $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C A$.

**Monotonie et Transitivité:** $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C BD$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{CB} D$.

**Caractère fini:** $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$ si et seulement si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C b$ pour tous deux sous-uples finis $a$ de $A$ et $b$ de $B$.

**Caractère local:** Pour tout uple fini $a$ et tout ensemble $B$, il existe $C \subset B$ de taille bornée par $|T|$ avec $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$.

**Extension:** Pour tous $A$, $C$ et $B$, il existe $A' \equiv_C A$ avec $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$.

**Théorème de l'indépendance (3-amalgamation):** Si $M$ est une sous-structure élémentaire du modèle ambiant et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M B$, étant donnés

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M A \text{ et } d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M B \text{ tels que } c \equiv_M d,$$

alors il existe $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M AB$ avec $e \equiv_{MA} c$ et $e \equiv_{MB} d$.

On dit que $A$ est *indépendant* de $B$ sur $C$ si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$. Pour une théorie simple, la relation d'indépendance ci-dessus est unique [23] et coïncide avec la non-déviation.

Une théorie simple est *stable* si elle satisfait une version plus forte du théorème de l'indépendance :

**Stationnarité:** Tout type sur une sous-structure élémentaire $M$ du modèle ambiant est *stationnaire* : étant donnés

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M A \text{ et } d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M A \text{ tels que } c \equiv_M d,$$

alors $c \equiv_{MA} d$.

La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique $p$ fixée, avec $p$ premier ou nul, est stable : deux sous-corps $A$ et $B$ sont indépendants au-dessus d'un sous-corps commun $C$ si $A$ est algébriquement indépendant de $B$ sur $C$, ou de façon équivalente, si les corps $C(A)^{\mathrm{alg}}$ et $C(B)^{\mathrm{alg}}$ sont linéairement disjoints sur $C^{\mathrm{alg}}$. Le type de $A$ sur un corps parfait $C$ est stationnaire si et seulement si l'extension de corps $C \subset C(A)$ est régulière. En particulier, tout type sur un ensemble algébriquement clos de paramètres est stationnaire.

L'anneau engendré par deux corps linéairement disjoints est isomorphe à leur produit tensoriel. De façon générale, les types stationnaires permettent de fusionner des applications élémentaires définies sur des sous-parties indépendantes.

**Lemme 1.2.** *Soient deux sous-structures $A$ et $B$ ayant une sous-structure commune $C$ et des applications $C$-élémentaires $f : A \to A$ et $g : B \to B$. Si le type $\mathrm{tp}(A/C)$ est stationnaire et $\mathrm{tp}(A/B)$ ne dévie pas sur $C$, alors l'application $f \cup g$ est $C$-élémentaire.*

*Démonstration.* On se place à l'intérieur d'un modèle monstre et on étend $g$ en un automorphisme $\tilde{g}$ qui fixe $C$. Alors $\mathrm{tp}(\tilde{g}(A)/B)$ ne dévie pas sur $C$. Puisque $\tilde{g}(A) \equiv_C A \equiv_C f(A)$, la stationnarité de $\mathrm{tp}(A/C)$ entraîne que $\tilde{g}(A) \equiv_B f(A)$. Il existe un $B$-automorphisme $h$ qui envoie $\tilde{g}(A)$ sur $f(A)$. La composition $h \circ \tilde{g}$ étend $f \cup g$, comme souhaité. □

Ce lemme permet facilement d'obtenir le résultat suivant (cf. [33, Fact 3.5]) :

**Remarque 1.3.** Pour $x$, $y$ et $A$ dans un modèle d'une théorie stable, si le type $\mathrm{tp}(xy/A)$ est stationnaire et $y$ est définissable sur $x \cup \mathrm{acl}(A)$, alors $y$ l'est sur $x \cup A$.

**Fait 1.4.** Dans une théorie stable $T$, si $p$ est un type stationnaire sur un sous-ensemble $A$ du modèle ambiant, alors son unique extension non-déviante $q$ à une sous-structure élémentaire $M$ est *définissable* sur $A$ : étant donnée une formule $\varphi(x, y)$ à paramètres dans $A$, il existe une formule $\theta(y)$ à paramètres dans $A$ telle que pour tout uple $m$ dans $M$,

$$\varphi(x, m) \in q \text{ si et seulement si } M \models \theta(m).$$

(La formule $\theta(y)$ ne dépend que de $p$ et $\varphi$ à équivalence près.)
Enfin, toute extension non-déviante dans $T$ d'un type défini sur une sous-structure élémentaire $M$ du modèle ambiant est *finiment satisfaisable* dans $M$ : si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M b$, alors pour toute formule $\varphi(x, y)$ telle que $\models \varphi(a, b)$, on a $\models \varphi(m, b)$ pour un certain $m$ dans $M$.

Une théorie du premier ordre élimine les imaginaires si, à l'intérieur d'un modèle suffisamment saturé, chaque classe d'une relation d'équivalence définissable sans paramètres admet l'analogue d'un corps de définition, c'est-à-dire, un uple réel qui est fixé par tout automorphisme si et seulement s'il fixe cette classe. Cet uple est unique, à interdéfinissabilité près, et s'appelle le *paramètre canonique* de la classe. Toute théorie $T$ dans un langage $\mathcal{L}$ admet une expansion $T^{\mathrm{eq}}$ éliminant les imaginaires dans un langage $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$ à plusieurs sortes, une pour chaque quotient par une relation d'équivalence définissable dans $T$ sans paramètres. La sorte *réelle*, obtenue en considérant le quotient par l'égalité, s'identifie naturellement avec l'univers de la théorie $T$. Les éléments des autres sortes sont dits *imaginaires*. Les parties finies peuvent être vues comme des éléments imaginaires. La théorie $T$ élimine les imaginaires si tout imaginaire est interdéfinissable avec un uple réel. Elle code les ensembles finis si elle élimine les imaginaires correspondant aux parties finies. La théorie $T$ *élimine faiblement les imaginaires* si tout imaginaire $e$ est définissable sur un uple réel $a$, qui est algébrique sur $e$. Enfin, elle *élimine géométriquement les imaginaires* si tout imaginaire est interalgébrique avec un uple réel. Une théorie élimine les imaginaires dès qu'elle les élimine faiblement et code les ensembles finis.

Dans une théorie stable qui élimine les imaginaires, tout type $p$ sur un ensemble algébriquement clos $A$ est stationnaire. De plus, il existe un sous-ensemble $B \subset A$ définissablement clos et minimal tel que $p$ ne dévie pas sur $B$ et $p{\restriction}_B$ est également stationnaire. Un tel sous-ensemble est la *base canonique* $\mathrm{Cb}(p)$ de $p$. Nous utiliserons la notation $\mathrm{Cb}(c/D)$ pour dénoter la base canonique du type $\mathrm{tp}(c/\mathrm{acl}(D))$.

Par la suite, fixons une théorie complète stable $T_0$ avec élimination des quantificateurs et des imaginaires dans un langage $\mathcal{L}_0$. L'indice 0 fera référence à $T_0$. Ainsi, le symbole $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0$ dénote l'indépendance au sens de $T_0$, et de même pour $\mathrm{dcl}_0$ ou $\mathrm{acl}_0$.

Dans une expansion $\mathcal{L}$ du langage $\mathcal{L}_0$, on considère une théorie complète $T$ contenant $T_0^{\forall}$. Une $\mathcal{L}_0$-structure satisfait $T_0^{\forall}$ si et seulement si elle peut être plongée à l'intérieur d'un modèle de $T_0$.
Toute $\mathcal{L}$-structure est également une $\mathcal{L}_0$-structure. Ainsi, l'élimination des quantificateurs de $T_0$ entraîne que deux 0-plongements quelconques d'un modèle $M$ de $T$ dans des modèles de $T_0$ préservent le $\mathcal{L}_0$-types de toute $\mathcal{L}$-sous-structure $A$ de $M$. En particulier, au sens de $T_0$, les clôtures définissables, respectivement algébriques, de $A$ dans chacun des plongements

sont isomorphes. On travaillera par la suite à l'intérieur d'un modèle ambiant suffisamment saturé de $T_0$.

Nous allons lister maintenant des conditions sur les théories $T$ et $T_0$ qui nous permettront de montrer la simplicité de $T$. Afin de traiter également les corps séparablement clos, nous n'imposerons pas que les structures considérées soient définissablement closes, contrairement au cas des sous-structures géométriques [21, Definition 2.6] ou des sous-structures PAC bornées [31, Section 2]. Cependant, on suppose la propriété suivante :

**Hypothèse 1.** *Pour tout modèle $F$ de $T$, tout élément dans $\mathrm{dcl}_0(F)$ est $\mathcal{L}_0$-interdéfinissable avec un uple de $F$.*

Pour $T_0$ la théorie des corps algébriquement clos dans le langage des anneaux, cette hypothèse est vérifiée si les modèles de $T$ sont des corps, car $\mathrm{dcl}_0(A)$ est obtenu en ajoutant au sous-corps engendré par $A$ les éléments purement inséparables, lorsque la caractéristique est positive.

**Remarque 1.5.** Puisque $T_0$ élimine les imaginaires, l'hypothèse (1) entraîne que toute partie $\mathcal{L}_0$-définissable du modèle ambiant de $T_0$ qui est $F$-invariante est codée par un uple de $F$. En particulier, tout ensemble fini $F$-invariant est codé par un uple de $F$. Ainsi, la théorie $T$ code les ensembles finis.

Dans un modèle suffisamment saturé $F$ de $T$, étant donnée une sous-partie $A$ de $F$, on dénote par $\langle A\rangle$, resp. $\mathrm{dcl}(A)$ ou $\mathrm{acl}(A)$, la sous-structure de $F$ engendrée par $A$ au sens de $T$, resp. la clôture définissable ou algébrique de $A$ dans $F$, c'est-à-dire, les éléments de $F$ qui sont $\mathcal{L}$-définissables ou algébriques sur $A$.

Rappelons qu'un corps de caractéristique positive est parfait s'il contient tous les éléments purement inséparables (à l'intérieur d'une clôture algébrique fixée). De façon analogue, une sous-structure $A$ de $F$ est dite *parfaite* si $\mathrm{dcl}_0(A) \cap F = A$. Puisque la structure $F$ est parfaite, étant donnée une sous-partie $A$, la plus petite $\mathcal{L}$-sous-structure parfaite la contenant existe, et est appelée sa *clôture parfaite*, notée $\mathrm{pcl}(A)$.

Puisque $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, si $A \subset F$, alors $\mathrm{pcl}(A) \subset \mathrm{dcl}(A)$ car $\mathrm{dcl}_0(A) \cap F \subset \mathrm{dcl}(A)$. Notons que l'ensemble $\mathrm{dcl}_0(A) \cap F$ est $\mathcal{L}_0$-interdéfinissable avec $\mathrm{dcl}_0(A)$, par l'hypothèse (1). En revanche, même pour $A = \langle A\rangle$, l'ensemble $\mathrm{dcl}(A)$ peut être différent de $\mathrm{dcl}_0(A) \cap F$ : pour la plupart des corps pseudo-finis avec $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ le langage des anneaux, la clôture définissable coïncide avec la clôture algébrique [4, Theorem 1.8].

**Remarque 1.6.** Si $A$ et $B$ sont deux sous-structures parfaites de $F$, alors

$$\mathrm{dcl}_0(A) \cap \mathrm{dcl}_0(B) = \mathrm{dcl}_0(A \cap B).$$

*Démonstration.* Si un élément $x$ appartient à l'intersection $\mathrm{dcl}_0(A) \cap \mathrm{dcl}_0(B)$, alors l'hypothèse (1) entraîne qu'il existe un uple $a$ dans $A$ qui est $\mathcal{L}_0$-interdéfinissable avec $x$, car $A$ est parfait. En particulier, l'uple $a$ appartient à $\mathrm{dcl}_0(B) \cap F = B$, puisque $B$ est parfait. On conclut que $x$ est dans $\mathrm{dcl}_0(A \cap B)$, comme souhaité. □

**Hypothèse 2.** *(i) La clôture algébrique d'une sous-partie $A \subset F$ coïncide avec la restriction à $F$ de la clôture algébrique au sens de $T_0$ de la sous-structure $\langle A\rangle$ engendrée par $A$ au sens de la théorie $T$ :*

$$\mathrm{acl}(A) = F \cap \mathrm{acl}_0(\langle A \rangle).$$

*(ii) Deux uples $a$ et $b$ de $F$ ont même type si et seulement s'il existe un $\mathcal{L}$-isomorphisme de leurs clôtures algébriques qui envoie $a$ sur $b$.*

La première partie de l'hypothèse est toujours vérifiée pour une partie définissablement close $A = \mathrm{dcl}(A)$, car $T_0$ code les ensembles finis. Notons que toute sous-structure algébriquement close de $F$ est parfaite.

**Remarque 1.7.** Si $C = \mathrm{acl}(C) \subset F$, alors le type $\mathrm{tp}_0(A/C)$ d'une sous-partie $A \subset \mathrm{dcl}_0(F)$ est stationnaire (cf. [21, Lemma 2.8]).

*Démonstration.* Par élimination des imaginaires de $T_0$, la base canonique $\mathrm{Cb}_0(A/C)$ est contenue dans $\mathrm{dcl}_0(A \cup C) \cap \mathrm{acl}_0(C) \subset \mathrm{dcl}_0(F) \cap \mathrm{acl}_0(C)$. Par l'hypothèse (1), la base canonique est $\mathcal{L}_0$-interdéfinissable avec un uple (éventuellement infini) de $F \cap \mathrm{acl}_0(C) = C$. □

**Hypothèse 3.** *Étant données deux sous-structures parfaites $A$ et $B$ de $F$ au-dessus d'une sous-structure commune algébriquement close $C$, si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_C B$, alors la sous-structure de $F$ engendrée par $A$ et $B$ est parfaite et coïncide avec la $\mathcal{L}_0$-sous-structure engendrée par $A$ et $B$.*
*De plus, si*

$$A' \models \mathrm{qftp}(A/C) \text{ et } B' \models \mathrm{qftp}(B/C) \text{ avec } A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_C B',$$

*alors $\langle A'B' \rangle \models \mathrm{qftp}(\langle AB \rangle / C)$.*

**Remarque 1.8.** La première partie de cette hypothèse entraîne que

$$\langle A, B \rangle = \langle A, B \rangle_0 = \mathrm{dcl}_0(A, B) \cap F$$

et, par l'hypothèse (2),

$$\mathrm{acl}(A, B) = \mathrm{acl}_0(A, B) \cap F.$$

**Remarque 1.9.** Si $T_0$ est la théorie des corps algébriquement clos en caractéristique nulle, alors la théorie du corps ordonné $\mathbb{R}$ satisfait les hypothèses (1) et (2). Or, elle ne vérifie pas l'hypothèse (3), puisque l'ordre de deux éléments distincts n'est pas déterminé par leurs relations purement algébriques.
Le même argument montre que l'hypothèse (3) n'est pas valable pour la théorie d'un corps algébriquement clos muni d'un prédicat générique [13].

La condition suivante apparaît dans [19, Definition 1.9] et joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème de l'indépendance pour $T$.

**Hypothèse 4.** *Pour toute sous-structure élémentaire $N$ de $F$, on a*

$$\mathrm{acl}_0(F) = \mathrm{dcl}_0(F \cup \mathrm{acl}_0(N)).$$

Cette condition est triviale lorsque les modèles de $T$ sont algébriquement clos au sens de la théorie $T_0$, ce qui est le cas des corps algébriquement clos munis d'opérateurs [27]. Si $K$ est un corps séparablement clos et $T_0$ la théorie des corps algébriquement clos de même caractéristique, alors $\mathrm{acl}_0(K)$ coïncide avec $\mathrm{dcl}_0(K)$, qui est la clôture inséparable de $K$.
Pour une partie $A$ d'un modèle de $T_0$, nous notons pour la suite

$$\mathrm{Gal}(A) = \mathrm{Aut}_0(\mathrm{acl}_0(A)/A),$$

le groupe des $\mathcal{L}_0$-automorphismes élémentaires de $\mathrm{acl}_0(A)$ fixant $A$. Lorsque $T_0$ est la théorie d'un corps algébriquement clos, on retrouve le groupe de Galois absolu du corps parfait $\mathrm{dcl}_0(A)$.
Pour $A \subset B$ deux parties du monstre de $T_0$ et $\pi$ la projection naturelle de $\mathrm{Gal}(B)$ vers $\mathrm{Gal}(A)$, on a :
— si $\mathrm{tp}_0(B/A)$ est stationnaire, alors $\pi$ est surjective (par le lemme 1.2) ;
— $\mathrm{acl}_0(B) = \mathrm{dcl}_0(B \cup \mathrm{acl}_0(A))$ si et seulement si $\pi$ est injective.

**Remarque 1.10.** Si $N$ est une sous-structure élémentaire de $F$ (ou plus généralement si $\mathrm{acl}_0(F) = \mathrm{dcl}_0(F \cup \mathrm{acl}_0(N))$ et $\mathrm{acl}_0(N) \cap F = N$), alors pour $A \supset N$ algébriquement clos dans $F$, on a également

$$\mathrm{acl}_0(A) = \mathrm{dcl}_0(A \cup \mathrm{acl}_0(N)),$$

et les projections de $\mathrm{Gal}(F)$ sur $\mathrm{Gal}(A)$ et de $\mathrm{Gal}(A)$ sur $\mathrm{Gal}(N)$ sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Par la remarque 1.7 et l'hypothèse (4), les applications restrictions de $\mathrm{Gal}(F)$ vers $\mathrm{Gal}(A)$ et de $\mathrm{Gal}(F)$ vers $\mathrm{Gal}(N)$ sont des isomorphismes. On en deduit qu'il en est de même pour l'application de $\mathrm{Gal}(A)$ vers $\mathrm{Gal}(N)$, donc $\mathrm{acl}_0(A) = \mathrm{dcl}_0(A \cup \mathrm{acl}_0(N))$. □

**Notation 1.11.** Par la suite, si $N$ est une sous-structure de $F$, on posera $N \preceq_0 F$ pour indiquer que le $\mathcal{L}_0$-réduit de $N$ est une sous-structure élémentaire du réduit de $F$ correspondant.
Lorsque $T_0$ est un réduit fortement minimal de $T$ et $N$ est une sous-structure algébriquement close et infinie de $F$, alors $N \preceq_0 F$.

La démonstration de [33, Lemma 3.18], simplifiée grâce à des remarques de Zoé Chatzidakis, s'adapte facilement à notre contexte pour donner le résultat suivant :

**Lemme 1.12.** *Soit $N$ une sous-structure algébriquement close contenant une sous-structure élémentaire de $F$ telle que $N \preceq_0 F$. Si $A$ et $B$ sont deux sous-structures de $F$ contenant $N$ telles que*

$$A \underset{N}{\overset{0}{\perp\!\!\!\perp}} B,$$

*alors le type* $\mathrm{tp}_0(A/\mathrm{acl}_0(B))$ *est finiment satisfaisable dans $N$. En particulier, le type* $\mathrm{tp}_0(A/\mathrm{acl}_0(B))$ *est finiment satisfaisable dans* $\mathrm{acl}_0(N)$.

*Démonstration.* Le type $tp_0(A/N)$ est stationnaire par la remarque 1.7. Il suffit ainsi de montrer que $\mathrm{tp}_0(A/B)$ est finiment satisfaisable dans $N$ : en effet, ce type finiment satisfaisable s'étendra en un type sur $\mathrm{acl}_0(B)$ finiment satisfaisable sur $N$. En particulier,

ce dernier ne dévie pas sur $N$ et est par stationnarité égal au type $\mathrm{tp}_0(A/\operatorname{acl}_0(B))$, car $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_N \operatorname{acl}_0(B)$.
Vérifions donc que $\mathrm{tp}_0(A/B)$ est finiment satisfaisable dans $N$. Soit $\varphi(x,y)$ une $\mathcal{L}_0$-formule à paramètres dans $N$ et des uples $a$ dans $A$ et $b$ dans $B$ avec $\models \varphi(a,b)$. On considère l'unique extension non-déviante $q(y)$ de $\mathrm{tp}_0(b/N)$ à une $\mathcal{L}_0$-sous-structure élémentaire $M$ du modèle ambiant de $T_0$ contenant $Na$. Par le fait 1.4, la $\varphi$-définition $\theta(x)$ de $q$ est définissable sur $N$. On a alors $M \models \theta(a)$ car $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_N a$.
Par élimination des quantificateurs de $T_0$, on peut supposer que $\theta$ est sans quantificateurs, et donc $F \models \theta(a)$. Puisque $N \preceq_0 F$, il existe une réalisation $n$ de $\theta$ dans $N$. En particulier $\models \varphi(n,b)$, comme souhaité.

□

**Proposition 1.13.** *Soient $A_1,\dots,A_n$ et $B$ des sous-structures algébriquement closes de $F$ indépendantes au sens de $T_0$ sur une sous-structure algébriquement close $N$ contenant une sous-structure élémentaire telle que $N \preceq_0 F$ ou telle que $\operatorname{acl}_0(N)$ est un modèle de $T_0$. Alors*

$$\langle \operatorname{acl}(A_1B),\dots,\operatorname{acl}(A_nB)\rangle \cap \operatorname{acl}(A_1\dots,A_n) = \langle A_1\dots,A_n\rangle.$$

La conclusion de la proposition est la condition ($\sharp$) présente dans [22, Lemma 1.5]. Cette condition est fondamentale pour avoir la $n$-amalgamation réelle au-dessus d'une sous-structure élémentaire de $F$ (voir Définition 2.3).

*Démonstration.* Puisque les structures $A_1,\dots,A_n$ et $B$ sont indépendantes au sens de $T_0$ sur $N$, on a par la remarque 1.8 que $\operatorname{acl}(A_iB) = \operatorname{acl}_0(A_iB)\cap F$ pour chaque $i \le n$ et $\operatorname{acl}(A_1\dots,A_n) = \operatorname{acl}_0(A_1\dots,A_n)\cap F$. En outre,

$$\langle \operatorname{acl}(A_1B),\dots,\operatorname{acl}(A_nB)\rangle = \operatorname{dcl}_0(\operatorname{acl}(A_1B),\dots,\operatorname{acl}(A_nB))\cap F,$$

et

$$\operatorname{dcl}_0(A_1,\dots,A_n)\cap F = \langle A_1\dots,A_n\rangle.$$

Soit $\alpha$ dans $\operatorname{dcl}_0(\operatorname{acl}(A_1B),\dots,\operatorname{acl}(A_nB))\cap \operatorname{acl}(A_1\dots,A_n)$. Soit $\psi(x,y_1,\dots,y_n)$ une $\mathcal{L}_0$-formule telle que $\models \psi(\alpha,\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ pour des éléments $\zeta_i$ dans $\operatorname{acl}(A_iB) = \operatorname{acl}_0(A_iB)\cap F$, et

$$|\{x \mid \psi(x,y_1,\dots,y_n)\}| \le 1.$$

On trouve ainsi pour chaque $1 \le i \le n$, une $\mathcal{L}_0$-formule $\psi_i(y_i,u)$, à paramètres dans $A_i$, chacune avec un nombre fini de réalisations, uniforme en les paramètres, telles que

$$\models \bigwedge \psi_i(\zeta_i,b),$$

pour un certain uple $b$ dans $B$.

Comme $\alpha$ appartient à $\operatorname{acl}_0(A_1,\dots,A_n)$, il existe une $\mathcal{L}_0$-formule $\varphi(x)$ qui isole son type $\mathrm{tp}_0(\alpha/\operatorname{acl}_0(A_1),\dots,\operatorname{acl}_0(A_n))$.
Or,

$$\models \exists x \exists y_1 \dots \exists y_n \left(\psi(x,y_1,\dots,y_n)\wedge \phi(x)\wedge \bigwedge \psi_i(y_i,b)\right).$$

Cette formule appartient donc au type $\mathrm{tp}_0(b/\operatorname{acl}_0(A_1\ldots,A_n))$. Puisque

$$B \underset{N}{\overset{0}{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}} A_1,\ldots,A_n,$$

alors le type $\mathrm{tp}_0(b/\operatorname{acl}_0(A_1\ldots,A_n))$ est finiment satisfaisable dans $\operatorname{acl}_0(N)$, soit par le lemme précédent si $N \preceq_0 F$, soit par la stabilité de $T_0$ si $\operatorname{acl}_0(N)$ est un modèle de $T_0$. Ainsi, il existe $d$ dans $\operatorname{acl}_0(N)$ tel que

$$\models \exists x \exists y_1 \ldots \exists y_n \left(\psi(x,y_1,\ldots,y_n) \wedge \phi(x) \wedge \bigwedge \psi_i(y_i,d)\right).$$

On obtient alors une réalisation de $\phi(x)$ dans $\operatorname{dcl}_0(\operatorname{acl}_0(A_1),\ldots,\operatorname{acl}_0(A_n))$. Cette réalisation doit être égale à $\alpha$ car $\phi$ isole son 0-type sur $\operatorname{acl}_0(A_1),\ldots,\operatorname{acl}_0(A_n)$.
Par l'hypothèse (4), on en déduit que $\alpha$ appartient à $\operatorname{dcl}_0(A_1,\ldots,A_n,\operatorname{acl}_0(N))$. Puisque le type $\mathrm{tp}_0(A_1,\ldots,A_n,\alpha/N)$ est stationnaire, la remarque 1.3 entraîne que $\alpha$ appartient à

$$\operatorname{dcl}_0(A_1\ldots,A_n) \cap F = \langle A_1\ldots,A_n\rangle.$$

□

L'hypothèse suivante, qui reflète une certaine richesse des modèles de la théorie $T$, est satisfaite par les modèles existentiellement clos des corps algébriquement clos munis d'opérateurs considérés dans [27].

**Hypothèse 5.** *Soit $F'$ un autre modèle de $T$ contenant une sous-structure parfaite $C'$ au-dessus d'une sous-structure commune $A \subset F \cap F'$ parfaite dans $F$ et $F'$.*
*Si $\mathrm{tp}_0(C'/A)$ est stationnaire, alors pour tout $A \subset B \subset F$, il existe une sous-structure parfaite $C$ de $F$ contenant $A$ qui est $\mathcal{L}$-isomorphe à $C'$ au-dessus de $A$ et telle que*

$$C \underset{A}{\overset{0}{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}} B.$$

Notons que si $\mathrm{tp}_0(C'/A)$ est stationnaire, alors $C' \cap \operatorname{acl}_0(A) \subset \operatorname{dcl}_0(A)$. Si la théorie $T_0$ est la théorie de purs corps algébriquement clos d'une certaine caractéristique, et $A \subset C'$ sont des sous-corps parfaits, la condition $C' \cap \operatorname{acl}_0(A) \subset \operatorname{dcl}_0(A) = A$ équivaut alors à ce que l'extension $C'$ sur $A$ soit régulière, c'est-à-dire, à $C'$ et $\operatorname{acl}_0(A)$ linéairement disjoints sur $A$. De plus, cette condition entraîne réciproquement que le type $\mathrm{tp}_0(C'/A)$ est stationnaire, par élimination des imaginaires dans $T_0$.

**Remarque 1.14.** L'hypothèse (2) et le $\mathcal{L}$-isomorphisme entre les structures $C'$ et $C$ ne suffisent pas pour garantir que $C$ et $C'$ ont le même type au sens de la théorie $T$. En revanche, si l'on se place au-dessus d'une sous-structure élémentaire commune $N$, alors cet $\mathcal{L}$-isomorphisme envoie toute sous-structure $N \subset X' \subset C'$ qui est algébriquement close dans $F'$ vers une sous-structure $X$ algébriquement close dans $F$ ; en particulier $X$ et $X'$ ont alors le même type.

*Démonstration.* Par la remarque 1.10, on a $\operatorname{acl}_0(X') = \operatorname{dcl}_0(X' \cup \operatorname{acl}_0(N))$. Notons que le $\mathcal{L}$-isomorphisme entre $C'$ et $C$ induit un $\mathcal{L}_0$-isomorphisme de $\operatorname{acl}_0(C')$ sur $\operatorname{acl}_0(C)$ au-dessus de $A$, puisque $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, donc on a également $\operatorname{acl}_0(X) = \operatorname{dcl}_0(X \cup \operatorname{acl}_0(N))$. Soit $y \in \operatorname{acl}_0(X) \cap F$. On considère un uple $x$ dans $X$ tel que $y \in \operatorname{dcl}_0(x \cup \operatorname{acl}_0(N))$. Par la remarque 1.7, le type $\mathrm{tp}_0(xy/N)$ est stationnaire. La remarque 1.3 entraîne que $y$ est dans

$\mathrm{dcl}_0(x \cup N) \cap F \subset \mathrm{dcl}_0(X) \cap F$. Comme $C$ est parfait dans $F$, et $X$ est définissablement clos au sens de $T_0$ dans $C$, on conclut que $y$ est dans $X$ comme souhaité.

□

Même si nos hypothèses sont assez restrictives, plusieurs théories de corps les satisfont.

**Fait 1.15.** Les théories des :
- corps aux différences génériques ACFA en toute caractéristique dans le langage des corps $\{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ augmenté de symboles de fonctions unaires pour l'automorphisme et pour son inverse ;
- corps différentiellement clos, ou plus généralement corps différentiellement clos avec $n$ dérivations qui commutent, en caractéristique 0 ;
- corps différence-différentiellement clos [8] en caractéristique 0, dans le langage des corps différentiels aux différences ;
- corps munis d'opérateurs libres en caractéristique nulle [27] ;
- corps séparablement clos en caractéristique positive de degré d'imperfection fini avec des constantes pour une $p$-base, munis des $\lambda$-fonctions associées ;
- corps aux différences génériques séparablement clos en caractéristique positive de degré d'imperfection fini [10] avec des constantes pour une $p$-base, munis des $\lambda$-fonctions associées et des symboles de fonctions unaires pour l'automorphisme et pour son inverse ;
- corps pseudo-finis, ou plus généralement corps PAC parfaits avec groupe de Galois borné [19], en toute caractéristique dans le langage des corps augmenté de constantes pour une sous-structure élémentaire ;

satisfont les hypothèses (1), (2), (3), (4) et (5), pour $T_0$ la théorie des purs corps algébriquement clos de même caractéristique dans le langage de corps $\{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$.

*Démonstration.* Rappelons que l'hypothèse (1) est satisfaite dès que $T$ est une théorie de corps infinis, pour $T_0$ la théorie d'un pur corps algébriquement clos, puisque $\mathrm{dcl}_0(A)$ est obtenu en ajoutant les éléments purement inséparables au sous-corps engendré par $A$.

L'hypothèse (2) a été démontrée lors de l'étude modèle-théorique de chacune des théories considérées.

Pour l'hypothèse (3), notons d'abord que le corps engendré par deux sous-corps parfaits l'est également. Dans le cas des corps algébriquement clos, les opérateurs définis ci-dessus sont additifs, et leur valeur sur un produit s'obtient à partir des valeurs sur chaque facteur. Pour les corps séparablement clos munis de $\lambda$-fonctions, toute $\mathcal{L}$-structure est 0-relativement définissablement close et les $\lambda$-fonctions vérifient également les propriétés ci-dessus. Enfin, les corps PAC parfaits bornés satisfont cette hypothèse puisque $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$.

L'hypothèse (4) est triviale pour tous les exemples sauf pour les corps PAC parfaits bornés, où elle suit de [19, Remark 1.10]. En effet, si les groupes de Galois sont bornés avec même quotients finis, tout épimorphisme continu entre eux est injectif.

Il ne reste qu'à montrer l'hypothèse (5). Pour les corps algébriquement clos munis d'opérateurs, les corps $A$ et $C'$ sont alors parfaits. Ainsi, la stationnarité du type $\mathrm{tp}_0(C'/A)$ entraîne que l'extension $A \subset C'$ est régulière. Les opérateurs s'étendent de façon canonique

au corps engendré par $B$ et $C'$, car ce dernier coïncide avec le corps de fractions du produit tensoriel $B \otimes_A C'$ si l'on place $C'$ linéairement disjoint de $B$ sur $A$,. Puisque $F$ est existentiellement clos et suffisamment saturé, il contient une $\mathcal{L}$-copie $C$ de $C'$ sur $A$ qui est linéairement disjointe de $B$ sur $A$, comme souhaité.

Pour les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini avec une $p$-base nommée, le même genre d'argument permet de montrer que l'extension de corps $F(C')$ sur $F$ est séparable de même degré d'imperfection, ce qui permet de trouver un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\psi$ entre $C'$ et une sous-structure $C$ de $F$ linéairement indépendante de $B$ sur $A$. De façon analogue, on obtient le résultat pour les corps aux différences génériques séparablement clos.

Pour les corps parfaits PAC avec groupe de Galois borné, les sous-corps $A$ et $C'$ sont parfaits. On peut supposer que $C'$ est linéairement disjoint de $F$ sur $A$. L'extension $F(C')$ sur $F$ est régulière, donc la propriété PAC et la saturation donnent un $F$-homomorphisme d'algèbres $F[B(C')] \to F$. La restriction au corps $B(C')$ est un $B$-monomorphisme et l'image $C$ de $C'$ vérifie la conclusion. □

**Remarque 1.16.** Les sous-structures bornées pseudo-algébriquement closes des modèles d'une théorie stable, considérées par Pillay et Polkowska [31], satisfont toutes les hypothèses précédentes. En effet : en passant à une expansion conservatrice du langage de façon à ce que toute sous-structure soit 0-définissablement close, pour garantir l'hypothèse (3). L'hypothèse (1) correspond à ce que la sous-structure PAC soit définissablement close, l'hypothèse (2) suit des [33, Propositions 3.12 & 3.14], l'hypothèse (4) correspond à la notion d'être bornée et l'hypothèse (5) suit de la condition PAC de façon analogue au cas des corps PAC.

De façon analogue, les structures munies d'une $G$-action existentiellement closes de Hoffmann [18] dans le langage $\mathcal{L}_G$, avec des symboles $\sigma_g$ et leurs inverses, pour $g$ dans $G$, satisfont toutes les hypothèses précédentes dès que la clôture algébrique *split*, qui correspond à l'hypothèse (4) : l'hypothèse (1) est vérifiée car les modèles sont 0-définissablement clos par [18, Remark 3.20], l'hypothèse (3) est garantie dès que l'on considère une extension conservatrice du langage $\mathcal{L}$ pour que toute sous-structure soit 0-définissablement close, l'hypothèse (2) suit de [18, Fact 4.8 & Lemma 4.10]. Enfin, l'hypothèse (5) suit de la démonstration du théorème de l'indépendance [18, Lemma 4.20], lorsque le type est stationnaire (sans devoir supposer que l'ensemble de base est algébriquement clos).

## 2. Une preuve simple

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour montrer que la stabilité de $T_0$ se transfère partiellement à la théorie $T$. On montrera que $T$ est simple.

**Théorème 2.1.** *Soit une théorie stable $T_0$ avec élimination des quantificateurs et des imaginaires dans un langage $\mathcal{L}_0$. Dans une expansion $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_0$, on considère une théorie complète $T$ contenant $T_0^{\forall}$. Si le couple $(T, T_0)$ satisfait les hypothèses* (1), (2), (3), (4) *et* (5), *alors la théorie $T$ est simple.*

*Si l'on augmente le langage $\mathcal{L}$ par des constantes pour une sous-structure élémentaire de $T$, on a la caractérisation suivante :*

$$A \underset{C}{\downarrow} B \text{ si et seulement si } \langle AC\rangle \underset{\langle C\rangle}{\overset{0}{\downarrow}} \langle BC\rangle.$$

*Démonstration.* On fixe un modèle $F$ suffisamment saturée de $T$ et augmente le langage $\mathcal{L}$ par des constantes pour une sous-structure élémentaire de $T$. On pose $A \downarrow_C B$ lorsque $\langle AC\rangle \overset{0}{\downarrow}_{\langle C\rangle} \langle BC\rangle$ pour tous sous-ensembles $A$, $B$ et $C$. Nous allons vérifier que cette relation ternaire satisfait les propriétés de la définition 1.1, ce qui entraîne la simplicité de $T$ avec les constantes nommées. Par [9], il suit que $T$ est également simple.

Puisque $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{L}_0$ et $T_0$ est stable avec élimination des quantificateurs, l'indépendance ainsi définie satisfait clairement **Invariance** et **Symétrie**. Le **Caractère fini** est satisfait car l'opérateur $\langle\rangle$ est finitaire.

Notons que l'hypothèse (2) entraîne directement que $A \downarrow_B \mathrm{acl}(B)$ et que $A \downarrow_C B$ si et seulement si $\mathrm{acl}(AC) \downarrow_{\mathrm{acl}(C)} \mathrm{acl}(BC)$. On pourra donc considérer des parties algébriquement closes pour étudier l'indépendance.

Pour **Monotonie et Transitivité**, on considère des parties $A$, $B$, $C$ et $D$ algébriquement closes de $F$ telles que $C \subset A$ et $C \subset B \subset D$. Notons que si $A \downarrow_C B$ et $A \downarrow_B D$, la sous-structure $A$ est 0-indépendante de $B$ sur $C$ et de $D$ sur $B$. Elle est donc 0-indépendante de $D$ sur $C$, ce qui montre un sens de l'implication.
Supposons maintenant que

$$A \underset{C}{\overset{0}{\downarrow}} D.$$

Alors $A \overset{0}{\downarrow}_C B$, donc

$$A \underset{C}{\downarrow} B.$$

Par l'hypothèse (3), la structure $\langle AB\rangle$ est égale à la 0-structure engendrée par $A$ et $B$. Puisque

$$A \underset{B}{\overset{0}{\downarrow}} D,$$

on conclut que

$$\langle AB\rangle \underset{B}{\overset{0}{\downarrow}} D,$$

donc $A \downarrow_B D$, comme souhaité.

Remarquons que pour un uple fini $a$ de $F$, la $\mathcal{L}$-structure $\langle a\rangle$ a cardinalité bornée par $|T|$. De plus, si $B = \langle B\rangle$ est une sous-structure de $F$, alors par le caractère fini de la 0-indépendance, pour chaque uple fini $\xi$ de $\langle a\rangle$, il existe une sous-partie $C_\xi$ de $B$ de taille bornée par $|T_0| \leq |T|$ telle que

$$\xi \underset{C_\xi}{\overset{0}{\downarrow}} B.$$

Alors si l'on pose $C_1$ la $\mathcal{L}$-sous-structure engendrée par la réunion de tous les sous-ensembles $C_\xi$, lorsque $\xi$ parcourt $\langle a\rangle$, on a

$$\langle a\rangle \underset{C_1}{\overset{0}{\downarrow}} B.$$

On itère cette procédure avec $\langle aC_1\rangle$, qui a aussi cardinalité bornée par $|T|$, pour conclure que

$$\langle aC_\infty\rangle \underset{C_\infty}{\overset{0}{\downarrow}} B,$$

où $C_\infty$ est la $\mathcal{L}$-sous-structure engendrée par la réunion de tous les $C_i$. On en déduit le **Caractère local**.

Voyons maintenant que l'indépendance satisfait **Extension**. Considérons des parties algébriquement closes $A$, $B$ et $C$ de $F$ avec $C \subset A$. La remarque 1.7 donne que $\mathrm{tp}_0(A/C)$ est stationnaire. Par l'hypothèse (5), il existe $A' \models \mathrm{qftp}(A/C)$ avec $A' \overset{0}{\downarrow}_C B$. Puisque $C$ contient une sous-structure élémentaire, la remarque 1.14 et l'hypothèse (2) entraînent que $A' \models \mathrm{tp}(A/C)$, comme souhaité.

Il nous reste à montrer que l'indépendance satisfait le **Théorème de l'indépendance**. Soit donc $N$ une sous-structure élémentaire de $F$, deux parties algébriquement closes $A$ et $B$ la contenant et indépendantes sur $N$, et deux parties algébriquement closes $C$ et $D$ qui ont même type sur $N$ et vérifient

$$C \underset{N}{\downarrow} A \qquad \text{et} \qquad D \underset{N}{\downarrow} B.$$

Par **Extension**, nous pouvons supposer que $D$ est indépendante de $A$ sur $B$. Par transitivité, les sous-structures algébriquement closes $A$, $B$ et $D$ sont indépendantes sur $N$. En particulier,

$$\mathrm{acl}(AB) \underset{B}{\overset{0}{\downarrow}} \mathrm{acl}(BD).$$

Par l'hypothèse (3), la sous-structure $E$ engendrée par $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$ est parfaite et coïncide avec la $\mathcal{L}_0$-sous-structure engendrée par $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$.
Vérifions maintenant que $\mathrm{tp}_0(E/\langle AD\rangle)$ est stationnaire. Par l'hypothèse (1), on peut supposer que sa base canonique est contenue dans

$$E \cap \mathrm{acl}_0(AD) = E \cap \mathrm{acl}(AD) = \langle \mathrm{acl}(AB), \mathrm{acl}(BD)\rangle \cap \mathrm{acl}(AD).$$

Par la proposition 1.13, cette intersection est égale à $\langle AD\rangle$, ce qui donne la stationnarité du type $\mathrm{tp}_0(E/\langle AD\rangle)$.
Puisque

$$A \underset{N}{\overset{0}{\downarrow}} C \qquad \text{et} \qquad A \underset{N}{\overset{0}{\downarrow}} D,$$

l'hypothèse (3) donne que $\langle AD\rangle \models \mathrm{qftp}(\langle AC\rangle/N)$. Cet $\mathcal{L}$-isomorphisme partiel induit un $N$-isomorphisme entre $F$ et un autre modèle suffisamment saturé $F_1$ de $T$ tel que $\mathrm{acl}(AC)$ est $\mathcal{L}$-isomorphe avec $\mathrm{acl}_0(AD) \cap F_1$. En particulier, nous avons l'égalité $\mathrm{tp}_{F_1}(D/A) = \mathrm{tp}_F(C/A)$.
L'hypothèse (5) nous permet d'obtenir, à l'intérieur du modèle suffisamment saturé $F_1$, une copie $E_1$ de $E$ sur $\langle AD\rangle$ qui est 0-indépendante de $\mathrm{acl}_0(AD) \cap F_1$. Par la remarque 1.14, les copies de $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$ dans $E_1$ sont algébriquement closes dans $F_1$. Ainsi, la copie

$B_1$ de $B$ correspondante vérifie :

$$\mathrm{tp}_F(B/D) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/D) \text{ et } \mathrm{tp}_F(B/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/A).$$

Par saturation, il existe $B'D'$ dans $F$ tels que $\mathrm{tp}_F(B'D'/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1D/A)$. Puisque $\mathrm{tp}_F(B'/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/A) = \mathrm{tp}_F(B/A)$, on peut supposer que $B = B'$, ce qui permet de conclure. □

Les sous-structures PAC bornées d'une théorie superstable sont supersimples [33, Corollary 3.22]. Ce résultat est vérifié dès que les deux langages coïncident :

**Corollaire 2.2.** *Quand $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ (ou plus généralement, quand $\mathcal{L}$ ne contient pas de nouveaux symboles de fonctions), si $T_0$ est superstable, alors $T$ est supersimple.*

**Définition 2.3.** Étant donné un entier $n \geq 2$, un *problème complet de $n$-amalgamation réelle sur une sous-structure $E$* est la donnée d'une famille des types $p_w(x_w)$ sur $E$ à variables réelles, indexée par les sous-parties propres de $\{1, \ldots, n\}$, telle que :

- si $w \subset w'$, alors $p_{w'}(x_{w'}) \restriction x_w \supset p_w$ ;
- si $a_w \models p_w$, alors
  - $a_w \subset \mathrm{acl}(E, \{a_i\}_{i \in w})$, où $a_i$ est $a_w \restriction \{i\}$ ;
  - l'ensemble $\{a_i\}_{i \in w}$ est $E$-indépendant.

Une théorie simple a la propriété de *$n$-amalgamation réelle* si tout problème complet de $n$-amalgamation réelle admet un type $p_{\{1,\ldots,n\}}$ complétant la famille et tel que les propriétés ci-dessus sont conservées.

Notons que toute théorie simple a la propriété de 3-amalgamation réelle sur les sous-structures élémentaires, car celle-ci est une reformulation du théorème de l'indépendance.

En utilisant la proposition 1.13, la démonstration ci-dessus s'adapte facilement pour montrer le résultat suivant :

**Corollaire 2.4.** *Pour tout entier $n$, la théorie $T$ a la propriété de $n$-amalgamation réelle sur toute sous-structure élémentaire.*

**Remarque 2.5.** Dans le théorème 2.1, si la théorie $T_0$ est fortement minimale, alors le **Théorème de l'indépendance** est vérifié au-dessus de tout ensemble algébriquement clos contenant une sous-structure élémentaire, car la proposition 1.13 est alors valable sur un tel ensemble. En particulier, toutes les théories de corps du fait 1.15 satisfont le **Théorème de l'indépendance** sur toute $\mathcal{L}$-sous-structure algébriquement close contenant une sous-structure élémentaire. En revanche, on ignore si c'est le cas pour les sous-structures bornées pseudo-algébriquement closes d'une théorie stable quelconque [31].

Une traduction directe de [20, Proposition 4.7] donne l'élimination des imaginaires de $T$ au-dessus d'une sous-structure élémentaire nommée. On retrouve ainsi une démonstration uniforme de l'élimination des imaginaires des théories du fait 1.15.

**Corollaire 2.6.** *Au-dessus de constantes pour une sous-structure élémentaire, la théorie $T$ élimine géométriquement les imaginaires. De plus, elle élimine les imaginaires dès que le théorème d'indépendance est vrai sur toute sous-structure algébriquement close.*

*Démonstration.* Vérifions d'abord que la théorie $T$ élimine géométriquement les imaginaires au-dessus d'une sous-structure élémentaire nommée. Soit $e = f(a)$ un imaginaire qui est l'image d'un uple réel $a$ par une fonction $f$ définissable sans paramètres. Posons $E$ la collection d'éléments réels de $F$ algébriques sur $e$.

Si $a$ est algébrique sur $E$, alors on a le résultat. Sinon, puisque $E$ est algébrique sur $e$, il suffit de montrer que $e$ est algébrique sur $E$. Notons $A = \mathrm{acl}(E, a)$. Le lemme de Neumann [28] entraîne qu'il existe $B$ réalisant le type $\mathrm{tp}(A/E, e)$ avec

$$A \cap B = E.$$

En particulier, l'ensemble $B$ est égal à $\mathrm{acl}(E, b)$ avec $b \equiv_{E,e} a$, donc $f(b) = e = f(a)$. Construisons maintenant une suite de sous-structures $\{A_i = \mathrm{acl}(E, a_i)\}_{i<\omega}$ contenant $E$, avec $A_1 = A$ et $A_2 = B$ telle que $A_n A_{n+1} \equiv_E A, B$ et

$$A_{n+1} \underset{A_n}{\downarrow} A_1, \ldots, A_{n-1}.$$

Alors $A_i \cap A_j = E$ pour tout $i \neq j$ et par **Transitivité**

$$A_k \underset{A_j}{\downarrow} A_i$$

pour tout $i < j < k$.

Un argument à la Ramsey nous permet de supposer que la suite $\{A_i\}_{i<\omega}$ est $E$-indiscernable. L'élimination de quantificateurs de $T_0$ entraîne que cette suite est également $\mathcal{L}_0$-indiscernable sur $E$. La stabilité de $T_0$ donne qu'elle est totalement $\mathcal{L}_0$-indiscernable.

La remarque 1.7 implique que le type $\mathrm{tp}_0(A_3/A_1)$ est stationnaire et de même pour $\mathrm{tp}_0(A_3/A_2)$. Puisque $A_3 \downarrow_{A_2} A_1$, la caractérisation de l'indépendance entraîne que

$$A_3 \underset{A_2}{\downarrow^0} A_1.$$

Comme $A_1A_2A_3$ a même $T_0$-type que $A_2A_1A_3$, on conclut que $A_3 \downarrow^0_{A_1} A_2$. La base canonique $\mathrm{Cb}_0(A_3/A_1A_2)$ est contenue dans $\mathrm{dcl}_0(A_1) \cap \mathrm{dcl}_0(A_2) = \mathrm{dcl}_0(E)$, par la remarque 1.6. Ainsi

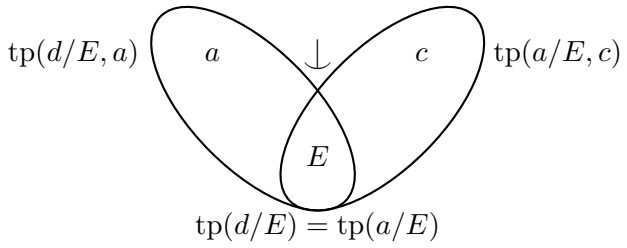
$$A_3 \underset{E}{\downarrow^0} A_1A_2,$$

ce qui entraîne que $A_3$ et $A_1$ sont $T$-indépendants sur $E$. En particulier, l'imaginaire $e$ est algébrique sur $E$, ce qui donne l'élimination géométrique des imaginaires.

Supposons maintenant que la théorie $T$ vérifie le **Théorème de l'indépendance** sur toute structure algébriquement close. Pour montrer que $T$ élimine les imaginaires au-dessus de la sous-structure élémentaire nommée, il suffit de montrer qu'elle les élimine faiblement par la remarque 1.5. L'indépendance

$$A_3 \underset{E}{\downarrow^0} A_1,$$

donne deux réalisations $\tilde{a}$ et $c$ du type $\mathrm{tp}(a/E)$ indépendantes sur $E$ telles que $f(c) = f(\tilde{a}) = f(a) = e$. On peut supposer que $c$ est indépendant de $a$ sur $E$. Pour montrer que $e$ est définissable sur $E$, il suffit de montrer que la valeur de $f$ est constante sur toute autre réalisation du type $\mathrm{tp}(a/E)$. Sinon, soit $d$ une réalisation avec $f(d) \neq f(a)$. Si $\tilde{d}$ réalise le type $\mathrm{tp}(d/E, c)$ et est indépendante de $a$, la **Transitivité** donne que $\tilde{d} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_E a$ et $f(\tilde{d}) \neq f(c) = f(a)$. On peut supposer que $d$ est indépendante de $a$. Les types $\mathrm{tp}(a/E, c)$ et $\mathrm{tp}(d/E, a)$ sont deux extensions non-déviantes du type $\mathrm{tp}(a/E)$ et on a $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_E a$. Le **Théorème de l'indépendance** appliqué au diagramme




donne une réalisation $\zeta$ indépendante de $c, a$ sur $E$ avec

$$\zeta \models \mathrm{tp}(d/E, a) \text{ et } \zeta \models \mathrm{tp}(a/E, c).$$

En particulier $f(\zeta) \neq f(a) = f(c) = f(\zeta)$, ce qui est une contradiction.

□

**Remarque 2.7.** Notons que la démonstration ci-dessus s'appuie uniquement sur le fait que $T$ est une théorie simple contenant la partie universelle d'une théorie stable $T_0$ qui élimine les quantificateurs et les imaginaires dans un sous-langage $\mathcal{L}_0$ telle que :

— la théorie $T$ satisfait les hypothèses (1) et (2) ;
— pour des sous-structures algébriquement closes $A$ et $B$ d'un modèle suffisamment saturé $F$ de $T$,

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A\cap B} B \text{ si et seulement si } A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_{A\cap B} B \ ;$$

— la théorie $T$ vérifie le **Théorème de l'Indépendance** sur toute structure algébriquement close.

En particulier, la théorie d'un corps algébriquement clos muni d'un prédicat générique élimine les imaginaires.

Certains corps munis d'opérateurs considérés dans le fait 1.15 sont stables, notamment les corps différentiellement clos et les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini. Dans ces deux cas, le $\mathcal{L}$-type d'un uple $a$ est déterminé par le $\mathcal{L}$-type sans quantificateurs de sa clôture définissable.

**Corollaire 2.8.** *Supposons que deux uples $a$ et $b$ dans $T$ ont même type dès qu'il existe un $\mathcal{L}$-isomorphisme de leurs clôtures parfaites qui envoie $a$ sur $b$. La théorie $T$ est alors stable.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que tout type sur un ensemble algébriquement clos contenant une sous-structure élémentaire est stationnaire, ce qui suit directement de l'hypothèse (3) si $T$ satisfait la propriété ci-dessus. □

## 3. Groupes et plongements

Tout groupe définissable dans un corps différentiellement clos se plonge comme sous-groupe d'un groupe algébrique, ce qui a été montré par Pillay [29] pour répondre à une question de Kolchin. Cette caractérisation joue un rôle important dans la théorie de Galois différentielle des extensions de Picard-Vessiot [30]. Kowalski et Pillay ont obtenu un résultat similaire [24], modulo un noyau fini, pour tout groupe connexe définissable dans un corps aux différences générique. Il existe des résultats analogues pour décrire les groupes définissables dans de nombreuses théories de corps, purs ou munis d'opérateurs, par exemple dans un corps pseudo-fini [21] ou dans un corps séparablement clos [26, 7]. Dans ce dernier cas, tout groupe définissable dans un corps séparablement clos $L$ est définissablement isomorphe aux points $L$-rationnels d'un groupe algébrique défini sur $L$.

Les démonstrations pour chacun de ces exemples s'appuient de façon essentielle sur le théorème de configuration de groupe, dû à Hrushovski [17], qui est une généralisation abstraite du résultat de Weil [35] produisant un groupe algébrique à partir d'une loi de groupe birationnelle. La construction de Hrushovski donne un groupe connexe constitué des germes de fonctions génériquement définies. Même dans le cas de la théorie des corps algébriquement clos, le groupe des germes ainsi obtenu n'est pas forcément un groupe algébrique, mais pro-algébrique : une limite inverse de groupes définissables.

Soit $G$ un groupe type-définissable dans une théorie simple. Un élément $g$ dans $G$ est *générique (à gauche)* sur l'ensemble des paramètres $A$ si

$$h \cdot g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\, A, h$$

dès que

$$h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A} g.$$

Un type est générique (à gauche) si toutes ses réalisations le sont. Les types génériques existent : ils coïncident avec les types dans $G$ de rang stratifié local maximal. En particulier, un type est générique à droite si et seulement s'il l'est à gauche. Toute extension ou restriction non-déviante d'un type générique l'est aussi. L'inverse d'un générique est également générique. Enfin, le produit de deux génériques indépendants l'est aussi et est indépendant de chaque facteur. En outre, tout élément de $G$ peut s'écrire comme le produit de deux génériques, pas forcément indépendants entre eux.

Étant donné un ensemble de paramètres $A$, la *composante connexe* $G^0_A$ de $G$ sur $A$ est l'intersection de tous les sous-groupes $G$ d'indice borné type-définissables sur $A$. Le sous-groupe $G^0_A$ est distingué et type-définissable sur $A$ d'indice borné. Le groupe $G$ est *connexe sur* $A$ si $G = G^0_A$. Si la théorie est stable ou supersimple, alors la composante connexe sur $A$ d'un groupe type-définissable est l'intersection des sous-groupes définissables d'indice fini. Pour une théorie stable, la composante connexe ne dépend pas de l'ensemble de paramètres choisi et elle est définissable sur le même ensemble de paramètres que $G$. De plus, chaque classe de $G^0$ contient un seul type générique et $G$ agit par translation sur l'ensemble des

types génériques, qui sont en correspondance avec $G/G^0$. Dans la cas d'une théorie simple, la composante connexe peut contenir plusieurs types génériques. En revanche, on a un résultat partiel [32, Proposition 2.2].

**Proposition 3.1.** *Au-dessus d'une sous-structure élémentaire $N$, étant donnés trois types génériques $p$, $q$ et $r$ de $G^0_N$, alors il existe deux réalisations $g \models p$ et $h \models q$ indépendantes sur $N$ telles que $g \cdot h \models r$.*

Ziegler [36, Theorem 1] montre une sorte de contraposée à la proposition précédente, qui se généralise facilement au cas d'une théorie simple [5, lemme 1.2]. Elle permet de déduire le résultat suivant :

**Lemme 3.2.** *À l'intérieur d'un modèle d'une théorie simple, soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes types-définissables sur une sous-structure élémentaire $N$. Étant donnés des éléments $a_1$ et $b_1$ de $G_1$, $a_2$ et $b_2$ de $G_2$ tels que :*

*(1) les éléments $a_1$ et $a_2$, sont interdéfinissables sur $N$, et de même pour $b_1$ et $b_2$, ainsi que pour $a_1 \cdot b_1$ et $a_2 \cdot b_2$ ;*

*(2) les éléments $a_1$, $b_1$ et $a_1 \cdot b_1$ sont indépendants deux-à-deux sur $N$ ;*

*alors, l'élément $a_1$, resp. $a_2$, est générique dans un translaté type-définissable sur $N$ d'un sous-groupe $H_1$ type-définissable sur $N$ de $G_1$, resp. $H_2$ de $G_2$. En outre, les sous-groupes $H_1$ et $H_2$ sont connexes et définissablement isomorphes sur $N$ .*

Notons que les sous-groupes $H_1$ et $H_2$ sont uniques, à commensurabilité près. Ce lemme s'adapte facilement au cas des groupes $*$-définissables.

**Remarque 3.3.** Si nous avons des éléments seulement interalgébriques dans le lemme précédent, alors les groupes obtenus sont définissablement isogènes : une correspondance à fibres finies entre deux sous-groupes d'indice borné.

Par la suite, fixons une théorie $T$ satisfaisant les hypothèses (1), (2), (3), (4) et (5) par rapport à une théorie stable $T_0$ avec élimination des quantificateurs et des imaginaires. On travaille à l'intérieur d'un modèle $F$ de $T$ suffisamment saturé.

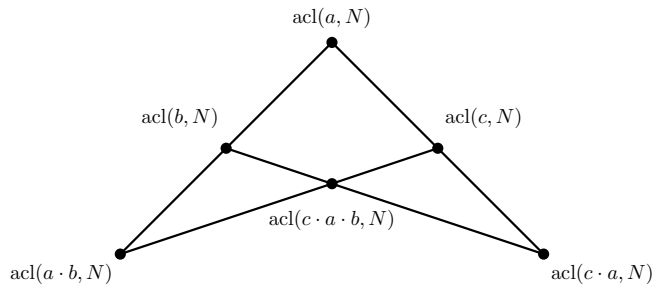
**Proposition 3.4.** *Soit $G$ un groupe type-définissable sur une sous-structure élémentaire $|T|^+$-saturée $N$ de $F$.*

- *Si $F$ est $\mathcal{L}_0$-définissablement clos, alors $G$ est isogène à un sous-groupe de $H(F)$, avec $H$ un groupe $\mathcal{L}_0$-définissable sur $N$.*
- *Si $T_0$ est la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique fixée, alors $G$ est isogène à un sous-groupe de $H(F)$, avec $H$ un groupe algébrique sur $N$.*
- *Si la théorie $T$ est stable ou supersimple et $T_0$ est la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique fixée, alors tout groupe définissable admet un sous-groupe définissable d'indice fini qui s'envoie par un morphisme définissable à noyau fini dans le sous-groupe des points $F$-rationnels d'un groupe algébrique défini sur $N$.*

*Démonstration.* En prenant la composante connexe sur $N$ de $G$, on peut supposer que $G$ est connexe sur $N$. Pour deux génériques indépendants $a$ et $b$ du groupe $G$ sur $N$, les hypothèses (2) et (3) donnent l'inclusion suivante :

$$\operatorname{acl}(a \cdot b, N) \subset \operatorname{acl}_0(\operatorname{acl}(a, N) \cup \operatorname{acl}(b, N)).$$

En prenant trois génériques $a$, $b$ et $c$ de $G$ indépendants sur $N$, on obtient la $T_0$-configuration de groupe suivante :




À partir de cette configuration, on peut construire de façon analogue à [21] un groupe connexe $\mathcal{L}_0$-$*$-définissable $H^*$ sur $N$ et deux génériques $h^*$ et $h'^*$ indépendants de $H^*$ dans $\mathrm{dcl}_0(F)$ tels que les éléments $\mathrm{acl}(a, N)$ et $h^*$ sont $\mathcal{L}_0$-interalgébriques sur $N$, et de même pour $\mathrm{acl}(b, N)$ et $h'^*$, ainsi que pour $\mathrm{acl}(a \cdot b, N)$ et $h^* \cdot h'^*$. Par stabilité et élimination des imaginaires de $T_0$, on peut supposer que le groupe $H^*$ est une limite inverse de groupes $\mathcal{L}_0$-définissables sur $N$. Il existe ainsi un groupe $H$ de cette limite inverse et deux génériques $h$ et $h'$ indépendants de $H$ tel que $a \in \mathrm{acl}_0(h, N)$ et $h \in \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a, N)) \cap \mathrm{dcl}_0(F)$ (et de même pour $b$ relativement à $h'$, et $a \cdot b$ relativement à $h \cdot h'$).

Quand $F$ n'est pas $\mathcal{L}_0$-définissablement clos, on ne sait pas de façon générale si les génériques $h$, $h'$ et $h \cdot h'$ tombent dans $H(F)$ ni si ce dernier ensemble forme un sous-groupe. Par contre, si $F$ est $\mathcal{L}_0$-définissablement clos, la remarque 3.3 entraîne que $G$ est isogène à un sous-groupe de $H(F)$. Ce sous-groupe peut être propre car le $\mathcal{L}_0$-générique $h$ n'est pas forcement un générique de $H$ au sens de $T$.

Si $T_0$ est la la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique positive fixée, on peut supposer que $H$ est également connexe sur $N$. Par **Caractère fini**, il existe une sous-structure élémentaire $N_0$ de $N$ de taille $|T|$ contenant tous les paramètres témoignant les interalgébricités ci-dessus et les paramètres nécessaires pour définir $H$. Par saturation de $N$, il existe une suite $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}_0$-génériques indépendants de $H$ sur $N_0$ qui appartiennent au corps $k = \mathrm{dcl}_0(F) \cap \mathrm{acl}_0(N)$.
Par la remarque 1.7, le $\mathcal{L}_0$-type d'éléments de $\mathrm{dcl}_0(F)$ sur $N_0$ est stationnaire. L'indépendance algébrique pour un $\mathcal{L}_0$-type stationnaire est équivalente au fait que les corps engendrés soient linéairement disjoints. Ainsi, une adaptation directe de la démonstration du [6, Theorem 1-B] entraîne l'existence d'un corps $k_0$ finiment engendré sur $N_0$ contenu dans $k$ et d'une bijection $\mathcal{L}_0$-définissable $f$ sur $k_0$ tels que $f(h^{-1}) \in k_0(f(h))$ et $f(h \cdot h')$ appartient à $k_0(f(h), f(h'))$ (où $h^{-1}$ est l'inverse de $h$ dans le groupe $H$). En composant avec une certaine puissance du Frobenius, on peut supposer que $k_0 \subset N$ et que $f(h)$ et $f(h')$ sont dans $F$. Par le théorème de Weil [7, Theorem 4.1], on obtient un groupe algébrique $\tilde{H}$ défini sur $k_0$ et deux génériques $\tilde{h}$ et $\tilde{h}'$ indépendants sur $N$ tel que $a \in \mathrm{acl}_0(\tilde{h}, N)$ et $\tilde{h} \in \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a, N)) \cap \mathrm{dcl}_0(F)$ (et de même pour $b$ relativement à $\tilde{h}'$, et $a \cdot b$ relativement à $\tilde{h} \cdot \tilde{h}'$). La remarque 3.3 entraîne à nouveau que $G$ est isogène à un sous-groupe de $\tilde{H}(F)$.

Si $T$ est stable ou supersimple, la composante connexe sur $N$ d'un groupe définissable est l'intersection des sous-groupes $N$-définissables d'indice fini. Un argument de compacité entraîne l'existence d'un sous-groupe définissable de $G$ d'indice fini qui se plonge à noyau fini dans les points $F$-rationnels $H(F)$ d'un groupe $\mathcal{L}_0$-définissable. On en déduit le résultat souhaité. □

En supposant un certain contrôle sur la clôture définissable, nous allons montrer comment le théorème de Weil-Hrushovski permet de plonger définissablement tout groupe type-définissable connexe à l'intérieur d'un groupe $L_0$-définissable. On retrouve alors les résultats connus dans le cas différentiel et pour les $\sigma$-groupes dont le produit est donné par des fonctions $\sigma$-rationnelles ainsi qu'une version faible du cas des corps séparablement clos.

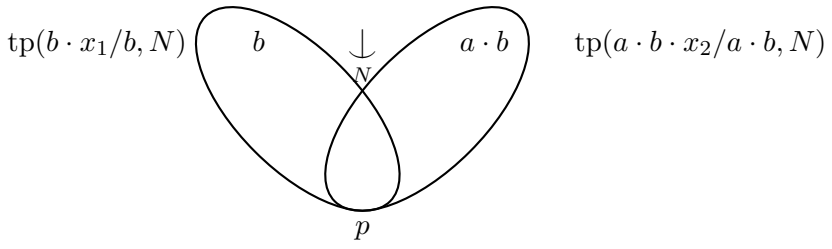
**Proposition 3.5.** *Soit $G$ un groupe connexe type-définissable à paramètres dans une sous-structure élémentaire $|T|^+$-saturée $N$ de $F$ tel que, lorsque $a$ et $b$ sont deux génériques indépendants de $G$ sur $N$, on a*

$$\mathrm{dcl}(a \cdot b, N) \subset \mathrm{dcl}_0(\mathrm{dcl}(a, N) \cup \mathrm{dcl}(b, N)). \tag{$\natural$}$$

*Alors, si $F$ est $\mathcal{L}_0$-définissablement clos ou si $T_0$ est la théorie des corps algébriquement clos, il existe un groupe $\mathcal{L}_0$-définissable $H$ à paramètres dans $N$ tel que le groupe $G$ se plonge définissablement dans le sous-groupe $H(F)$ constitué des points $F$-rationnels.*
*Lorsque $T_0$ est la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique fixée, on peut supposer que le groupe $H$ est un groupe algébrique.*

*Démonstration.* Pour la preuve, on travaille au-dessus de la sous-structure élémentaire $N$. Soient $a$ et $b$ deux réalisations indépendantes du même type générique $p$ de $G$ sur $N$.

Vérifions d'abord que l'on peut supposer qu'il existe une réalisation $c$ de $p$ indépendante de $a, b$ telle que chacun des éléments dans $\{a, b, a \cdot b, c, b \cdot c, a \cdot b \cdot c\}$ réalise le type $p$.
Par la proposition 3.1, il existe $x_1 \models p$ indépendant de $a, b$ avec $b \cdot x_1 \models p$. De même, il existe $x_2 \models p$ indépendant de $a, b$ avec $a \cdot b \cdot x_2 \models p$. Le **Théorème de l'indépendance** appliqué au diagramme suivant entraîne l'existence d'un élément $c$ comme souhaité.




Posons $a^* = \mathrm{dcl}(a, N)$, et de même pour $b$, $c$ et les produits correspondants. Notons que $a^*$, $b^*$, $(a \cdot b)^*$, $c^*$, $(c \cdot a)^*$ et $(c \cdot a \cdot b)^*$ sont des réalisations du même $T_0$-type sur $N$, que l'on note $p_0$. Par la remarque 1.7, le type $p_0$ est stationnaire. Par la condition ($\natural$), il existe

une fonction 0-définissable $f$ définie sur $p_0^{\otimes 2}$ avec $(a \cdot b)^* = f(a^*, b^*)$. La caractérisation de l'indépendance donne que l'uple $(a^*, b^*, c^*)$ réalise $p_0^{\otimes 3}$ et

$$f(a^*, f(b^*, c^*)) = (a \cdot b \cdot c)^* = f(f(a^*, b^*), c^*).$$

La démonstration du théorème de groupes génériquement présentés de Hrushovski [17, Theorem 1] adaptée aux uples infinis (cf. [24, Theorem 4.1]) donne un groupe $\mathcal{L}_0$-$*$-définissable $H^*$ sur $N$ tel que son générique $h^*$ est $\mathcal{L}_0$-interdéfinissable avec $a^*$.

De même que précédemment, il existe alors un groupe $\mathcal{L}_0$-définissable $H$ et deux génériques $h$ et $h'$ indépendants de $H$ tel que $a \in \mathrm{dcl}_0(h, N)$ et $h \in \mathrm{dcl}_0(a^*)$ (et de même pour $b$ relativement à $h'$, et $a \cdot b$ relativement à $h \cdot h'$). Si $F$ est $\mathcal{L}_0$-définissablement clos, le lemme 3.2 entraîne que $G$ se plonge dans un sous-groupe de $H(F)$. Si $T_0$ est la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique positive, on peut supposer comme auparavant que $H$ est un groupe algébrique défini sur $N$, tel que $h$, $h'$ et $h \cdot h'$ sont dans $F$.

□

**Remarque 3.6.** Si $G$ n'est pas connexe et la théorie $T$ est stable ou supersimple, le même argument que celui de la fin de la démonstration de la proposition 3.4 entraîne l'existence d'un sous-groupe définissable de $G$ d'indice fini qui se plonge dans les points $F$-rationnels $H(F)$ du groupe $\mathcal{L}_0$-définissable $H$. Ceci permet de plonger sans peine $G$ définissablement dans $H_1(F)$, pour un groupe $H_1$ aussi $\mathcal{L}_0$-définissable (cf. la démonstration de [7, Proposition 4.9]).

Dans un contexte qui nous semble similaire, l'existence de types génériques définissables permet d'étudier les groupes définissables dans certains corps valués enrichis [34].

## 4. Annexe : Théorème de l'indépendance, le retour

L'approche des parties précédentes permet de montrer la simplicité de certaines théories à partir de la stabilité d'une théorie ambiante $T_0$, en vérifiant que l'indépendance dans $T_0$ induit directement la non-déviation dans ces nouvelles théories. Certaines théories stables (ou simples) ne rentrent pas dans ce contexte, entre-autres les paires propres de corps algébriquement clos ou les corps séparablement clos (ou PAC bornés) de degré d'imperfection infini. Dans ces exemples, la non-déviation est donnée en ajoutant une condition à l'indépendance algébrique. Cependant, nous allons voir dans cette annexe que la démonstration du **Théorème de l'indépendance** s'adapte facilement à ce cadre. De plus, l'étude des groupes précédente s'étend ici également sans difficulté.

On utilisera les mêmes notations que précédemment pour les théories $T$ et $T_0$. Afin de considérer les exemples ci-dessus, la théorie $T$ est remplacée par le diagramme élémentaire d'un modèle de $T$ (et on augmente $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}$ par les constantes qui énumèrent ce modèle).

Deux $\mathcal{L}$-sous-structures $A$ et $B$ d'un modèle suffisamment saturé $F$ de $T$ telles que leur intersection $C$ est algébriquement close, sont $\star$-*indépendantes* au-dessus de $C$ si

$$A \underset{C}{\overset{0}{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}} B$$

et la $\mathcal{L}$-sous-structure $\langle A, B\rangle$ est parfaite et coïncide avec $\langle A, B\rangle_0 \cap F$, où $\langle A, B\rangle_0$ dénote la $\mathcal{L}_0$-sous-structure de $F$ engendrée par $A, B$. Plus généralement, deux parties $X$ et $Y$ de

$F$ sont $\star$-*indépendantes* au-dessus d'une structure algébriquement close $C$ si $\mathrm{acl}(X,C)$ et $\mathrm{acl}(Y,C)$ le sont. Dans ce cas, on note $X \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\star}_{C} Y$.

Dans le cas des corps séparablement clos (ou plus généralement PAC bornés) de degré d'imperfection $e$ (avec $e$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) et munis des $\lambda$-fonctions, la propriété $\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle_0 \cap F$ équivaut à ce que l'extension $F$ sur le sous-corps engendré par $A$ et $B$ soit séparable, c'est-à-dire, que $F^p$ et le sous-corps $A \cdot B$ engendré par $A$ et $B$ soient linéairement disjoints sur $(A \cdot B)^p$. En degré d'imperfection fini, cette propriété est toujours vérifiée (car l'on a ajouté au langage des symboles de constantes pour une $p$-base). De la même façon, pour les paires $(K, k)$ de corps algébriquement clos dans le langage de Delon [15], la propriété précédente équivaut au fait que $k$ et le corps $A \cdot B$ engendré par $A$ et $B$ soient linéairement disjoints au-dessus de leur intersection $k \cap (A \cdot B)$.

Pour la théorie des automorphismes génériques de corps séparablement clos de degré d'imperfection infini [10], la $\star$-indépendance dans le langage $\mathcal{L}_{\sigma,\lambda}$ des corps aux différences munis des fonctions $\lambda$ correspond à la non-déviation [10, Corollary 3.8]. Ceci est également le cas pour la modèle compagne $\mathrm{SCFE}_{p,e}$ des corps $K$ séparablement clos de caractéristique $p$ et de degré d'imperfection $e$ avec un endomorphisme $\sigma$ non surjectif, vérifiant que $\sigma(K)^{alg} \subset K$, dans le langage $\mathcal{L}_{\sigma,\lambda}$ complété par la fonction partielle $\sigma^{-1}$ et les fonctions du langage de Delon pour la paire $(K, \sigma(K))$ [12, Corollary 4.16].

Dans ces exemples, on vérifie directement que la $\star$-indépendance satisfait la **Transitivité**, les **Caractères fini et local** et l'**Extension**. Nous allons isoler des conditions, qui nous semblent naturelles, permettant de vérifier le **Théorème de l'indépendance** de manière unifiée. Ainsi, on retrouve le fait que la non-déviation correspond à la description ci-dessus pour les exemples précédents.

Puisque les $\lambda$-fonctions relatives sur une somme ou un produit sont des expressions polynomiales sur les $\lambda$-fonctions de chaque facteur, on vérifie facilement que les exemples ci-dessus satisfont l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3$^\star$.** *Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\star}_{C} B$ et $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\star}_{C} B$, avec $A' \models \mathrm{qftp}(A/C)$, alors*

$$\langle A', B\rangle \models \mathrm{qftp}(\langle A, B\rangle/C).$$

Par la description des types dans la théorie des paires propres de corps algébriquement clos et dans les corps séparablement clos (ou plus généralement PAC bornés) de degré d'imperfection infini, l'hypothèse suivante est vérifiée :

**Hypothèse 5$^\star$.** *Étant donné un autre modèle $F'$ de $T$ contenant une sous-structure parfaite $C'$ au-dessus d'une sous-structure commune $A \subset F \cap F'$ parfaite dans $F$ et $F'$, si $\mathrm{tp}_0(C'/A)$ est stationnaire, alors il existe une sous-structure parfaite $C$ de $F$ contenant $A$ qui est $\mathcal{L}$-isomorphe à $C'$ au-dessus de $A$.*

Avec ces hypothèses, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.1.** *Si la théorie $T$ satisfait les hypothèses* (1), (2), (3$^\star$), (4) *et* (5$^\star$) *par rapport à $T_0$, alors le* **Théorème de l'indépendance** *est vérifié par la $\star$-indépendance dès que les propriétés de* **Monotonie**, **Transitivité** *et* **Extension** *sont valables pour $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\star}$ au-dessus de parties algébriquement closes.*

*De plus, si $T_0$ est une théorie fortement minimale, alors $T$ satisfait le* **Théorème de l'indépendance** *par rapport à la $\star$-indépendance sur tout ensemble algébriquement clos.*

*Démonstration.* Soit donc une sous-structure élémentaire $N$ de $F$, deux parties algébriquement closes $A$ et $B$ la contenant et deux parties algébriquement closes $C$ et $D$ qui ont même type sur $N$ et vérifient

$$C \underset{N}{\downarrow^{\star}} A \qquad \text{et} \qquad D \underset{N}{\downarrow^{\star}} B.$$

Par **Extension**, nous pouvons supposer que $\mathrm{acl}(D, B)$ est $\star$-indépendant de $\mathrm{acl}(A, B)$ sur $B$. Par monotonie et transitivité, les sous-structures algébriquement closes $A$, $B$ et $D$ sont $\star$-indépendantes sur $N$ (dans le sens précédent). En particulier,

$$\mathrm{acl}(AB) \underset{B}{\downarrow^{0}} \mathrm{acl}(BD),$$

et la sous-structure $E$ engendrée par $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$ est parfaite et coïncide avec la $\mathcal{L}_0$-sous-structure engendrée par $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$.

On vérifie comme auparavant que $\mathrm{tp}_0(E/\langle AD\rangle)$ est stationnaire, par l'hypothèse (1) et la démonstration de la proposition 1.13, puisque

$$\mathrm{acl}(A, D) = \mathrm{acl}_0(A, D) \cap F\,,\ \mathrm{acl}(B, D) = \mathrm{acl}_0(B, D) \cap F \text{ et } \mathrm{acl}(A, B) = \mathrm{acl}_0(A, B) \cap F.$$

Puisque

$$A \underset{N}{\downarrow^{\star}} C \qquad \text{et} \qquad A \underset{N}{\downarrow^{\star}} D,$$

alors $\langle AD\rangle \models \mathrm{qftp}(\langle AC\rangle/N)$, par l'hypothèse ($3^\star$). Cet $\mathcal{L}$-isomorphisme partiel induit un $N$-isomorphisme entre $F$ et un autre modèle suffisamment saturé $F_1$ de $T$ tel que $\mathrm{acl}(AC)$ est $\mathcal{L}$-isomorphe avec $\mathrm{acl}_0(AD) \cap F_1$, avec $\mathrm{tp}_{F_1}(D/A) = \mathrm{tp}_F(C/A)$.

Ainsi, à l'intérieur du modèle suffisamment saturé $F_1$, on obtient grâce à l'hypothèse ($5^\star$) une copie $E_1$ de $E$ sur $\langle AD\rangle$. Par la remarque 1.14, les copies de $\mathrm{acl}(AB)$ et $\mathrm{acl}(BD)$ dans $E_1$ sont algébriquement closes dans $F_1$. Ainsi, la copie $B_1$ de $B$ correspondante vérifie :

$$\mathrm{tp}_F(B/D) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/D) \text{ et } \mathrm{tp}_F(B/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/A).$$

Par saturation, il existe $B'D'$ dans $F$ tels que $\mathrm{tp}_F(B'D'/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1D/A)$. Puisque $\mathrm{tp}_F(B'/A) = \mathrm{tp}_{F_1}(B_1/A) = \mathrm{tp}_F(B/A)$, on peut supposer que $B = B'$, ce qui permet de conclure. □

## Références


[1] J. Ax, *The elementary theory of finite fields*, Ann. of Math. **88**, (1968), 239–271.

[2] John T. Baldwin, Saharon Shelah, *Model companions of $T_{\mathrm{Aut}}$ for stable $T$*, Notre Dame J. Formal Logic 42 (2001), no. 3, 129 – 142 (2003).

[3] I. Ben-Yaacov, I. Tomasic, F. O. Wagner, *Constructing an almost hyperdefinable group*, J. Math. Log. **4**, (2004), 181–212.

[4] Ö. Beyarslan, Z. Chatzidakis, *Geometric representation in the theory of pseudo-finite fields*, J. Symbolic Logic **82**, (2017), 1132–1139.

[5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. O. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, J. Symbolic Logic **81**, (2016), 1–31.

[6] E. Bouscaren, *Model theoretic versions of Weil's theorem on pregroups*, Notre Dame Math. Lectures **11**, (1989), 177-185.

[7] E. Bouscaren, F. Delon, *Groups definable in separably closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, (2002), 945–966.

[8] Ronald Bustamante Medina, Differentially closed fields of characteristic zero with a generic automorphism, Revista de Matemática : Teoría y Aplicaciones, vol. 14 (2007), pp. 81 – 100.

[9] E. Casanovas, *The number of types in simple theories*, Ann. Pure Appl. Logic **98**, (1999), 69–86.

[10] Zoé Chatzidakis, Generic automorphisms of separably closed fields, Illinois J. Math. 45 (2001), no. 3, 693 – 733.

[11] Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, *Model theory of difference fields*, Trans. Am. Math. Soc. **351**, (1999), 2997–3071.

[12] Zoé Chatzidakis, Ehud Hrushovski, Model theory of endomorphisms of separably closed fields. J. Algebra 281 (2004), no. 2, 567 – 603.

[13] Z. Chatzidakis, A. Pillay, *Generic structures and simple theories.*, Ann. Pure Appl. Logic **95**, (1998), 71–92.

[14] F. Delon, *Idéaux et types sur les corps séparablement clos*, Mém. Soc. Math. Fr. **33**, (1988), pp. 76.

[15] F. Delon, *Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos*, Confluentes Math., **4**, 1250003, 11pp (2012).

[16] J. Goodrick, B. Kim, A. Kolesnikov, *Amalgamation functors and boundary properties in simple theories*, Israel J. Math. **193**, (2013), 169–207.

[17] E. Hrushovski, *Unidimensional theories are superstable*, Ann. Pure Appl. Logic **50**, (1990), 117–138.

[18] D. M. Hoffmann, *Model theoretic dynamics in a more Galois fashion*, preprint, (2017), `https://arxiv.org/abs/1703.01376`

[19] E. Hrushovski, *Pseudo-finite fields and related structures*, in *Model theory and applications*, Quad. Mat. **11**, (2002), 151–212.

[20] E. Hrushovski, *Groupoids, imaginaries and internal covers.*, Turk. J. Math. **36**, (2012), 173–198.

[21] E. Hrushovski, A. Pillay, *Groups definable in local fields and pseudo-finite fields*, Israel J. Math. **85**, (1994), 203–262.

[22] B. Kim, J. Millar, T. de Piro, *Constructing the hyperdefinable group from the group configuration*, J. Math. Logic **6**, (2006), 121–139.

[23] B. Kim, A. Pillay, *Simple theories*, Ann. Pure Appl. Logic **88**, (1997), 149–164.

[24] P. Kowalski, A. Pillay, *A note on groups definable in difference fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **130**, (2002), 205–212.

[25] T. McGrail, *The model theory of differential fields with finitely many commuting derivations*, J. Symbolic Logic **65**, (2000), 885–913.

[26] M. Messmer, *Groups and fields interpretable in separably closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **344**, (1994), 361 – 377.

[27] R. Moosa, T. Scanlon, *Model theory of fields with free operators in characteristic zero*, J. Math. Logic **14**, (2014), 1450009 (43 pages).

[28] P. M. Neumann, *The structure of finitary permutation groups*, Arch. Math. **27**, (1976), 3–17.

[29] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, Pacific J. Math. **179**, (1997), 179–200.

[30] A. Pillay, *Differential Galois theory I*, Illinois J. Math. **42**, (1998), 678–699.

[31] A. Pillay, D. Polkowska, *On PAC and bounded substructures of a stable structure*, J. Symbolic Logic **71**, (2006), 460–472.

[32] A. Pillay, T. Scanlon, F.O. Wagner, *Supersimple fields and division rings*, Math. Res. Letters **5**, (1998), 473–483.

[33] N. M. Polkowska, *On simplicity of bounded pseudoalgebraically closed structures*, J. Math. Logic **7**, (2007), 173–193.

[34] S. Rideau, *Groups with definable generics*, preprint, (2016), `https://arxiv.org/abs/1612.02165`

[35] A. Weil, *On algebraic groups of transformations*, Amer. J. Math. **77**, (1995), 355–391.

[36] M. Ziegler, *A Note on Generic Types*, preprint, (2004), `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/preprints/lemma_fuer_lascar.pdf`

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F–69622 Villeurbanne Cedex, France.

Abteilung für Mathematische Logik ; Mathematisches Institut ; Albert-Ludwig-Universität Freiburg ; Eckerstrasse 1 ; D-79104 Freiburg ; Germany.

*E-mail address*: `blossier@math.univ-lyon1.fr`

*E-mail address*: `pizarro@math.uni-freiburg.de`