



HAL
open science

Les méthodes graphiques dans l'histoire et dans l'enseignement

Dominique Tournès

► **To cite this version:**

Dominique Tournès. Les méthodes graphiques dans l'histoire et dans l'enseignement. Évelyne Barbin et Dominique Bénard (éds). Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements, INRP et Université Blaise-Pascal, pp.263-285, 2007, 978-2-7342-1087-0. hal-01485452

HAL Id: hal-01485452

<https://hal.science/hal-01485452>

Submitted on 13 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

Chapitre X

LES MÉTHODES GRAPHIQUES DANS L'HISTOIRE ET DANS L'ENSEIGNEMENT

Dominique TOURNÈS

Les figures sont souvent mal vues des mathématiciens et enseignants actuels. Si elles sont, à la rigueur, reconnues pour leur valeur heuristique, elles sont plus difficilement acceptées en tant qu'élément constitutif d'une démonstration. Les constructions géométriques auraient-elles donc moins de réalité mathématique que les expressions algébriques formelles ? À travers l'étude de quelques exemples tirés de l'histoire, je souhaite mettre en évidence la tension, la dialectique, les frontières changeantes qui ont existé depuis Descartes, tant chez les théoriciens que les praticiens des mathématiques, entre preuves géométriques et preuves algébriques, entre méthodes numériques et méthodes graphiques. J'examinerai ensuite la situation dans les programmes en vigueur au lycée et je présenterai le projet de recherche en cours à l'IREM de la Réunion pour mettre au point, dans les classes de première et de terminale, une progression d'enseignement reposant sur des méthodes graphiques. Pour ne pas me disperser, j'illustrerai mon propos en me limitant à deux sujets autour desquels on peut organiser une grande partie de l'enseignement à ce niveau : 1) la résolution des équations du second et du troisième degré ; 2) la méthode d'Euler. Ces deux thèmes me serviront de fils directeurs pour développer, en fait, des considérations de portée plus générale.

PREMIÈRE PARTIE : QUELQUES CONSIDÉRATIONS HISTORIQUES SUR LA DIALECTIQUE ENTRE PENSÉE GÉOMÉTRIQUE ET PENSÉE ALGÈBRE

Muriel Lefebvre a soutenu en 2001, à l'université de Strasbourg, une thèse de doctorat intitulée *Images, écritures et espace de médiation : étude anthropolo-*

gique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens¹. Après avoir constaté que les figures étaient nombreuses dans les brouillons des mathématiciens et au tableau lors des séminaires, mais quasiment absentes dans les publications finales, elle a interrogé 41 mathématiciens pour en savoir plus sur le statut des figures. Une réponse typique est la suivante² :

« *B : Les mathématiques arrivent au moment où on s'affranchit des images. C'est-à-dire qu'on sort de l'activité psychique personnelle pour rentrer dans l'activité socialement échangeable sous la forme la plus conventionnelle, c'est-à-dire écrite, par rapport à ce qui est des mathématiques, au moment où précisément, ça prend sa forme symbolique, et donc on s'est affranchi des images. Et en fait, c'est une forme, pour moi, de libération. [...] Beaucoup de choses peuvent se dessiner, et puis, il y a très peu de choses qui finalement deviennent des maths à partir du dessin. Donc l'épreuve de vérité, c'est quand c'est devenu une formule. »*

Cette citation me semble assez caractéristique de l'évolution historique générale des mathématiques depuis l'Antiquité, évolution qui va d'une pensée géométrique vers une pensée algébrique. Chez Euclide et les mathématiciens grecs, la primauté revient aux figures. Alors que, chez les Égyptiens et les Babyloniens, la figure était un simple schéma servant de guide à des calculs portant sur des nombres ou des grandeurs liés à des éléments de cette figure, chez les Grecs, la figure devient en soi objet d'étude. Cependant, on s'aperçoit très vite que les figures portent en elles davantage de sens que le discours qui tente de décrire leur construction et leurs propriétés. La diagonale du carré existe : tout le monde la voit comme résultat d'une construction élémentaire incontestable. Pourtant, aucun nombre ne peut la décrire, son rapport au côté du carré est irrationnel, contraire à la raison, « indicible » au-delà du simple programme de construction qui l'a engendré. De même, dans la première proposition du livre I des *Éléments*, lorsqu'il s'agit de construire un triangle équilatéral sur un segment donné, Euclide utilise, sans démontrer leur existence, les points d'intersection des deux cercles tracés. L'existence de ces points fait partie de la figure : c'est ce que l'on voit, qui va de soi et qu'on ne dit pas. Les grandeurs et les lignes sont implicitement des objets continus. Tout repose sur ce principe de continuité.

LA CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS PAR INTERSECTION DE LIGNES

Jusque vers 1750, les mathématiques vont être dominées par cette pensée géométrique. De nombreux problèmes, quelle que soit leur origine, vont être formulés en langage géométrique. Les résoudre consistera à obtenir leurs

¹ Muriel Lefebvre, *Images, écritures et espace de médiation : étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens*, thèse de doctorat de l'université Louis-Pasteur, Strasbourg, 2001.

² *Op. cit.*, chap. 1, § 1.3 : « L'image indésirable ».

solutions comme intersection de lignes tracées d'un mouvement continu. L'invention de l'algèbre par les mathématiciens arabes et son intégration progressive aux outils du géomètre jusqu'au livre-clé que constitue la *Géométrie* de Descartes en 1637, ne change rien de fondamental à cette conception.

Au XI^e siècle, Umar al-Khayyam³ élabore une théorie géométrique complète des équations de degré inférieur ou égal à 3. Il ramène chaque type d'équation à sa construction par l'intersection de deux courbes géométriques (en général deux coniques). Le problème de l'existence de points d'intersection se pose alors naturellement. Chez al-Khayyam, comme chez la plupart de ses successeurs jusqu'à Bolzano, toutes les tentatives pour prouver cette existence reviennent à montrer que l'une des courbes possède des points de part et d'autre de l'autre courbe, toutes deux étant supposées tracées d'un mouvement continu. Encore et toujours ce principe implicite de continuité !

Chez Descartes⁴, l'équation d'une courbe apparaît clairement comme un outil d'analyse au service de la géométrie, une sorte de programme codé permettant de réaliser la construction de la courbe par points à partir de sous-programmes élémentaires de construction pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines n -ièmes à l'aide de la règle, du compas ordinaire et des compas cartésiens conçus pour l'insertion de n moyennes proportionnelles⁵. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles une équation ne suffit pas à déterminer une courbe : l'équation est intrinsèquement imparfaite, car elle ne fournit qu'une construction par points, par opposition au tracé d'un mouvement continu à l'aide d'un système articulé. Dans le même ordre d'idées, obtenir une formule algébrique pour exprimer les racines d'une équation n'est pas considéré comme satisfaisant : cela ne suffit pas à prouver l'existence de ces racines, ni à déterminer leur grandeur, tant qu'on n'a pas « traduit » cette formule en une construction géométrique.

Après avoir donné la construction de toutes les équations du troisième et du quatrième degré par l'intersection d'une parabole fixe et d'un cercle dépendant des coefficients de l'équation (on y reviendra dans la seconde partie), Descartes se penche sur les formules de Cardan et, loin de suggérer que l'on puisse s'en servir pour un calcul numérique par extraction à la main des racines carrées et des racines cubiques, il transforme ces formules en programme de construction géométrique : reprenant les résultats obtenus auparavant par Viète, il explique que l'équation du troisième degré se ramène à l'insertion de deux moyennes proportionnelles lorsque l'équation a une seule racine réelle, à la trisection d'un angle dans le cas irréductible où elle possède trois racines réelles, et que ces deux constructions de base – l'insertion des deux moyennes et la trisection de l'angle –

³ Roshdi Rashed & Bijan Vahabzadeh, *Al-Khayyam mathématicien*, Paris : Blanchard, 1999.

⁴ René Descartes, *La Géométrie*, appendice au *Discours de la méthode*, Leyde, 1637 ; rééd., New York : Dover, 1954.

⁵ *Op. cit.*, p. 297-298 et p. 370-371.

rentrent dans son schéma général de l'intersection d'une parabole fixe et d'un cercle⁶.

Depuis Descartes jusque vers le milieu du XVIII^e siècle, la théorie de la résolution des équations algébriques va se faire ainsi par intersection de deux courbes choisies parmi les plus simples possibles, la notion de « simplicité » variant d'ailleurs d'un auteur à l'autre suivant les points de vue adoptés.

Avec le développement du calcul infinitésimal, la situation se complexifie, mais ne change pas fondamentalement de nature. D'un côté, l'outil algébrique se perfectionne et se généralise, au point que l'on en vient à accepter des expressions algébriques infinies pour décrire les courbes et les solutions des problèmes. Mais, par ailleurs, on cherche toujours à construire par des mouvements continus simples – nécessairement d'une autre nature que les systèmes articulés cartésiens – les nouvelles courbes transcendentes qui apparaissent en grand nombre dans les applications. Parmi les nouveaux procédés de construction, on peut citer, par exemple, le mouvement tractionnel, à partir duquel Leibniz conçoit l'idée d'un intégraphe universel susceptible de résoudre les problèmes de quadratures et, plus généralement, de tracer les courbes intégrales des équations différentielles⁷.

Même dans ce domaine du calcul infinitésimal en pleine expansion, on s'aperçoit que, jusque vers 1750, la géométrie prime sur l'algèbre : une expression algébrique ne suffit pas à prouver l'existence d'une intégrale d'une équation différentielle tant qu'on n'a pas tiré une construction géométrique de cette expression. C'est le tracé de la courbe, autrement dit la figure, qui est le but recherché, pas la formule algébrique ! On rencontre un excellent exemple de cette démarche dans un traité de Vincenzo Riccati⁸, paru à Bologne en 1752, dont on pourrait traduire le titre par « De l'emploi du mouvement tractionnel pour la construction des équations différentielles ». Riccati s'intéresse à l'équation différentielle

$$\frac{ab dq}{(f - q)\sqrt{b^2 + q^2}} = dx.$$

Elle est intégrable par quadratures. Pour équation d'une courbe intégrale, il trouve

$$x = -\log\left(z - \frac{a}{b}\sqrt{f^2 + b^2}\right) + \log\left(z + \frac{a}{b}\sqrt{f^2 + b^2}\right),$$

où l'on utilise le logarithme de sous-tangente $\frac{ab}{\sqrt{f^2 + b^2}}$. Cette formule obtenue,

la résolution n'est pas du tout, contrairement au point de vue qui serait adopté

⁶ *Op. cit.*, p. 397-401.

⁷ Gottfried Wilhelm Leibniz, « Supplementum geometriæ dimensionariæ seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum : similiterque multiplex constructio lineæ ex data tangentium conditione », *Acta eruditorum*, sept. 1693.

⁸ Vincenzo Riccati, *De usu motus tractorii in constructione æquationum differentialium commentarius*, Bononiæ : Ex typographia Læli a Vulpe, 1752.

aujourd'hui, considérée comme achevée. Dans un esprit encore cartésien, Riccati écrit⁹ : « *Une construction prend sa source dans cette analyse* », après quoi il expose une construction par points de la courbe intégrale à partir de la courbe logarithmique. Par ailleurs, il compare cette solution avec une seconde construction, de type tractionnel, beaucoup plus simple et, surtout, conduisant au tracé de la courbe d'un trait continu, ce qui met en évidence que l'approche algébrique n'est pas forcément la meilleure !

UN BASCULEMENT SOUDAIN DE LA GÉOMÉTRIE VERS L'ALGÈBRE

C'est vers 1750 que se fait, de manière assez soudaine et en partie inexplicquée, le basculement de la géométrie vers l'algèbre. Cette évolution est caractérisée par les traités d'Euler, premiers traités qui sont centrés sur les fonctions plutôt que sur les courbes, sur les algorithmes algébriques plutôt que sur la construction des figures. Résoudre une équation algébrique ou une équation différentielle, cela ne se fait plus par le tracé et l'intersection de lignes, mais par le calcul d'expressions algébriques représentant les solutions en des sens de plus en plus larges : on accepte désormais une expression algébrique infinie, un algorithme infini tel une série, un produit infini ou une fraction continue, comme décrivant parfaitement la solution cherchée tout en assurant son existence, sans qu'il soit nullement besoin de revenir à la géométrie. Le support des figures et de l'intuition géométrique étant soudain évacué, les discussions vont désormais porter sur le sens de ces algorithmes infinis dont on peut douter de la validité dans la mesure où ils sont, par nature, impossibles à mettre en œuvre effectivement dans la réalité. Les doutes, exprimés notamment par Abel, conduiront Cauchy, puis Weierstrass, à élaborer une théorie des limites et de la convergence permettant l'acceptation en mathématiques, sous certaines conditions, de ces processus infinis.

En parallèle à ces développements, la découverte des géométries non euclidiennes contribue à la perte de la légitimité de la géométrie. On ne peut plus guère se fier à l'intuition géométrique. Il reste quand même la question des imaginaires, un peu à contre-courant, pour laquelle la représentation géométrique et le retour à des figures sont le seul moyen convaincant trouvé pour légitimer ces écritures formelles un peu mystérieuses contenant des racines carrées de nombres négatifs. Mais l'évolution d'ensemble est irréversible et tout cela trouvera sa conclusion dans les débats sur les fondements de la fin du XIX^e siècle, qui aboutiront à une refondation des mathématiques sur l'arithmétique plutôt que sur la géométrie. Les objets premiers sont à nouveau les nombres entiers, et non plus les figures, dans une sorte de curieux retour à l'ancienne conception pythagoricienne selon laquelle « tout est nombre ». C'est sur ce schéma que nous vivons encore aujourd'hui : dans nos études universitaires, on part de l'ensemble des entiers naturels, introduit par les axiomes de Peano, puis, à partir des entiers naturels, on construit successi-

⁹ *Op. cit.*, p. 26.

vement les nombres relatifs, rationnels, réels et complexes. La géométrie plane apparaît alors en tant qu'étude de l'ensemble des couples de nombres réels, c'est-à-dire comme un produit dérivé. La position la plus extrémiste, exprimée par Jean Dieudonné à l'époque des mathématiques modernes, a consisté à s'écrier « À bas Euclide ! » et à publier, en guise de provocation, un livre de géométrie sans aucune figure¹⁰. On aboutit ainsi à la conception exprimée par le mathématicien cité au début : « *Les mathématiques arrivent au moment où on s'affranchit des images. [...] l'épreuve de vérité, c'est quand c'est devenu une formule.* » Plus de figures, plus de courbes, mais des nombres, des coordonnées, des fonctions et des formules !

LE CAS DE LA MÉTHODE D'EULER POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour illustrer plus précisément cette évolution de la géométrie vers l'algèbre, penchons-nous sur le cas de l'expression et de la justification de la méthode d'Euler pour les équations différentielles, second thème que j'ai choisi à côté de celui de la résolution des équations algébriques.

Commençons par jeter un coup d'œil sur le *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Sylvestre-François Lacroix, dont le tome second de la première édition, celui consacré au calcul intégral, a paru en 1798¹¹. C'est un traité extrêmement révélateur de cette époque-charnière précédant la refondation de l'analyse par Cauchy. Voyons comment Lacroix présente l'évolution du calcul infinitésimal¹² :

« *On découvrit le Calcul différentiel pour mener des tangentes aux courbes, c'est-à-dire, pour résoudre le Problème direct des tangentes. On s'occupait ensuite du Calcul intégral, pour parvenir aux équations primitives des courbes par les propriétés de leurs tangentes ; mais les progrès et les nombreuses applications de ce Calcul ont fait abandonner la dénomination de méthode inverse des tangentes qui ne convenait qu'à un seul de ses usages. Dans les premiers tems on chercha à déterminer par les aires ou même par les arcs de quelques courbes connues, l'ordonnée de la courbe demandée ; depuis on a laissé ces constructions de côté, parce que, quelque élégantes qu'elles fussent dans la théorie, elles étoient toujours moins commodes et surtout moins exactes dans la pratique, que les formules approximatives qui ont pris leur place.* »

Ainsi, il est clair que le contexte et le vocabulaire de la géométrie (courbes, tangentes, aires et arcs, c'est-à-dire quadrature et rectification des courbes, constructions...) sont en voie progressive de disparition. À la suite d'Euler, on

¹⁰ Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris : Hermann, 1964.

¹¹ Sylvestre-François Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, vol. 2, Paris : Duprat, an VI (1798).

¹² *Op. cit.*, p. 296.

s'intéresse de plus en plus à des formules approximatives, c'est-à-dire à des développements en série, mieux adaptés, plus féconds, tant pour les questions théoriques que pour les questions numériques. Le calcul infinitésimal n'est plus lié à une figure géométrique, une courbe qu'il faudrait construire ou dont il faudrait analyser les propriétés dans la lignée des problèmes et des théorèmes euclidiens. Le calcul infinitésimal s'algébrique, il se libère de la géométrie et ses formules acquièrent peu à peu une complète autonomie.

Pourtant, la géométrie est encore solidement ancrée chez Lacroix. Lorsqu'il parle de la méthode d'Euler, il écrit¹³ :

« Ce qui précède fait voir que les équations différentielles à deux variables sont toujours possibles [...] : la même chose se prouve aussi par des considérations géométriques. [...] On voit, qu'en continuant ce procédé, on tracera un polygone qui différera d'autant moins de la courbe à laquelle appartient l'équation proposée, qu'on en multipliera les côtés. Il résulte aussi de cette construction qu'une équation différentielle du premier ordre représente une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point M où on voudra. »

Rien n'a changé ici par rapport à la conception originelle leibnizienne selon laquelle une courbe est un polygone ayant une infinité de côtés infiniment petits. Ayant réalisé une construction qui n'est rien d'autre que la méthode d'Euler dans le cas d'un problème particulier, celui de l'isochrone paracentrique, Leibniz avait déjà affirmé, en 1694¹⁴ :

« Nous obtiendrons de la sorte un polygone [...] remplaçant la courbe inconnue, c'est-à-dire une courbe Mécanique tenant lieu de courbe Géométrique, du même coup nous voyons bien qu'il est possible de faire passer la courbe Géométrique par un point donné [...], puisque une telle courbe est la limite où en définitive s'effacent progressivement les polygones convergents. »

Avec Euler¹⁵, puis Cauchy¹⁶, il n'y aura plus ce support géométrique. La méthode d'Euler-Cauchy sera définie par des formules algébriques et présentée d'emblée comme une méthode d'approximation numérique dont la précision dépend du pas de la subdivision choisie. Chez Cauchy, il y aura même une preuve de la convergence assortie d'une évaluation de l'erreur commise. Là encore, on glisse insensiblement du cadre géométrique vers le cadre algébrique, du cadre

¹³ *Op. cit.*, p. 287.

¹⁴ Gottfried Wilhelm Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, traduction et notes par Marc Parmentier, Paris : Vrin, p. 304.

¹⁵ Leonhard Euler, *Institutionum calculi integralis volumen primum*, Saint-Petersbourg, 1769, sectio secunda, caput VII : « De integratione æquationum differentialium per approximationem ».

¹⁶ Augustin-Louis Cauchy, *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit (fragment)*, introduction de Christian Gilain, Paris : Études vivantes & New York : Johnson Reprint Corporation, 1981.

graphique vers le cadre numérique. Le traité d'Euler et le cours de Cauchy ne s'appuient plus sur le support d'une figure. Alors que, auparavant, on construisait une figure par des procédés géométriques afin de mesurer sur elle les valeurs numériques dont on avait besoin pour la pratique, de nos jours, c'est le contraire : on fait calculer par nos ordinateurs des valeurs numériques qui servent ensuite à établir des représentations graphiques, non pour calculer, mais pour visualiser les résultats du calcul. Le graphique a changé de place et de fonction.

SECONDE PARTIE : LES MÉTHODES GRAPHIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT

Actuellement, avec l'apparition des calculatrices graphiques, des grapheurs et des logiciels de géométrie dynamique, avec, en parallèle, la disparition de tout enseignement organisé de logique formelle et l'affaiblissement continu de la place de la démonstration dans les activités des élèves, il semble qu'un retour vers des méthodes graphiques soit, de fait, inéluctable. Il y a là, d'une part, une façon d'exploiter pleinement les outils modernes et de former les jeunes à leur utilisation, d'autre part, la possibilité de favoriser l'apprentissage d'autres types de raisonnement, davantage fondés sur l'induction, l'expérimentation, l'observation.

Ces dernières années, l'enseignement de l'analyse a été fortement déstabilisé dans les classes de lycée : en l'absence d'une construction rigoureuse des nombres réels, après la disparition de toute définition précise des notions de limite, de continuité, de dérivée et d'intégrale, il n'y a plus aucun moyen de démontrer l'existence des solutions des équations algébriques et différentielles rencontrées à ce niveau. Le théorème des valeurs intermédiaires est devenu inaccessible, de même que l'existence des primitives des fonctions continues. Dans ces conditions, il est assez ridicule de se livrer à des simagrées comme celle induite par le document d'application des programmes de série S qui précise¹⁷ :

« Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variation suffit pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ sur un intervalle. Il n'est pas besoin d'évoquer la continuité. »

Un autre exemple est fourni par les querelles qui ont divisé les professeurs de terminale S pour savoir s'il était possible de prouver rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle à partir de la méthode d'Euler ou celle de la fonction logarithme à partir de la quadrature de l'hyperbole. Quelle preuve pourrait-on envisager, dans l'un ou l'autre cas, alors qu'on ne dispose d'aucun fondement solide sur lequel bâtir ?

¹⁷ Inspection générale de mathématiques, *Application des programmes de mathématiques (seconde, premières ES et S, terminales ES et S)*, 2005, p. 10.

Ne serait-il pas moins hypocrite de revenir à une intuition géométrique de la continuité et de l'intersection des courbes dans le cas de la résolution des équations algébriques, du polygone d'Euler-Cauchy dans le cas des équations différentielles, conformément à ce que nous avons vu plus haut dans notre panorama de l'évolution historique de ces notions ? Puisqu'on ne dispose pas, au lycée, d'une théorie des nombres réels et des limites, ne serait-il pas plus formateur de permettre aux élèves de raisonner comme les mathématiciens d'avant la fin du XIX^e siècle, que l'absence de fondements rigoureux n'a pas empêché de travailler de façon cohérente et productive ?

Les programmes actuels vont dans ce sens, le disent plus ou moins dans leurs introductions, mais n'osent pas franchir véritablement le pas dans le détail de leurs contenus, sans doute au nom d'une certaine orthodoxie qu'il serait mal vu de transgresser. Voici, par exemple, ce qu'on peut lire dans l'introduction du cycle terminal STI¹⁸ :

« Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique. Plus largement, on développera une vision géométrique des problèmes notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation. »

C'est dans cet esprit que j'ai entrepris une recherche-action dans une classe de terminale S afin d'élaborer et d'expérimenter une progression accordant une large place aux méthodes graphiques¹⁹. Il s'agit, en quelque sorte, de faire revivre aux élèves cette dialectique entre algèbre et géométrie qui a nourri, comme on l'a vu, les progrès historiques, et de leur offrir la possibilité permanente de changer de cadre dans leurs recherches et leurs raisonnements. À titre d'exemples, je vais présenter ici deux des activités que j'ai mises au point.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AVEC DES DROITES, DES CERCLES ET UNE PARABOLE FIXE

L'un des premiers thèmes que j'ai proposés aux élèves est celui de la résolution des équations du second, troisième et quatrième degré à l'aide d'une règle, d'un compas et d'une parabole fixe, donnée par son tracé sur une feuille de papier ou sur un transparent, ou matérialisée par un découpage dans du carton ou du

¹⁸ Ministère de l'éducation nationale, *Programme de mathématiques. Cycle terminal. Série « Sciences et technologies industrielles »*, 2002, p. 7.

¹⁹ L'expérimentation s'est déroulée au lycée Le Verger (Sainte-Marie, La Réunion), dans la classe de M. Jean-Claude Lise, que je remercie pour son accueil et sa collaboration.

métal. En d'autres termes, il s'agit d'étudier les problèmes que l'on peut résoudre à l'aide de droites, de cercles et d'une parabole donnée (qui détermine l'unité de longueur et qui a pour équation $y = x^2$). Globalement, j'ai suivi les conseils de Joseph-Balthazar Bérard, qui, dans ses *Opuscules mathématiques* de 1810, écrivait²⁰ :

« Par exemple, on savait qu'on trouve les racines des équations du quatrième degré, par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ; mais j'ai remarqué que cette parabole peut être invariable et servir pour tous les cas ; en sorte qu'en la construisant en cuivre ou en carton, on peut très-simplement et très-brièvement trouver les racines.

[...] Les géomètres font à présent moins d'usage des constructions qu'autrefois : cependant elles peuvent être utiles et servent même à trouver plus promptement que par le calcul les racines approchées des équations numériques. »

L'idée de faire intervenir une parabole fixe n'est pas due, bien entendu, à Bérard, mais à Descartes, qui la mentionne explicitement dans sa *Géométrie* de 1637. Auparavant, comme nous l'avons déjà rappelé, Viète avait réussi à montrer que toute équation du troisième degré se ramène, soit à l'insertion de moyennes proportionnelles (dans le cas d'une racine simple), soit à la trisection de l'angle (dans le cas dit « irréductible » où il y a trois racines réelles). Cela entraîne que tout problème du troisième ou du quatrième degré peut être résolu de manière exacte avec la règle, le compas et la règle marquée (construction par *neusis*), ou, de manière équivalente, avec des droites, des cercles et des coniques. Descartes va même plus loin en affirmant qu'il suffit de disposer une fois pour toutes d'une seule conique (ou même d'une portion de conique) sur la feuille de papier²¹. Ce dernier résultat sera prouvé ultérieurement par Newton.

Pour le second degré, que je fais étudier de cette façon à titre d'activité préparatoire, on peut écrire :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \exists y \begin{cases} y = x^2 \\ ay + bx + c = 0. \end{cases}$$

Les racines apparaissent donc comme les abscisses des points d'intersection de la parabole et d'une droite facile à tracer (cf. fig. 1). On constate, suivant les cas, qu'il y a deux, un ou zéro point(s) d'intersection. Une réflexion sur les limites de la méthode graphique permet de dégager des outils théoriques pour dépasser ces limites : somme et produit des racines lorsqu'une seule racine apparaît dans le cadre borné de la feuille de papier, changement d'inconnue et d'équation quand aucune des deux racines n'est directement accessible ($x = 10z$, $x = 100z$, etc.).

²⁰ Joseph-Balthazar Bérard, *Opuscules mathématiques*, Paris : Louis, 1810, p. vj et p. 113-114.

²¹ *La Géométrie, op. cit.*, p. 389.

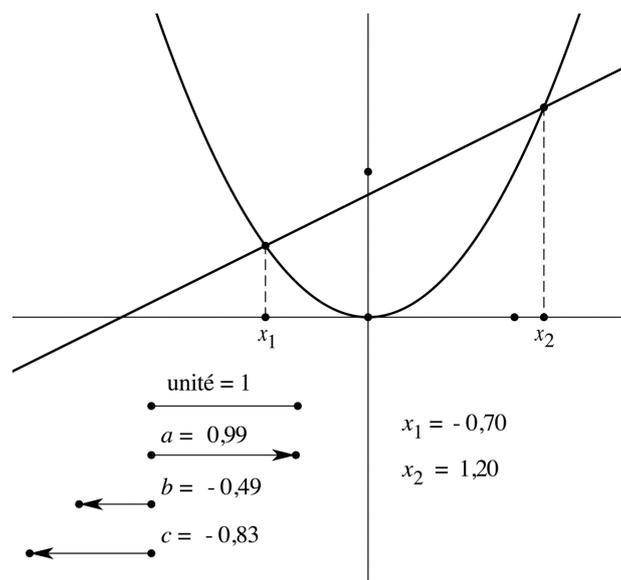


Figure 1. Équation du second degré, cas de deux racines réelles

Les élèves disposent de feuilles de papier sur lesquelles la parabole a déjà été imprimée. À la fin de la construction, ils mesurent avec leur double-décimètre les longueurs des segments représentant les racines. La comparaison avec les valeurs fournies par la calculatrice leur permet, d'une part, de se convaincre de la validité et de l'intérêt de la construction, d'autre part, d'évaluer leur habileté de dessinateurs. Pour la synthèse au tableau, le professeur utilise une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique (cf. fig. 1). Des curseurs variables correspondant aux coefficients de l'équation servent à parcourir successivement tous les cas rencontrés par les élèves au cours de la séance et, le cas échéant, à en explorer d'autres.

Plus tard dans l'année, une fois que les élèves ont étudié les nombres complexes, on revient sur cette construction en se demandant comment visualiser les racines imaginaires conjuguées dans le cas où la droite ne coupe pas la parabole. En notant $\alpha \pm i\beta$ ces racines, les élèves trouvent facilement, sensibilisés qu'ils sont aux relations entre coefficients et racines, les formules

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c}{a} = \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2. \end{cases}$$

Il en résulte une construction aisée des racines imaginaires, grâce au théorème de Pythagore et à l'exploitation de la parabole fixe en tant que machine à extraire les racines carrées (cf. fig. 2). On aboutit finalement à une figure dynamique résolvant l'équation du second degré dans tous les cas : en déplaçant les curseurs, on peut assister à une bifurcation spectaculaire au moment où, les deux racines étant

d'abord sur l'axe réel, elles se rejoignent avant de se séparer à nouveau, mais dans une autre dimension : celle du plan complexe.

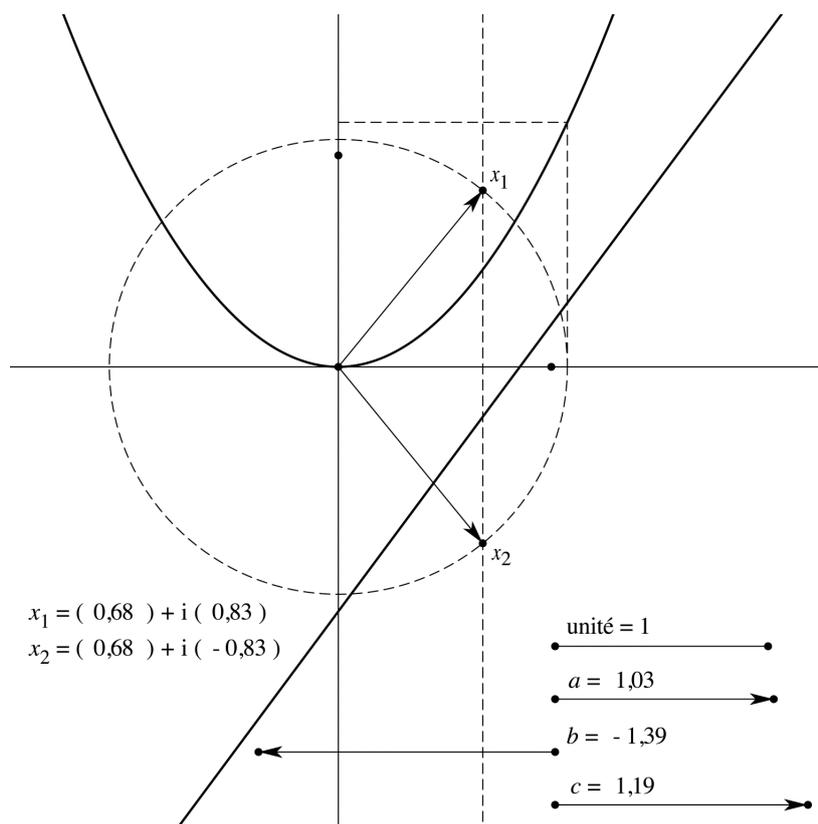


Figure 2. Équation du second degré, cas de deux racines imaginaires conjuguées

Une fois ces idées bien en place, on peut passer très facilement au troisième degré. Après avoir expliqué comment se ramener à l'équation réduite, on suit pas à pas les calculs de Descartes, qui reviennent à écrire (sous réserve que $x \neq 0$, mais il est immédiat d'exclure la racine parasite $x = 0$ si nécessaire) :

$$\begin{aligned}
 x^3 + px + q = 0 &\Leftrightarrow x^4 + px^2 + qx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists y \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 + x^2 + (p-1)y + qx = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists y \begin{cases} y = x^2 \\ \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les racines apparaissent alors comme l'intersection de la parabole fixe et d'un cercle qui passe par l'origine et dont le centre est facile à construire à la règle et au compas (cf. fig. 3). On constate qu'il y a entre un et trois points d'intersection (en excluant bien évidemment l'origine, qui correspond à la solution parasite $x = 0$

introduite au début). Invités à justifier ce fait d'une autre manière, les élèves font appel à l'étude de la fonction $f(x) = x^3 + px + q$ et à l'exploitation de son tableau de variation.

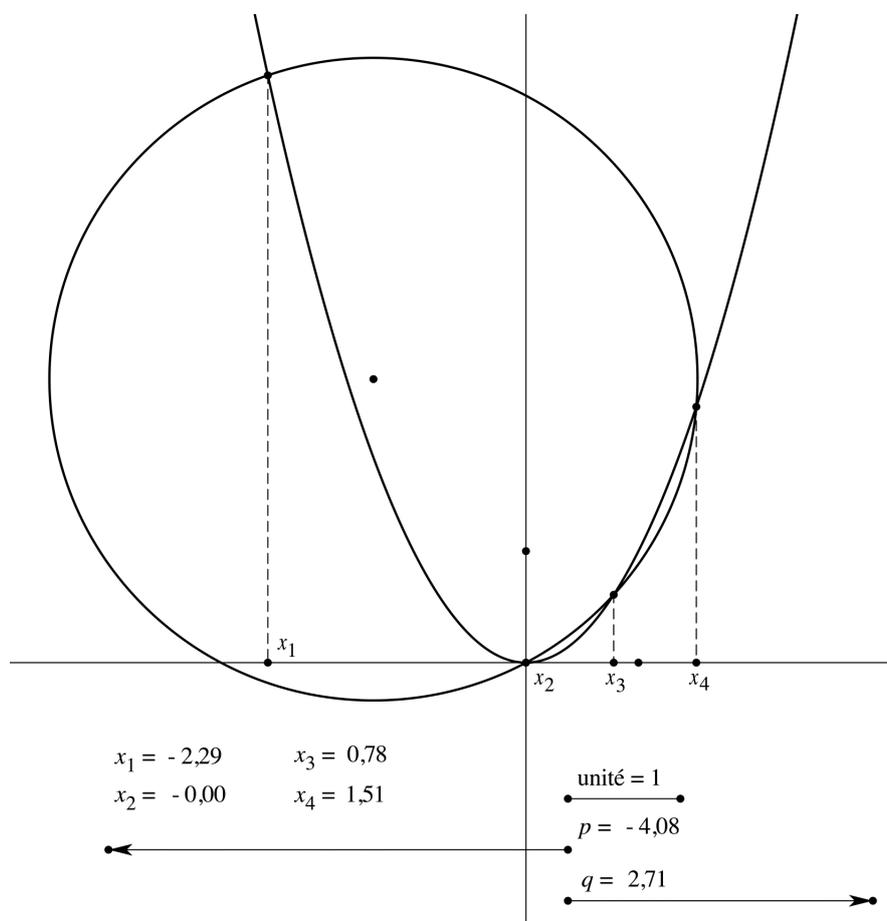


Figure 3. Équation du troisième degré, cas de trois racines réelles

Là encore, les relations entre coefficients et racines vont conduire à une construction des racines imaginaires conjuguées $\alpha \pm i\beta$ dans le cas où il n'y a qu'une seule racine réelle γ . On trouve les formules :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\gamma}{2} \\ \beta^2 = p + 3\alpha^2 \end{cases}$$

qui permettent de construire α à partir de γ , puis β en exploitant la parabole pour construire le carré de α et la racine carrée de $p + 3\alpha^2$ (cf. fig. 4). Le résultat est une figure dynamique unique résolvant complètement l'équation du troisième degré. En guise de prolongement, les élèves les plus motivés sont invités à se lancer dans un travail analogue pour le quatrième degré, toujours avec la règle, le compas et la parabole fixe.

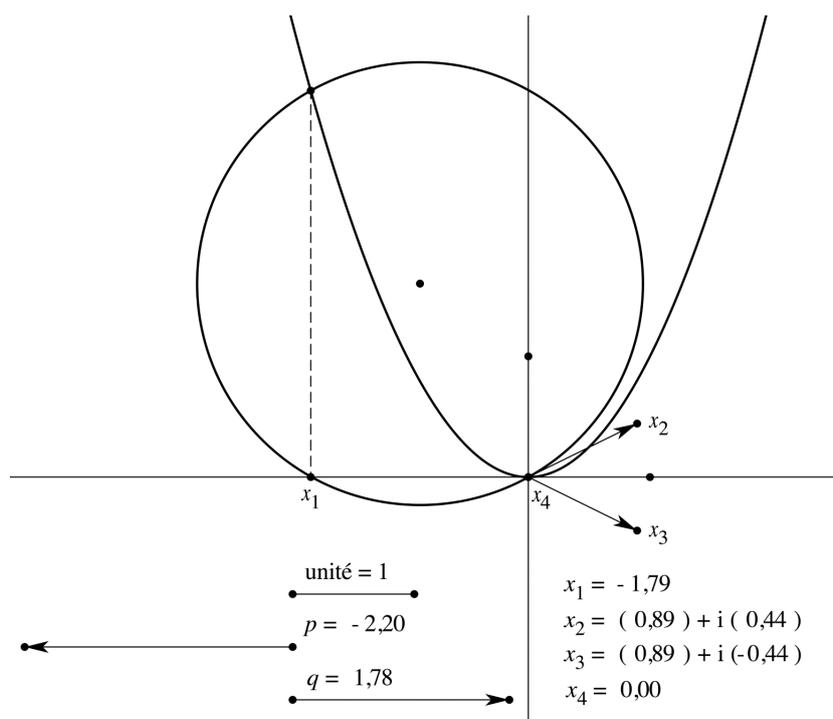


Figure 4. Équation du troisième degré, cas d'une racine réelle et de deux racines imaginaires conjuguées

Une autre façon d'aborder l'équation du troisième degré serait de se ramener à une cubique fixe. L'idée première en revient à Newton²², qui écrivait en substance :

$$x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow \exists y \begin{cases} y = x^3 \\ y + px + q = 0 \end{cases}$$

et qui se servait d'une cubique découpée une fois pour toutes dans une plaque de métal. L'utilisateur n'a plus alors qu'à tracer une simple droite et à mesurer sur le graphique les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la cubique. La méthode a connu un grand succès par la suite : on la retrouve, par exemple, dans le troisième volume de la *Correspondance sur l'École polytechnique*, en 1814-1816, sous la plume de Monge²³. On y apprend qu'un outil de calcul, composé d'une parabole cubique et d'un réseau de parallèles permettant de visualiser rapidement la droite et les points d'intersection était en vente à l'époque :

²² Isaac Newton, *Mathematical Papers*, ed. by D. T. Whiteside, Cambridge : University Press, 1967-1981, vol. 1, p. 496.

²³ Gaspard Monge, « Solution graphique de l'équation $x^3 - px - q = 0$ », *Correspondance sur l'École polytechnique*, 1814-1816, n° 3, p. 201-203.

« La planche de ce dessin a été gravée avec le plus grand soin [Ce dessin gravé, se vend à part, chez Mme. Ve. Courcier, quai des Grands-Augustins, no. 57.] ; les parallèles ont été tracées avec la machine conté, et la courbe a été dessinée par M. Girard. La distance des abscisses positive et négative, qui correspondent aux points extrêmes de cette courbe, mesurée sur l'axe des y, est réellement de 81,92 mètres ; cette distance est ramenée sur la planche gravée, à une dimension 64 fois plus petite, 1,28 mètre. »

UNE VERSION GÉOMÉTRIQUE DYNAMIQUE DE LA MÉTHODE D'EULER

L'introduction des équations différentielles peut également être abordée sous une forme purement géométrique. En effet, la méthode d'Euler est actuellement présente dans les programmes de mathématiques et de sciences physiques, tant en première qu'en terminale. En ce qui concerne les mathématiques, voici ce qui est indiqué en première²⁴ :

« On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$. »

et en terminale²⁵ :

« Étude de l'équation $f' = kf$. [...] On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. »

Lorsqu'on consulte les manuels actuels, on s'aperçoit que les activités proposées aux élèves sont, en général, de deux types : soit des calculs numériques effectués avec un tableur et traduits ensuite graphiquement avec un grapheur (d'où de grands tableaux de nombres assez rébarbatifs dont les élèves ont du mal à comprendre l'origine et la signification), soit des tentatives de démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans les cas étudiés, tentatives forcément illusoire puisque, comme nous l'avons déjà dit, l'analyse de première et de terminale repose sur des sables mouvants (aucun fondement précis concernant les nombres réels, les limites, la continuité, la dérivabilité, la notion d'aire, etc.).

Mon idée est de revenir à la signification géométrique originelle de la méthode d'Euler-Cauchy : construire une courbe à partir de la connaissance de ses tangentes et réaliser cette construction par des procédés entièrement géométriques, sans aucune intervention du calcul numérique. En première, on peut intégrer ainsi

²⁴ « Mathématiques. Classe de première. Série scientifique », *B. O. hors série n° 7*, 31 août 2000, p. 173.

²⁵ « Mathématiques. Classe terminale de la série scientifique », *B. O. hors série n° 4*, 30 août 2001, p. 66.

l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ en la remplaçant par l'équation aux différences $\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$. En terminale, après avoir repris en introduction l'activité de première, on s'intéressera à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = y$, remplacée de façon analogue par l'équation aux différences $\Delta y = y \Delta x$. Il sera alors naturel de constater que les constructions géométriques employées pour construire une courbe à partir de $\Delta x = x \Delta y$ ou à partir de $\Delta y = y \Delta x$ sont les mêmes, à la seule condition d'échanger l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. De plus, dans le cas du logarithme, on fera aisément le lien entre le problème inverse des tangentes et la quadrature de l'hyperbole.

Entrons un peu plus dans les détails, tout d'abord en ce qui concerne l'équation aux différences $\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$. On commence par étudier une construction élémentaire (cf. fig. 5) permettant d'avancer d'un point quelconque (x, y) du plan jusqu'au point voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Pour cela, il suffit de joindre le point $(x - 1, 0)$ au point $(x, 1/x)$, ce qui fournit un segment de pente $1/x$, puis de tracer la parallèle à ce segment passant par (x, y) . Pour la construction de $1/x$, les élèves exploitent l'hyperbole $y = 1/x$, imprimée à l'avance sur la feuille de papier qui leur a été remise.

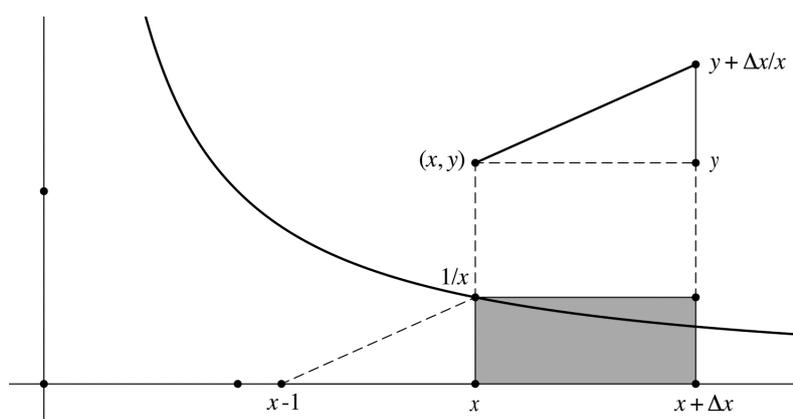


Figure 5. Construction de la tangente au logarithme

On remarque au passage que l'augmentation Δy de l'ordonnée représente l'aire du rectangle de côtés Δx et $1/x$ (en gris sur la fig. 5). À partir de là, on conçoit que l'ordonnée d'une courbe construite par répétition du processus précédent, c'est-à-dire par mise bout à bout de segments de tangentes très petits, va capitaliser les aires des rectangles correspondants et va donc représenter, à peu de chose près, l'aire sous l'hyperbole entre le point initial et le point final de la construction. Il ne reste plus qu'à idéaliser l'opération pour faire sentir aux élèves le lien essentiel entre le problème inverse des tangentes et celui des quadratures :

en imaginant que les segments de tangentes deviennent infiniment petits, on obtient exactement l'aire sous l'hyperbole.

Pour une construction approchée du logarithme entre le point initial $(1, 0)$ et le point d'abscisse x , on demande aux élèves de partager l'intervalle $[1, x]$ en seize parties égales et de répéter seize fois la construction élémentaire (cf. fig. 6), ce qui conduit à une ligne polygonale approchant la courbe cherchée (utiliser une puissance de 2 étant incontestablement ce qu'il y a de plus pratique, le partage en 16 se révèle à l'usage le meilleur compromis pour assurer une précision acceptable sans pour autant lasser les élèves). Avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut même aller plus loin : si l'on trace le lieu de l'extrémité de cette ligne polygonale lorsque x parcourt l'axe des abscisses, cela revient à effectuer la construction complète pour chaque point x , d'où une courbe intégrale approchée parfaitement régulière, sans points anguleux.

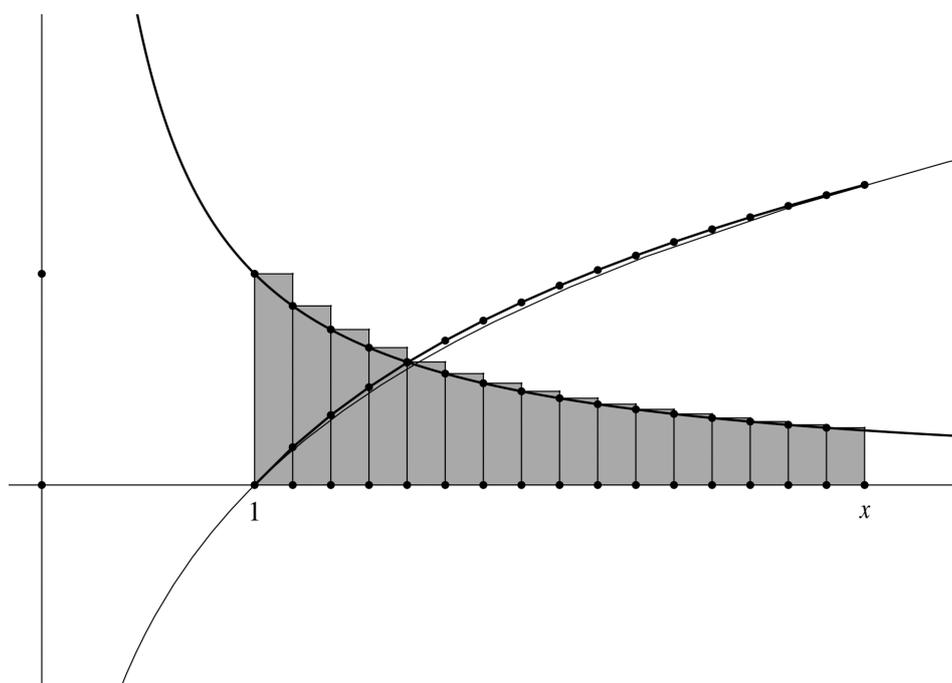


Figure 6. Construction du logarithme

Une fois effectué ce travail de fond sur le logarithme, la construction de l'équation différentielle $y' = y$ à partir de l'équation aux différences $\Delta y = y \Delta x$ ne soulève guère de difficulté. Le tracé d'une tangente de pente y en un point quelconque (x, y) est immédiat (cf. fig. 7). La construction d'une courbe intégrale approchée à partir du point initial $(0, 1)$ s'en déduit de manière tout à fait analogue à ce qui avait été réalisé pour le logarithme (cf. fig. 8).

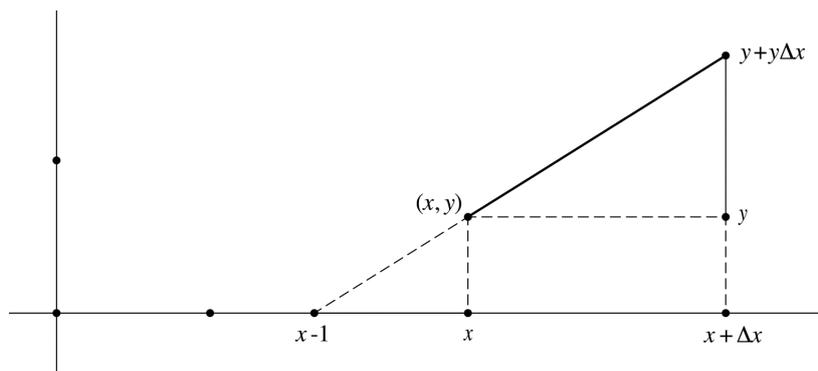


Figure 7. Construction de la tangente à l'exponentielle

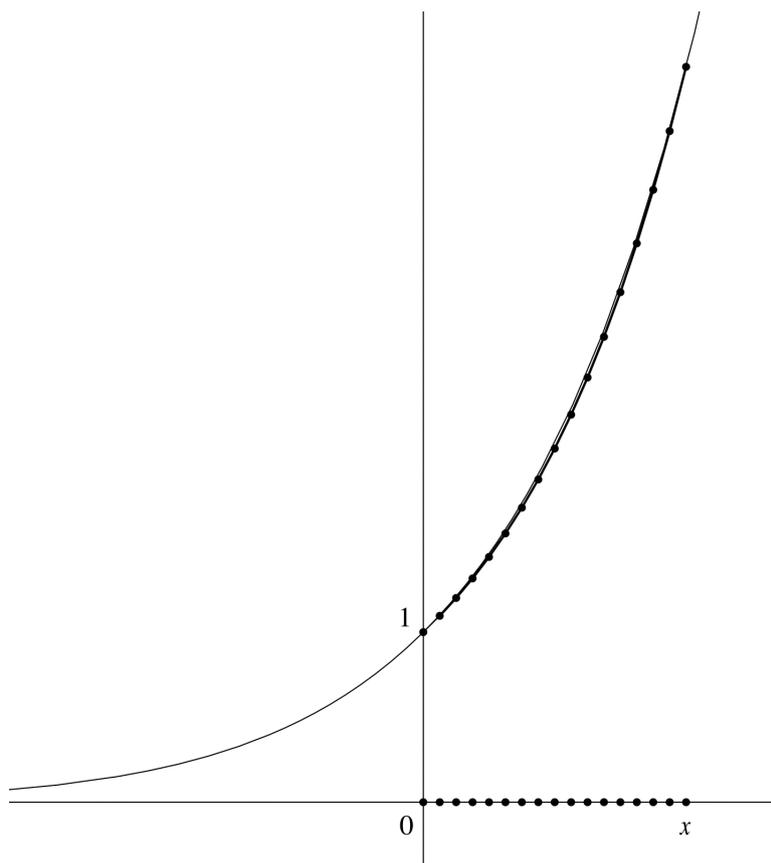


Figure 8. Construction de l'exponentielle

Il reste à faire le lien entre le logarithme, construit en première lors de la recherche d'une primitive de la fonction inverse, et l'exponentielle, construite en terminale en tant que courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = y$. Si l'on découvre que les deux équations aux différences utilisées précédemment, à savoir $\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$ ou $\Delta x = x \Delta y$ pour le logarithme, et $\Delta y = y \Delta x$ pour l'exponentielle, ne sont qu'une seule et même équation sous réserve de permuter les abscisses et les

ordonnées, on comprend vite qu'on a construit deux fois la même courbe à une symétrie près par rapport à la droite $y = x$. Compte tenu de cette symétrie, on s'aperçoit effectivement que les constructions élémentaires mises en évidence plus haut pour les tangentes aux deux courbes conduisent au même segment (cf. fig. 9).

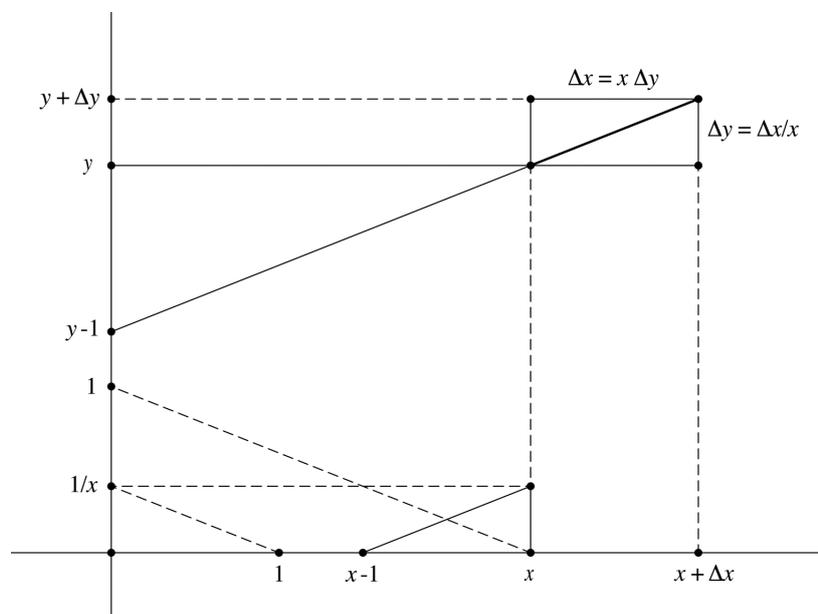


Figure 9. Lien entre les constructions du logarithme et de l'exponentielle

Ces constructions remarquablement simples, qui ne font intervenir que des connaissances géométriques élémentaires et qui ne nécessitent aucun calcul numérique, sont à la portée de tous les élèves sans exception. Elles permettent une approche concrète et directe de la fonction exponentielle dès le début de l'année de terminale. Si l'on se donne la peine d'effectuer ce travail en profondeur sur la notion même de courbe définie par une équation différentielle, une seconde approche réalisée ultérieurement sous forme numérique au moyen d'un tableur gagnera certainement en efficacité.

CONCLUSION

Il me semble que la seule façon d'aborder valablement certains éléments des programmes actuels est de revenir – au moins à titre transitoire – à la conception géométrique antérieure aux fondements de l'analyse de la fin du XIX^e siècle. Nous avons vu comment, en acceptant comme acquis un principe de continuité garantissant que les courbes se coupent et un principe de construction des courbes en tant que polygones à une infinité de côtés infiniment petits fournis par leurs tangentes, on parvenait à mettre en œuvre des activités très riches à support

concret et visuel, associant algèbre, géométrie et analyse, et donnant beaucoup de sens aux notions manipulées et reliées entre elles par les élèves. De plus, cette approche géométrique est considérablement facilitée et renforcée par le recours aux logiciels de géométrie dynamique. Par cette initiation à l'analyse reposant uniquement sur les connaissances géométriques élémentaires acquises par les élèves au collège et en seconde, je suis convaincu que l'on peut donner davantage de cohérence à ce que l'on fait au lycée tout en préparant solidement le terrain pour l'enseignement supérieur.