



HAL
open science

L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

| Léo Gerville-Réache. L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR. 2017. hal-01485446v2

HAL Id: hal-01485446

<https://hal.science/hal-01485446v2>

Preprint submitted on 22 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'issue de la Bataille des Sexes sous CKR

Léo Gerville-Réache – IMS UMR 5218 – Université de Bordeaux

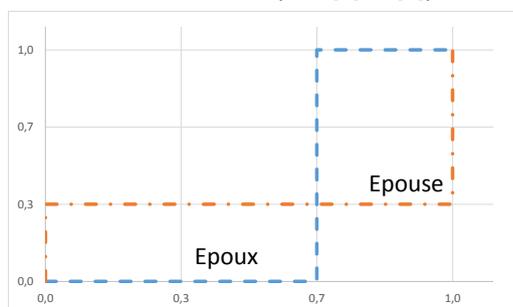
La Bataille des Sexes (The Battle of the sexes) est un problème de théorie des jeux qui pose la question de la coordination entre deux agents aux intérêts plutôt divergents.

Pour la petite histoire : un couple s'est donné rendez-vous pour la soirée, mais aucun ne parvient à se souvenir si c'est pour assister à un match de foot ou aller à l'opéra. Le mari préférerait aller voir le foot, la femme aimerait aller à l'opéra. Tous deux préfèrent cependant être ensemble que séparés. S'ils ne peuvent pas communiquer, où iront-ils ?

La matrice des gains est la suivante :

	Husband	Opera	Football
Wife			
	Opera	2, 1	0, 0
	Football	0, 0	1, 2

Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégie pure (O;O) et (F;F). Mais les dissymétries de ces équilibres en font des stratégies inopérantes. Il existe également un équilibre de Nash en stratégie mixte, symétrique dans le sens où chaque époux choisit l'activité qu'il préfère avec la même probabilité. Pour trouver cet équilibre, l'époux suppose que sa femme probabilise son choix de telle sorte qu'il sera indifférent entre toutes les probabilités à sa disposition (et réciproquement). Ici, l'équilibre de Nash en stratégie mixte est celui où l'époux choisit le foot avec probabilité 2/3 et l'épouse choisit l'opéra avec probabilité 2/3. L'espérance de gain de chacun est alors de 2/3 (voir [1] et [2]).



Equilibre de Nash (en fonction de la probabilité de foot)

Par exemple, ce raisonnement suppose que l'époux est certain que sa femme va choisir le foot avec probabilité 1/3 car c'est la seule manière pour l'épouse de rendre son mari indifférent. Ce raisonnement utilise l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité (CKR) : chacun sachant que l'autre est rationnel et que l'autre sait qu'il est rationnel etc..., chacun s'appuie sur cette CKR pour aboutir à cet équilibre mixte de Nash.

Mais plusieurs auteurs (voir par exemple [3]) s'interrogent sur les fondements et la pertinence de ce raisonnement. En effet, « si je suis certain que mon épouse choisira le foot avec probabilité 1/3, pourquoi mon indifférence entre l'opéra et le foot devrait me conduire à choisir précisément le foot avec une probabilité de 2/3 ? ». Rationnellement indifférent, l'époux devrait choisir le foot ou l'opéra avec équiprobabilité !

Aussi, l'équilibre mixte de Nash utilise clairement une conséquence extrêmement forte de la connaissance

commune de la rationalité : l'absence de choix. En effet, en refusant cette perte totale de libre arbitre réciproque, il n'existe aucune raison d'être certain que l'autre choisira nécessairement son activité préférée avec probabilité 2/3. Il s'ensuit que personne n'aura de raison rationnelle de choisir lui-même son activité préférée avec probabilité 2/3. L'équilibre de Nash fait l'hypothèse absence réciproque du libre arbitre.

Et alors ?

Alors, sous l'hypothèse CKR, dont on sait qu'elle n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante d'atteinte d'un équilibre de Nash [4], l'issue de ce jeu symétrique sera, en absence de libre arbitre, nécessairement symétrique et nécessairement établie par un raisonnement symétrique. Cette issue sera donc la solution optimale pour chacun des époux, dans l'ensemble des stratégies symétriques. Et on peut ajouter que l'issue du jeu sous CKR sera sans rapport avec un quelconque équilibre de Nash et sans rapport avec une quelconque Pareto-optimalité.

Aussi, l'issue du jeu sous CKR sera définie par une unique probabilité p (qui est la probabilité que l'épouse choisisse l'opéra et également la probabilité que l'époux choisisse le foot) qui rend maximum l'espérance de gain de chacun.

Cette espérance de gain vaut $2 \times p(1-p) + 1 \times p(1-p) = 3 \times p(1-p)$ pour les deux époux et est maximale pour $p=1/2$. L'espérance de gain est alors de 3/4.

Sous CKR, la stratégie optimale de chacun des époux est de s'en remettre au résultat du lancer d'une pièce équilibrée.

Quelle est la nature de cette solution du jeu ?

Ce n'est clairement pas un équilibre de Nash. On serait même tenté de dire que ce n'est même pas un équilibre stable !

En effet, chacun, supposant rationnellement que l'autre jouera avec équiprobabilité l'opéra et le foot, sera tenté de dévier unilatéralement de l'équiprobabilité. Il est vrai que si l'autre joue avec équiprobabilité, il est alors optimal de jouer finalement son activité préférée avec probabilité 1.

Mais l'idée même de dévier unilatéralement est asymétrique. De plus, c'est une fois encore croire qu'un couple d'individus, lié par la connaissance commune de la rationalité, aurait encore des choix à faire ! Dévier unilatéralement est tout simplement en contradiction avec l'hypothèse CKR.

Aussi, l'équiprobabilité est bien un équilibre, un équilibre stable, et l'issue du jeu sous connaissance commune de la rationalité.

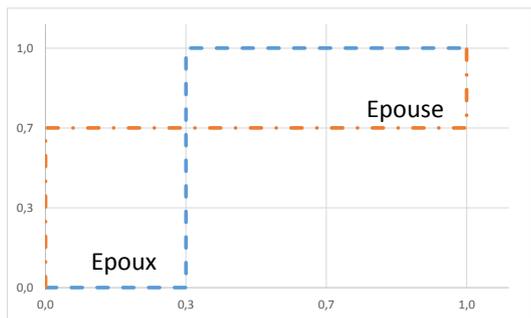
Soit... mais sans l'hypothèse CKR, quelle est l'issue du jeu ?

Sans CKR, aucun des deux individus ne peut établir sa stratégie sur la symétrie des actions. Personne ne peut non plus établir sa stratégie sur une quelconque asymétrie. Aussi, chacun doit définir une stratégie insensible à la stratégie de l'autre. Soit p_H la probabilité que l'homme choisisse le foot et p_F la probabilité que la femme choisisse l'opéra. Les espérances de gain des deux époux seront les suivantes :

$$E_H = 2 \times p_H(1 - p_F) + 1 \times p_F(1 - p_H) = 2p_H - p_F(3p_H - 1)$$

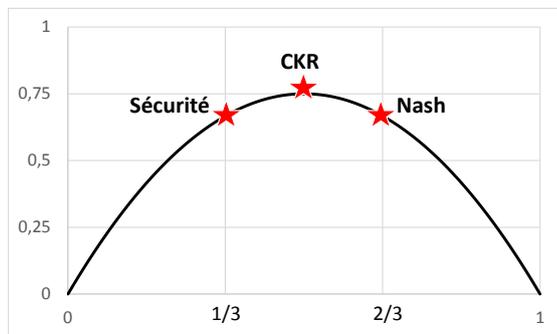
$$\text{et } E_F = 2 \times p_F(1 - p_H) + 1 \times p_H(1 - p_F) = 2p_F - p_H(3p_F - 1)$$

E_H est indépendante de p_F ssi p_H vaut $1/3$. Et sans surprise, E_F est indépendante de p_H ssi p_F vaut $1/3$. L'espérance de gain de chacun des époux sera alors de $2/3$. Chacun atteint ainsi le niveau de sécurité du jeu.



Equilibre sans CKR (en fonction de la probabilité de foot)

Aussi, deux individus rationnels sans connaissance commune de la rationalité joueront leurs stratégies de sécurité qui consiste à choisir avec probabilité $1/3$ son activité préférée. Il s'agit d'un équilibre dont la stabilité n'est pas due à l'obligation d'être rationnel mais bien à l'intérêt individuel de ne pas dévier unilatéralement.



Les espérances de gain des différents équilibres (en fonction de p)

Il est intéressant de noter que l'équilibre de sécurité, qui est l'issue rationnelle du jeu en absence de CKR produit une espérance de gain égale à celle de l'équilibre mixte de Nash (qui, de toutes façons, exploite faussement CKR).

Quid de l'équilibre corrélé ?

Avant de se trouver séparés et d'oublier ce qu'ils avaient convenu, qu'avaient-ils décidé ? Il est clair qu'il n'y avait aucune raison que l'un se désiste au profit de l'autre. Dans ces conditions, la solution du jeu consiste à tirer à pile ou face entre le foot et l'opéra. L'issue sera lors d'aller ensemble là où le sort en aura équitablement décidé. Cette méthode donne une espérance de gain à chacun de $3/2$ et l'issue sera un équilibre stable. Stable aussi parce que quel que soit l'issue, personne n'aura intérêt à dévier unilatéralement.

Aussi, leur décision commune avant d'être séparés était dictée par le résultat d'un lancer unique d'une pièce. Une fois séparés, et ayant oublié le résultat, c'est à chacun de faire ce lancer indépendamment.

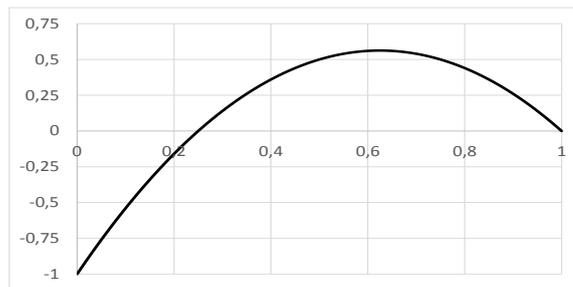
Y-a-t-il une version plus réaliste de la bataille des sexes ?

Oui, il existe une version où l'on suppose qu'en cas de non coordination, chacun préfère se retrouver dans son activité de prédilection.

	Husband	Opera	Football
Wife			
Opera		2, 1	0, 0
Football		-1, -1	1, 2

Une matrice des gains plus réaliste

Dans cette variante, l'espérance de gain de chacun des époux sous CKR sera de : $2p(1-p) + (1-p)p - (1-p)^2 = (4p-1)(1-p)$. Cette espérance est maximale pour $p=5/8$ et vaut alors $9/16$.



Espérance de gain sous CKR – variante (en fonction de p)

Ici, chacun des époux, isolé et sans communication possible, devra se rendre à son activité préférée avec probabilité $5/8$.

Que conclure de tout cela ?

Depuis l'axiomatisation de la théorie des jeux en 1944, de nombreuses situations de jeu restent problématiques. Le dilemme du prisonnier est le plus connu. Mais la bataille des sexes, bien que peu étudiée, est également très riche d'enseignement. Il y existe des équilibres de Nash en stratégie pure et mixte, un équilibre corrélé, un équilibre de sécurité et un dernier équilibre (plus subtil...).

Ce jeu nous fait réfléchir sur les implications jusque-boutiste de la connaissance commune de la rationalité et ses conséquences en termes de choix rationnel. Dès que la rationalité est connaissance commune, celle-ci annihile le libre arbitre des joueurs. Aussi, dans les jeux symétriques sous CKR, il est contradictoire d'envisager une stratégie asymétrique et d'imaginer pouvoir dévier unilatéralement. Conséquemment, les équilibres de Nash ne sont pas les seuls équilibres stables et l'ouverture provoquée par la connaissance commune de la rationalité est in fine un avantage pour chaque joueur.

Dans la bataille des sexes entre deux joueurs rationnels, les issues sans CKR et sous CKR ne sont pas des équilibres de Nash. Sans CKR, l'issue sera l'équilibre de sécurité (avec un gain espéré de $2/3$) et sous CKR, l'issue sera ce que l'on pourrait appeler le « CKR-équilibre » (avec un gain espéré atteignant $3/4$).

Plus généralement, ce CKR-équilibre sera l'issue de tous jeux symétriques sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité. Cet équilibre, nécessairement symétrique, s'établit simplement en maximisant l'espérance de gain de chaque joueur sur l'ensemble des stratégies symétriques.

Il s'ensuit, par exemple, que l'issue sous CKR du dilemme du prisonnier est la coopération mutuelle et que l'issue sans CKR est l'équilibre de sécurité (c'est-à-dire la dénonciation mutuelle). Les issues rationnelles du dilemme du prisonnier sont donc, également, sans rapport avec un quelconque équilibre de Nash.

References

[1] Binmore, K. (2006) *Making decisions in large worlds*, ADRES Conference, Marseilles, France, 15p.
 [2] Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991) *Game theory*, MIT Press, pp.18-20.
 [3] Guerrien B. (2002) *La théorie des jeux*, Economica, pp. 61-63.
 [4] Tercieux O. et Menager L. (2006) *Fondements épistémiques de concepts d'équilibre en théorie des jeux*. Revue d'économie industrielle, 114-115, pp.67-84.