



HAL
open science

L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

| Léo Gerville-Réache. L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR. 2017. hal-01485446v1

HAL Id: hal-01485446

<https://hal.science/hal-01485446v1>

Preprint submitted on 8 Mar 2017 (v1), last revised 22 Mar 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR

Léo Gerville-Réache – IMS UMR 5218 – Université de Bordeaux

La Bataille des Sexes (The Battle of the sexes) est un problème de théorie des jeux qui pose la question de la coordination entre deux agents aux intérêts divergents.

Pour la petite histoire : un couple s'est donné rendez-vous pour la soirée, mais aucun ne parvient à se souvenir si c'est pour assister à un match de foot ou aller à l'opéra. Le mari préférerait aller voir le foot, la femme aimerait aller à l'opéra. Tous deux préfèrent cependant aller au même endroit plutôt que d'être seuls. S'ils ne peuvent pas communiquer, où iront-ils ?

La matrice des gains est la suivante :

	Husband	Opera	Football
Wife			
Opera		2, 1	0, 0
Football		0, 0	1, 2

Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégie pure. Mais les dissymétries de ses équilibres en font des stratégies inopérantes. Il existe également un équilibre de Nash en stratégie mixte, symétrique dans le sens où chaque époux choisit l'activité qu'il préfère avec même probabilité. En stratégie mixte, chaque époux choisit l'activité qu'il préfère avec une probabilité telle que, quelle que soit la stratégie de l'autre, son espérance de gain sera constante. En fait, les probabilités à l'équilibre rendent l'espérance de gain de chaque époux indépendante de la stratégie de l'autre. Ici, l'équilibre de Nash en stratégie mixte est celui où l'époux choisit le foot avec probabilité 2/3 et l'épouse choisit l'opéra avec probabilité 2/3. L'espérance de gain de chacun est alors de 2/3 (voir [1] et [2]).

La question est de comprendre sous quelles hypothèses cet équilibre mixte sera effectivement atteint ?

Cet équilibre sera l'issue du jeu si chacun des deux époux doute de la rationalité de l'autre et est incapable de mettre une loi de probabilité sur les choix possibles de l'autre. En effet, si l'un, par exemple l'époux, croit que son épouse choisira l'opéra avec probabilité p . Alors si il croit $p > 2/3$, il aura intérêt à choisir l'opéra avec probabilité 1. Si il croit $p < 2/3$, il aura intérêt à choisir le foot avec probabilité 1. Enfin, s'il croit $p = 2/3$, sa stratégie sera sans conséquence (dans le sens où son espérance de gain sera de 2/3).



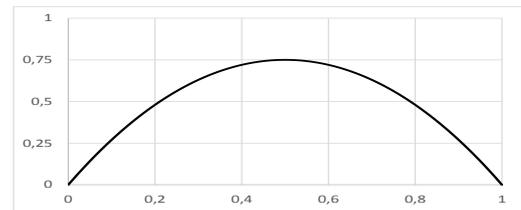
On peut donc affirmer que, si l'époux suppose que sa femme choisira l'opéra avec probabilité 2/3, il n'aura alors aucune raison suffisante de choisir le foot avec une probabilité de précisément 2/3.

Sous l'hypothèse de Connaissance Commune de la Rationalité (CKR), dont on sait qu'elle n'est ni une condition

nécessaire ni une condition suffisante d'atteinte d'un équilibre de Nash [3], l'issue de ce jeu symétrique est la solution optimale pour chacun dans l'ensemble des stratégies symétriques. Pour être clair, l'issue du jeu sous CKR est sans rapport avec un quelconque équilibre de Nash et sans rapport avec une quelconque Pareto-optimalité.

Aussi, l'issue du jeu sous CKR sera la probabilité p (qui est la probabilité que l'épouse choisisse l'opéra et également la probabilité que l'époux choisisse le foot) qui rend maximum l'espérance de gain de chacun.

Cette espérance vaut $2 \times p(1-p) + 1 \times p(1-p) = 3 \times p(1-p)$ pour les deux époux et est maximale pour $p = 1/2$. L'espérance de gain est alors de 3/4.



Sous CKR, la stratégie optimale de chacun des époux est de choisir avec équiprobabilité le foot et l'opéra. On remarquera que l'équilibre corrélé du jeu est que le couple choisisse avec équiprobabilité le foot et l'opéra!

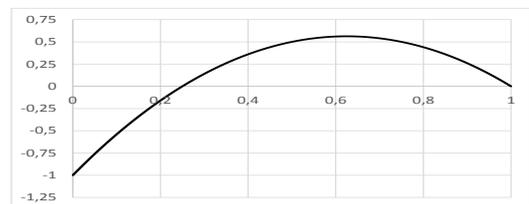
Une version plus réaliste de la bataille des sexes apparaît lorsque l'on suppose qu'en cas de non coordination, chacun préfère se retrouver dans son activité de prédilection.

	Husband	Opera	Football
Wife			
Opera		2, 1	0, 0
Football		-1, -1	1, 2

Dans ces nouvelles conditions, l'espérance de gain de chacun des époux sous CKR sera de :

$$2p(1-p) + (1-p)p - (1-p)^2 = (4p-1)(1-p).$$

Ici, l'espérance de gain est maximale pour $p = 5/8$ et cette espérance vaut 9/16.



L'issue de la bataille des sexes sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité n'est pas un équilibre de Nash. L'hypothèse CKR est un « maître du jeu ».

References

[1] Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991) *Game theory*, MIT Press, pp.18-20.
 [2] Binmore, K. (2006) *Making decisions in large worlds*, ADRES Conference, Marseilles, France, 15p.
 [3] Tercieux O. et Menager L. (2006) *Fondements épistémiques de concepts d'équilibre en théorie des jeux*. Revue d'économie industrielle, 114-115, pp.67-84.