HAL open science

Sur la continuité des homomorphismes d'algèbres

Mohammed El Azhari

To cite this version:

Mohammed El Azhari. Sur la continuité des homomorphismes d'algèbres. Comptes Rendus Mathématique, 1991, 13 (3), pp.99-103. hal-01483769

HAL Id: hal-01483769

https://hal.science/hal-01483769v1

Submitted on 6 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA CONTINUITE DES HOMOMORPHISMES D'ALGEBRES

M. EL AZHARI

Résumé. Nous donnons un théorème de continuité automatique (théorème II.1) dont la démonstration repose essentiellement sur la généralisation de la technique de DO.Sin.Sya. Comme conséquence, nous obtenons deux théorèmes de T.Husain et S.B.Ng (théorème 1 de [2] et théorème 1 de [3]).

I. Préliminaires

Soit E une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on dit souvent que E est une $\mathbb{K}$-algèbre. Si E est munie d'une topologie τ compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue, on dit que (E,τ) est une algèbre topologique.

Une algèbre localement convexe (en abrégé a.l.c) est une algèbre topologique munie d'une topologie d'espace localement convexe.

Soit (E,τ) une algèbre topologique. On dit que (E,τ) est une algèbre localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c) si τ est définie par une famille $(p_\lambda)_\lambda$ de semi-normes d'espace vectoriel vérifiant en outre $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)\, p_\lambda(y)$ pour tout λ et tous x,y de A.

II. Résultats.

Théorème II.1. Soient A,B deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels topologiques, A étant métrisable et complet. Soient $s : A \to A$, $h : B \to B$ deux fonctions tel que s est continue et $s(o) = 0$. Considérons $I_h = \{g \in B^* : g(h(x)) = g(x)^2$ pour tout x de B $\}$

(B^* dual algébrique de B) et supposons que I_h est non vide.

On suppose que B satisfait à la condition

(P) pour toute suite $\{y_n\} \subset B$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\longrightarrow 0$ il existe

$f \in I_h$ tel que $f(y_n) \not\longrightarrow 0$

alors toute application linéaire T de A dans B telle que $T(s(x)) = h(Tx)$ pour tout x de A, est continue.

Preuve : Supposons que T n'est pas continue. Il existe une suite $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subset A$, $x_n \longrightarrow 0$ mais $Tx_n \not\longrightarrow 0$. On peut supposer que $x_n \neq 0$ et $Tx_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par hypothèse, il existe $f \in I_h$ tel que $f(Tx_n) \not\longrightarrow 0$. On peut construire à partir de la suite $(x_n)_n$, une suite $(a_m)_m$ telle que $\inf_m f(Ta_m) = \varepsilon > 0$.

On a $\varepsilon^{-1} a_m \longrightarrow 0$ ainsi $s(\varepsilon^{-1} a_m) \longrightarrow 0$ car s est continue.

Posons $y_m = s(\varepsilon^{-1} a_m)$ pour tout $m \geqslant 1$.

Alors
$$\begin{aligned} f(Ty_m) &= f(T(s(\varepsilon^{-1} a_m))) \\ &= f(h(T(\varepsilon^{-1} a_m))) \\ &= f(T(\varepsilon^{-1} a_m))^2 \geqslant 1 \quad \text{pour tout } m \geqslant 1 \end{aligned}$$

On définit $g_k : A^{k+1} \longrightarrow A$ pour $k \geqslant 0$

$$g_o(b_1) = b_1$$
$$g_1(b_1, b_2) = b_1 + s(b_2)$$
$$\vdots$$
$$g_k(b_1, \ldots, b_{k+1}) = g_1(b_1, g_{k-1}(b_2, \ldots, b_{k+1}))$$

En utilisant la même construction faite dans [5] , on peut définir une sous-suite $(z_k)_{k \geqslant o}$ de $(y_m)_{m \geqslant 1}$ tel que pour tout $k \geqslant 0$ $(g_{p-k}(z_k, \ldots, z_p))_{p \geqslant k}$ est une suite de Cauchy.

Soit $c_k = \lim_{p\to\infty} g_{p-k}(z_k,\dots,z_p)$

par définition $g_{p-k}(z_k,\dots,z_p)=z_k + s(g_{p-(k+1)}(z_{k+1},\dots,z_p))$

On obtient $c_k = z_k + s(c_{k+1})$

ainsi $Tc_k = Tz_k + T(s(c_{k+1}))$

On a
$$\begin{aligned} f(Tc_k) &= f(Tz_k) + f(T(s(c_{k+1}))) \\ &= f(Tz_k) + f(h(Tc_{k+1})) \\ &= f(Tz_k) + (f(Tc_{k+1}))^2 \\ &\geqslant 1 + f(Tc_{k+1})^2 \qquad \text{pour tout } k\geqslant 0 \end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned} f(Tc_o) &\geqslant 1 + f(Tc_1)^2 \\ &\geqslant 2 + f(Tc_2)^2 \\ &\ \ \vdots \\ &\geqslant k + f(Tc_k)^2 \end{aligned}$$

i.e $f(Tc_o)\geqslant k$ pour tout $k\geqslant 0$

ce qui est absurde.

Comme conséquence , on a :

Théorème II.2. Soient A,B deux $\mathbb{R}$-algèbres topologiques, A métrisable et complète. On suppose que B satisfait à la condition (D) pour toute suite $\{y_n\}\subset B$, $y_n\neq 0$, $y_n \not\to 0$ il éxiste un caractère f de B tel que $f(y_n)\not\to 0$.

Alors toute application linéaire $T : A \longrightarrow B$ vérifiant $T(x^2) = (Tx)^2$ pour tout x de A, est continue.

Preuve. On considère $s : A \longrightarrow A$, $x \longmapsto x^2$ et $h : B \longrightarrow B$, $x \longmapsto x^2$

remarquons que f de la condition (D) est dans I_h. On applique alors le théorème II.1.

Théorème II.3. Soit A une $\mathbb{R}$-a.l.m.c. séquentiellement complète. Soit B une $\mathbb{R}$-algèbre topologique satisfaisant à la condition (D) du théorème II.2. Alors toute application linéaire T de A dans B vérifiant $T(x^2) = (Tx)^2$, $x \in A$, est bornée.

Preuve. On applique le théorème II.2 et le théorème de structure de M.Akkar ([1]) affirmant que si A est une a.l.m.c. séquentiellement complète, alors A est bornologiquement limite inductive d'a.l.m.c. métrisables et complètes.

Remarques 1. Les théorèmes II.2 et II.3 sont des améliorations des théorèmes 1 de [2] et 1 de [3] .

2. Dans l'énoncé du théorème II.1, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un corps archimédien.

3. $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach, mais $\mathbb{C}$ ne satisfait pas à la condition (D) car le seul caractère réel de $\mathbb{C}$ est l'application nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

4. On peut remplacer B dans les théorèmes II.2 et II.3 par $\mathbb{R}$; c'est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach qui satisfait à la condition (D).

Remerciements. Je remercie Messieurs les Professeurs M.Akkar et M.Oudadess pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportés durant l'élaboration de ce travail.

Références

[1] M.Akkar. "Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes". C.R.Acad.Sc.Paris 279 (1974), Serie A, 941-944.

[2] T.Husain and S.B.Ng. "On continuity of algebra homomorphisms and uniqueness of metric topology". Math.Zeit., 139(1974), 1-4.

[3] T.Husain and S.B.Ng. "Boundedness of multiplicative linear functionals". Canad.Math.Bull.Vol.17(2), (1974), 213-215.

[4] E.A.Michael. "Locally multiplicatively convex topological algebras". Mem.Amer.Math.Soc.11 (1952).

[5] S.B.Ng and S.Warner. "Continuity of positive and multiplicative functionals". Duke Math.J.39(1972), 281-284.

[6] Do.Sin.Sya. "On semi normed rings with an involution". Izv. Akad. Nauk, SSSR,t.23 (1959), 509-528.

Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoum, Rabat
B.P. 5118, Maroc.