



Unification par section de Dirac

Jean Louis Jonot

► To cite this version:

| Jean Louis Jonot. Unification par section de Dirac. 2017. hal-01478188

HAL Id: hal-01478188

<https://hal.science/hal-01478188>

Preprint submitted on 27 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Unification par section de Dirac

Jonot Jean Louis

ABSTRACT. Ce document est la synthèse d'une série d'articles décrivant un procédé d'unification des équations de Dirac et d'Einstein via les sections de Dirac. Cette représentation mathématique permettant d'unifier ces deux équations est obtenue en déterminant quatre matrices de Dirac appartenant à l'algèbre de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_4,$$

définies à partir d'une section de Dirac hermitienne. Si le tenseur de Ricci est inversible, l'opérateur de Dirac de rang 2 devient un opérateur d'Einstein. Si ce tenseur n'est pas inversible, l'opérateur de Dirac de rang 2 est un opérateur de Ricci. Dans les deux situations, cet opérateur permet de décrire l'équation relativiste d'Einstein à l'aide de l'opérateur de Dirac de rang 2 et le complexifié de l'opérateur de Dirac de rang 1 qui lui est associé donne l'équation relativiste de Dirac.

Le problème de l'existence des métriques de Dirac-Einstein, ou de façon plus faible des métriques d'Einstein, reste ouvert. Dans l'hypothèse où ces métriques n'existent pas, on identifie le tenseur énergie-impulsion $\kappa T_{\mu\nu}$ au tenseur symétrique associé à l'opérateur de Dirac de rang 2, en donnant une représentation de ce tenseur à partir des matrices de Majorana. Ce tenseur devient un tenseur réel symétrique que l'on identifie à $\kappa T_{\mu\nu}$.

1. Complexification des sections de Dirac réelles

Soit $\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, \mathcal{B})$ un fibré de Banach réel sur l'univers $\mathbf{W}$ [11]. Une section de Dirac est une section γ du fibré $(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta$, où $\xi_{\mathbf{W}}^*$ est le dual du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}} = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^p)$ [10]. A chaque événement $w \in \mathbf{W}$, on associe une application bilinéaire

$$\gamma(w) : T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta)$$

telle que $\forall d \in \Gamma(T^* \mathbf{W})$ et $\forall s \in \Gamma(\zeta)$, on ait

$$\gamma(d \otimes s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w)),$$

où

$$d(w) \otimes s(w) : T_w \mathbf{W} \rightarrow E_w(\zeta), d(w) \otimes s(w)(x) = d(w)(x) \cdot s(w), \forall x \in T_w \mathbf{W}.$$

On pose γ^d , la section définie par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s),$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18F15, 55R05, 83C05, 81R05, 81R50.

Key words and phrases. Algèbre de Clifford, opérateur de Dirac, section de Dirac, métrique Lorentzienne, connexion de Koszul, connexion de Levi-Civita.

qui à chaque événement $w \in \mathbf{W}$ et pour une section fixée $d \in \Gamma(T^*\mathbf{W})$, on ait

$$\gamma^d(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \gamma^d(w)(u) = \gamma(w)(d(w) \otimes u), \forall u \in E_w(\zeta)$$

en particulier, pour chaque événement $w \in \mathbf{W}$, $\gamma^d(w) \in \text{End}(E_w(\zeta))$.

DEFINITION 1. *La section de Dirac γ est bornée si pour toute section*

$$d \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}^*),$$

les endomorphismes $\gamma^d(w)$ sont bornées pour la structure de Banach induite par $\mathcal{B}$ sur les fibres $E_w(\zeta)$ et γ est à trace si chaque endomorphisme $\gamma^d(w)$ est à trace.

REMARK 1. *En dimension finie, toute section de Dirac γ est bornée et à trace.*

Soit (W, ϕ) une carte au voisinage de l'événement w de l'univers $\mathbf{W}$, on suppose que l'univers est de dimension $p \geq 4$ et on note $\{\partial_\nu : \nu = 0, 1, 2, \dots, p-1\}$, le local frame associé à la carte (W, ϕ) et $\{d^\mu : \mu = 0, 1, 2, \dots, p-1\}$ le local frame dual vérifiant

$$d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu.$$

A la section de Dirac γ , on associe les sections locales d'endomorphismes de Dirac

$$\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}, \mu = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

qui sont des endomorphismes bornés et à trace, on peut ainsi définir le tenseur de Poisson local

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu),$$

ce tenseur est un tenseur symétrique [4], [5], [6].

REMARK 2. *Le tenseur de Poisson choisi est défini à partir de l'équation relativiste de Dirac, on verra que l'on peut étendre la notion de tenseur de Poisson à des tenseurs de la forme*

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\text{Tr}(\gamma^\mu) \gamma^\nu) \text{ ou } \gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\bar{\gamma}^\mu \gamma^\nu)$$

qui permettent de définir des tenseurs réels symétriques dans le cas des sections de Dirac hermitiennes.

DEFINITION 2. *Si le tenseur de Poisson est métrique, on définit la métrique g par le tenseur*

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} = \frac{1}{p} \gamma^{\mu\nu},$$

où $(g^{\mu\nu})$ représente la matrice inverse de $(g_{\mu\nu})$.

REMARK 3. *La métrique $g_{\mu\nu}$ est indépendante du choix de la carte.*

On peut définir une section de Dirac γ par ses sections d'endomorphismes, en posant

$$\gamma^d = \alpha_\mu \gamma^\mu, d = \alpha_\mu d^\mu.$$

Soit ∇ une connexion de Koszul sur le fibré ζ , $\nabla : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta)$ où $\xi_{\mathbf{W}}^* = (T^*\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^p)$ est le fibré dual du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ de $\mathbf{W}$. On définit l'opérateur de Dirac de rang 1, par

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla, H_1 \in \text{End}(\Gamma(\zeta))$$

où

$$H_1(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)), \forall s \in \Gamma(\zeta) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

Le complexifié de l'opérateur H_1 , noté $\overline{H_1}$ est défini sur $\text{End}(\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C}))$ de la façon suivante. On se fixe une base de sections locales $\{e_\mu\}$ sur W , orthogonale et réduite pour la section des formes quadratiques Q associée à g ,

$$g(e_\mu, e_\nu) = \pm \delta_{\mu\nu}$$

et soit $\{e^\nu\}$ la base duale. On pose

$${}^\nu\gamma = \gamma^{e^\nu}, \quad (1.1)$$

où γ^{e^ν} est la section locale des endomorphismes de Dirac associée à la 1-forme e^ν .

LEMMA 1. Si ${}^{\mu\nu}\gamma = \text{Trace}({}^\nu\gamma({}^\mu\gamma))$ alors

$${}^{\mu\nu}\gamma = \pm p \delta^{\mu\nu}.$$

PROOF. On note $P = (\alpha_\mu^\nu)$ la section locale des matrices de passage des sections locales $\{\partial_\mu\}$ à $\{e_\mu\}$,

$$e_\mu = \alpha_\mu^\nu \partial_\nu$$

et

$$g(e_\mu, e_\nu) = \alpha_\mu^\tau \alpha_\nu^\sigma g_{\sigma\tau} = \pm \delta^{\mu\nu},$$

en représentation matricielle

$$\text{Tr } P(g_{\sigma\tau}) P = (\pm \delta^{\mu\nu}).$$

Soit $Q = (\beta_\tau^\nu)$ définie par

$$e^\nu = \beta_\tau^\nu d^\tau,$$

alors

$$\delta_\mu^\nu = e^\nu(e_\mu) = \alpha_\mu^\tau e^\nu(\partial_\tau) = \alpha_\mu^\tau \beta_\sigma^\nu d^\sigma(\partial_\tau) = \alpha_\mu^\tau \beta_\tau^\nu,$$

on en déduit que $Q = P^{-1}$. Ainsi

$${}^{\mu\nu}\gamma = \beta_\tau^\mu \beta_\sigma^\nu \gamma^{\tau\sigma} = p \beta_\tau^\mu \beta_\sigma^\nu g^{\tau\sigma} = \pm p \delta^{\mu\nu}.$$

□

Les endomorphismes de Dirac sont complexifiés en posant

$${}^\nu\overline{\gamma} = i({}^\nu\gamma) \text{ si } {}^{\nu\nu}\gamma = -p \text{ et } {}^\nu\overline{\gamma} = ({}^\nu\gamma) \text{ si } {}^{\nu\nu}\gamma = p,$$

on étend les sections des endomorphismes de Dirac au complexifié du fibré ζ en posant

$${}^\nu\overline{\gamma}(z) = -({}^\nu\gamma)(t) + i({}^\nu\gamma)(s) \text{ si } {}^{\nu\nu}\gamma = -p$$

et

$${}^\nu\overline{\gamma}(z) = ({}^\nu\gamma)(s) + i({}^\nu\gamma)(t) \text{ si } {}^{\nu\nu}\gamma = p, \forall z = s + it \in \Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C}),$$

on en déduit une complexification de la section de Dirac γ en posant

$$\overline{\gamma}(d \otimes z) = \lambda_\nu ({}^\nu\overline{\gamma})(z) \text{ si } d = \lambda_\nu e^\nu.$$

On peut complexifier la connexion de Koszul ∇ de façon canonique, en posant

$$\overline{\nabla} = \nabla + i\nabla,$$

sous forme de dérivée covariante, on a

$$\overline{\nabla}_Z(z) = \nabla_X(s) - \nabla_Y(t) + i(\nabla_X(t) + \nabla_Y(s))$$

où $Z = X + iY \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}})$ et $z = s + it \in \Gamma(\zeta)$. Avec ces définitions, l'opérateur de Dirac complexifié de rang 1 est

$$\overline{H_1} = \overline{\gamma} \otimes \overline{\nabla}, \overline{H_1} \in \text{End}(\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C}))$$

où

$$\overline{H_1}(z)(w) = \overline{\gamma}(w)(\overline{\nabla}z(w)), \forall z \in \Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C}) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

DEFINITION 3. On dira que l'opérateur $\overline{H_1}$ est obtenue par complexification métrique.

Il existe un autre procédé de complexification et de décomplexification entre les sections de Dirac hermitiennes et les sections de Dirac réelles qui sera développé dans les sections suivantes.

2. L'opérateur de Dirac de rang 2

On note $\Lambda^n \xi_{\mathbf{W}}^*$, le fibré des n -formes différentielles sur $\mathbf{W}$, d'espace total $\Lambda^n T^* \mathbf{W}$ et $\xi_{\mathbf{W}}^{p,q}$ le fibré des (p, q) -tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant

$$\xi_{\mathbf{W}}^{p,q} = (\xi_{\mathbf{W}}^*)^{\otimes p} \otimes (\xi_{\mathbf{W}})^{\otimes q},$$

d'espace total

$$T^{p,q} \mathbf{W} = (\otimes^p T^* \mathbf{W}) \otimes (\otimes^q T \mathbf{W}).$$

DEFINITION 4. Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^{d^\mu}\}$ est

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right] = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(\tau) \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\left\{ \gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right\} = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}}.$$

Quand on parle de symétrisé ou d'antisymétrisé de la famille

$$\left\{ \gamma^{d^j}, j = 1, \dots, n \right\},$$

on pose respectivement

$$\mathcal{S}(\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}) = \frac{1}{n!} \left\{ \gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right\}$$

et

$$\mathcal{A}(\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}) = \gamma^{d^1} \wedge \gamma^{d^2} \wedge \dots \wedge \gamma^{d^n} = \frac{1}{n!} \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right],$$

ces définitions interviennent dans la construction des espaces de Fock associé à l'espace des sections d'un fibré de Hilbert [7], [1]. Les extensions de rang n d'une section γ sont les sections γ_n de $\text{Hom}(\Lambda^n \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta, \zeta)$ définies par

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes s) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right](s), s \in \Gamma(\zeta)$$

et on prolonge γ_n par $\mathbb{R}$ -linéarité sur chaque fibre du fibré $\Lambda^n \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta$. Toute connexion de Koszul sur ∇ a une extension

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1} \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta),$$

$$d_0^\nabla = \nabla, \Lambda^0 \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta = \zeta$$

et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \psi \in \Lambda^n \xi_{\mathbf{W}}^*.$$

DEFINITION 5. *L'opérateur de Dirac de rang n associé à la connexion ∇ et γ est l'endomorphisme de $\Gamma(\zeta)$*

$$H_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \cdots \circ d_0^\nabla,$$

et $H_n(s) = \gamma_n(\nabla_{n-1}s), \forall s \in \Gamma(\zeta)$.

REMARK 4. γ_n est $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{R})$ -linéaire et H_n est $\mathbb{R}$ -linéaire. On a pour l'opérateur H_1 ,

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \text{ et } \gamma \otimes \nabla(fs) = \gamma^{df}(s) + f\gamma \otimes \nabla(s),$$

en un certain sens, γ^{df} mesure la "non $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{R})$ -linéaire" de l'opérateur H_1 .

Pour $n = 2$, l'opérateur de rang 2 s'écrit $H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$ avec $R^\nabla = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla$. On suppose que ζ est de dimension finie. Soit W une carte de l'univers $\mathbf{W}$ sur laquelle le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ et le fibré ζ sont trivialisables. On note, $\{\partial_\mu, 0 \leq \mu \leq p-1\}$ le local frame associé à la carte W et $\{d^\nu, 0 \leq \nu \leq p-1\}$ la base duale. Sur W , il existe une base locale de sections, notée $\{e_\alpha, 0 \leq \alpha \leq m-1\}$, $m = \dim \mathcal{B}$. Sur le fibré ζ , avec les notations précédentes

$$\gamma_2((d^1 \wedge d^2) \otimes s) = [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}](s) = \gamma^{d^1} \gamma^{d^2}(s) - \gamma^{d^2} \gamma^{d^1}(s),$$

$$R^\nabla = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla$$

représente la courbure de la connexion ∇ . Sur un ouvert de trivialisatation W du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ de $\mathbf{W}$ et du fibré ζ , pour $s = s^\alpha e_\alpha$, on a

$$\nabla s = (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta,$$

$\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ sont les coefficients de Christoffel de la connexion et

$$\begin{aligned} R^\nabla(s) &= d_1^\nabla(\nabla s) = d_1^\nabla((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta) \\ &= d((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \wedge \nabla e_\beta \\ &= (d(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \wedge d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^\tau d^\sigma) \otimes e_\tau \\ &= (d(\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) \wedge d^\nu) \otimes e_j - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^j d^\sigma) \otimes e_j \\ &= (\partial_\mu (\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) - (\partial_\mu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta) \Gamma_{\beta\nu}^j) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j \\ &= (\partial_\mu \partial_\nu s^j + (\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j) s^\tau) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j. \end{aligned}$$

La section de Dirac γ de ζ a pour représentation locale [5]

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma,$$

et pour $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$, en posant $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$, on a

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s) = \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + (\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j) s^\tau \right) [\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j),$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j) &= \gamma^\mu (\gamma_j^{\nu\sigma} e_\sigma) - \gamma^\nu (\gamma_j^{\mu\sigma} e_\sigma) \\ &= (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) e_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s^\alpha e_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + (\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j) s^\alpha \right) e_k.$$

Pour le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, \dots, p-1\}$ associé à la carte W , l'opérateur de dérivation $[\partial_\mu, \partial_\nu]$ est identiquement nul, donc

$$(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_\mu \partial_\nu s^j = \sum_{\mu < \nu} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) [\partial_\mu, \partial_\nu] s^j = 0,$$

et si on pose

$$\mathbf{r}_\tau^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left(\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right)$$

alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s^\alpha e_\alpha) = \mathbf{r}_\tau^k s^\tau e_k.$$

Pour $\nabla_{\partial_\mu} e_\sigma = \Gamma_{\mu\sigma}^k e_k$ on a

$$\nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} e_\sigma = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau) e_\tau,$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} - \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu}) e_\sigma &= (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau - \Gamma_{\nu\sigma}^k \Gamma_{\mu k}^\tau) e_\tau \\ &= R_{\sigma\nu\mu}^\tau e_\tau, \end{aligned}$$

la courbure de la connexion ∇ sur le fibré ζ est, voir [8] et [10],

$$\begin{aligned} R^\nabla (\partial_\nu, \partial_\mu) (e_\sigma) &= \nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} e_\sigma - \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu} e_\sigma \\ &= [\nabla_\nu, \nabla_\mu] (e_\sigma) = R_{\sigma\nu\mu}^\tau e_\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\sigma\nu\mu}^\tau &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau - \Gamma_{\nu\sigma}^k \Gamma_{\mu k}^\tau \\ &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu k}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^k - (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau - \Gamma_{\nu k}^\tau \Gamma_{\mu\sigma}^k) \\ &= \Lambda_{\sigma\nu\mu}^\tau - \Lambda_{\sigma\mu\nu}^\tau \end{aligned}$$

où

$$\Lambda_{\sigma\nu\mu}^\tau = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu k}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^k.$$

Sur une carte de trivialisation W de $\xi_{\mathbf{W}}$ et ζ , pour l'opérateur de Dirac de rang 2, on peut écrire

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s^\alpha e_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left(\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\tau e_k,$$

et

$$H_2 (s^\alpha e_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \Lambda_{\tau\mu\nu}^j s^\tau e_k$$

en permutant les indices μ et ν et en additionnant

$$\begin{aligned} H_2 (s^\alpha e_\alpha) &= \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) R_{\tau\mu\nu}^j s^\tau e_k \\ &= \gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} R_{\tau\mu\nu}^j s^\tau e_k \\ &= \gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} R_{\tau\mu\nu}^j s^\tau e_k, \end{aligned}$$

la matrice de H_2 dans la base de sections locales vérifie

$$h_\beta^k = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^k R_{\beta\mu\nu}^j,$$

l'opérateur H_2 n'est pas $C^\infty(W)$ -linéaire, mais sur chaque fibre cet opérateur est linéaire. La matrice de $H_2(w)$ dans la base $e_\alpha(w)$ est

$$h_\beta^k(w) = \frac{1}{2} [\gamma^\nu(w), \gamma^\mu(w)]_j^k R_{\beta\mu\nu}^j(w), \forall w \in W.$$

THEOREM 1. *L'opérateur H_2 s'écrit*

$$H_2 = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu] [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = (\gamma^\nu \wedge \gamma^\mu) [\nabla_\mu, \nabla_\nu].$$

PROOF. Il suffit de remarquer que

$$R_{\beta\mu\nu}^j = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]_\beta^j \text{ et } \gamma^\nu \wedge \gamma^\mu = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu].$$

□

REMARK 5. *On peut étendre ces calculs à une section de Dirac complexe. L'opérateur H_2 devient un opérateur complexe.*

3. L'équation relativiste d'Einstein

Dans ce qui suit le fibré ζ est le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$. Sous cette hypothèse une section de Dirac peut s'identifier à un $(1, 2)$ -tenseur

$$(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \xi_{\mathbf{W}})^* \otimes \xi_{\mathbf{W}} \approx \xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \xi_{\mathbf{W}}^{\otimes 2},$$

la connexion de Koszul est la connexion de Levi-Civita associée au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. On peut écrire la matrice de l'opérateur H_2 dans le local frame en fonction des matrices de spin et des matrices de courbure sous la forme

$$\mathcal{M}_{\{\partial_\nu\}}(H_2) = 2i\mathcal{S}^{\nu\mu}\mathbf{R}_{\nu\mu}, (\mathbf{R}_{\nu\mu})_\alpha^j = R_{\alpha\nu\mu}^j \forall j, \forall \alpha \text{ et } \mathcal{S}^{\nu\mu} = \frac{i}{4} [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \quad (3.1)$$

$\mathcal{S}^{\nu\mu}$ représentent les matrices de spin associées à la section de Dirac γ . L'équation 3.1 se met sous la forme $h_\rho^\sigma = \gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j$, par abaissant de l'indice σ on obtient

$$h_{\sigma\rho} = \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j \text{ avec } \gamma_{\sigma\tau}^\nu = g_{\sigma\alpha} \gamma_\tau^{\nu\alpha},$$

ce tenseur se décompose en un tenseur symétrique

$$S_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} (h_{\sigma\rho} + h_{\rho\sigma}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\mu\nu}^j)$$

et un tenseur antisymétrique

$$A_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} (h_{\sigma\rho} - h_{\rho\sigma}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j - \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\mu\nu}^j).$$

PROPOSITION 1. *Si la condition de Dirac $\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbf{I}_4$ est vérifiée alors*

$$g^{\nu\mu}\mathbf{R}_{\nu\mu} = \mathbf{O}_4.$$

On fait l'hypothèse que le tenseur symétrique $S_{\sigma\rho}$ est proportionnel au tenseur énergie-impulsion alors on peut définir la notion d'équation généralisée relativiste sous la forme

$$S_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}, \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.2)$$

DEFINITION 6. *L'opérateur H_2 est un opérateur de Ricci si $S_{\sigma\rho}$ s'identifie au tenseur $R_{\sigma\rho}$ et l'opérateur H_2 est un opérateur d'Einstein d'ordre λ si $S_{\sigma\rho}$ s'identifie au tenseur $R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}$, où λ est une C^∞ -application définie dans une carte de trivialisation, $R_{\sigma\rho}$ est le tenseur de Ricci et $g_{\sigma\rho}$ est le tenseur métrique.*

La relation 3.2 est motivée par les théorèmes suivants.

THEOREM 2. *Si les matrices de Dirac $\{\gamma^\nu\}$ vérifient*

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, \quad (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^\sigma = g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu - g^{\sigma\nu}\delta_j^\mu,$$

alors l'opérateur H_2 est un opérateur de Ricci.

PROOF. On a

$$\begin{aligned} h_\rho^\sigma &= \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\sigma R_{\rho\nu\mu}^j = \frac{1}{2} (g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu - g^{\sigma\nu}\delta_j^\mu) R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\delta_j^\mu R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j + \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\delta_j^\mu R_{\rho\mu\nu}^j \\ &= g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j = g^{\sigma\mu} R_{\rho\nu\mu}^\nu = g^{\sigma\mu} R_{\rho\mu} = R_\rho^\sigma, \end{aligned}$$

et par abaissement d'indice

$$h_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho}.$$

□

DEFINITION 7. *Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est inversible s'il existe un tenseur $T^{\mu\nu}$ tel que*

$$T^{\mu\tau} R_{\tau\nu} = \delta_\nu^\mu \text{ ou } R_{\nu\tau} T^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu.$$

REMARK 6. *Le tenseur $T^{\mu\tau}$ est unique si il existe.*

LEMMA 2. *Si $R_{\mu\nu}$ est inversible alors il existe un unique tenseur $\varepsilon^{\sigma\mu}$ tel que*

$$\varepsilon^{\sigma\mu} R_{\mu\rho} = g_\rho^\sigma. \quad (3.3)$$

PROOF. On pose $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_\rho^\mu)$, $\mathcal{R}_\rho^\mu = R_{\mu\rho}$ et $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\mu^\sigma)$, $\mathcal{E}_\mu^\sigma = \varepsilon^{\sigma\mu}$ alors 3.3 s'écrit

$$\mathcal{E}\mathcal{R} = \mathcal{G} \text{ avec } \mathcal{G} = (g_\rho^\sigma),$$

le tenseur $R_{\mu\rho}$ est inversible si et seulement si $\mathcal{R}$ est inversible donc

$$\mathcal{E} = \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1},$$

le tenseur $\varepsilon^{\sigma\mu}$ existe et est unique. □

THEOREM 3. *Si le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est inversible, on note $\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda)$ la matrice définie par*

$$(\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu,$$

et on fait l'hypothèse que les endomorphismes de Dirac associés à γ vérifient

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda)$$

alors le tenseur H_2 est un opérateur d'Einstein d'ordre λ . En particulier, pour

$$\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda,$$

où R est la courbure scalaire, l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho} \text{ ou } H_2 = \kappa T.$$

PROOF. On a

$$\begin{aligned}
h_\rho^\sigma &= \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\sigma R_{\rho\nu\mu}^j = \frac{1}{2} ((g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu) R_{\rho\nu\mu}^j \\
&= \frac{1}{2} (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j - \frac{1}{2} (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu R_{\rho\nu\mu}^j \\
&= \frac{1}{2} (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j + \frac{1}{2} (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu R_{\rho\mu\nu}^j \\
&= (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j \\
&= g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu} \delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j = g^{\sigma\mu} R_{\rho\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu} R_{\rho\mu} \\
&= R_\rho^\sigma + \lambda g_\rho^\sigma,
\end{aligned}$$

par abaissement de l'indice σ ,

$$h_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}.$$

Si $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$, alors

$$h_{\sigma\rho} = G_{\sigma\rho} + \Lambda g_{\sigma\rho},$$

où $G_{\sigma\rho}$ est le tenseur d'Einstein, Λ la constante cosmologique et

$$h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}.$$

□

DEFINITION 8. *La métrique g est une métrique de Ricci si et seulement si on a*

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}. \quad (3.4)$$

DEFINITION 9. *Une λ -métrique d'Einstein est une métrique pour laquelle*

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda). \quad (3.5)$$

REMARK 7. *L'existence des métriques de Ricci et d'Einstein reste un problème ouvert.*

On a identifié les sections par leurs représentations matricielles locales données dans le local frame.

Si il existe une métrique de Ricci dans l'univers ou une métrique d'Einstein alors on peut unifier les équations relativistes d'Einstein et de Dirac, sinon on donne une forme généralisée de l'équation d'Einstein 3.2, à partir de la base de Majorana

$$\begin{aligned}
\gamma_M^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \sigma_P^2 \\ \sigma_P^2 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_P^3 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & i\sigma_P^3 \end{pmatrix}, \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & -\sigma_P^2 \\ \sigma_P^2 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, \\
\gamma_M^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_P^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -i\sigma_P^1 \end{pmatrix}, \gamma_M^5 = \begin{pmatrix} \sigma_P^2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -\sigma_P^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\sigma_P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

sont les matrices de Pauli [2]. On procède de la façon suivante, à partir du local frame $\{\partial_\mu\}$ associé à une carte, on construit par le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmit, une base de sections locales $\{e_\mu\}$ orthogonale et réduite pour g . On note θ , la section des endomorphismes de passage de $\{\partial_\mu\}$ à $\{e_\mu\}$. En réindexant,

$$g(e_\mu, e_\mu) = -1 \text{ si } \mu = 0, g(e_\mu, e_\mu) = 1 \text{ si } \mu = 1, 2, 3 \text{ et } g(e_\mu, e_\nu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu,$$

et on fait l'hypothèse que les sections des endomorphismes de Dirac ${}^\mu\gamma$ définis en 1.1 ont pour matrices γ_M^μ , dans le local frame $\{\partial_\mu\}$, définies en 3.6. Sous cette hypothèse, on a la représentation de Majorana lorsque le local frame est une base orthogonale et réduite pour g , c'est-à-dire, lorsque l'univers est localement un espace de Minkowski. Comme précédemment, on note $P = (\alpha_\mu^\nu)$ la section locale des matrices de passage des sections locales $\{\partial_\mu\}$ à $\{e_\mu\}$, on a $e_\mu = \alpha_\mu^\nu \partial_\nu$, P est la représentation matricielle de θ dans les bases de sections locales respectivement $\{\partial_\mu\}$ et $\{e_\mu\}$ et

$$g(e_\mu, e_\nu) = \alpha_\mu^\tau \alpha_\nu^\sigma g_{\sigma\tau} = \pm \delta^{\mu\nu},$$

en représentation matricielle

$$\text{Tr } P(g_{\sigma\tau}) P = (\pm \delta^{\mu\nu}),$$

et on rappelle que si $Q = (\beta_\tau^\nu)$ est définie par

$$e^\nu = \beta_\tau^\nu d^\tau$$

alors $Q = P^{-1}$. Ainsi les représentations matricielles de γ^μ dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ sont données par

$$\alpha_\tau^\mu \gamma_M^\tau, \alpha_\tau^\mu \in \mathbb{R}$$

ces sections d'endomorphismes sont des sections d'endomorphismes à représentation matricielle en imaginaires purs. Ainsi le tenseur

$$h_{\sigma\rho} = \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j$$

est un tenseur réel. La représentation matricielle de la section des opérateurs H_2 dans le local frame s'écrit

$$\alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta] \mathbf{R}_{\mu\nu}, \text{ la somme se fait pour } \nu < \mu$$

avec,

$$\begin{aligned} [\gamma_M^0, \gamma_M^1] &= \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & -2\sigma_P^1 \\ -2\sigma_P^1 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, [\gamma_M^0, \gamma_M^2] = \begin{pmatrix} 2\mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -2\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \\ [\gamma_M^0, \gamma_M^3] &= \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & -2\sigma_P^3 \\ -2\sigma_P^3 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, [\gamma_M^1, \gamma_M^2] = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & -2\sigma_P^1 \\ 2\sigma_P^1 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, \\ [\gamma_M^1, \gamma_M^3] &= \begin{pmatrix} 2i\sigma_P^2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & 2i\sigma_P^2 \end{pmatrix}, [\gamma_M^2, \gamma_M^3] = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & 2\sigma_P^3 \\ 2\sigma_P^3 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sous forme tensorielle, l'équation généralisée s'écrit

$$\alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\sigma\varsigma} R_{\rho\mu\nu}^\varsigma = \kappa T_{\sigma\rho}, \nu < \mu$$

où $T_{\sigma\rho}$ est le tenseur énergie-impulsion. Si le tenseur

$$\alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\sigma\varsigma} R_{\rho\mu\nu}^\varsigma$$

n'est pas symétrique, on prend le symétrisé

$$\begin{aligned} \alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\sigma\varsigma} R_{\rho\mu\nu}^\varsigma + \alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\rho\varsigma} R_{\sigma\mu\nu}^\varsigma &= 2\kappa T_{\sigma\rho} \\ \text{et } \alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu M_{\sigma\varsigma}^{\tau\eta} R_{\rho\mu\nu}^\varsigma + \alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu M_{\rho\varsigma}^{\tau\eta} R_{\sigma\mu\nu}^\varsigma &= \kappa T_{\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $M_{\sigma\varsigma}^{\tau\eta} = \frac{1}{2} [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\sigma\varsigma}$ avec $[\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_{\sigma\varsigma} = g_{\sigma\alpha} [\gamma_M^\tau, \gamma_M^\eta]_\varsigma^\alpha$.

REMARK 8. *Tous les calculs sont développés à partir de deux hypothèses. La première hypothèse est que le symétrisé du tenseur $h_{\sigma\rho}$ associé au tenseur défini par l'opérateur de Dirac de rang 2 est proportionnel au tenseur énergie-impulsion et la deuxième hypothèse affirme que dans une base de sections locales orthogonale et réduite pour la métrique g , les sections des endomorphismes de Dirac ont pour représentation matricielle la représentation de Majorana. Sous ces hypothèses peut-on donner un sens physique au tenseur antisymétrique*

$$\alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu M_{\sigma\zeta}^{\tau\eta} R_{\rho\mu\nu}^\zeta - \alpha_\tau^\nu \alpha_\eta^\mu M_{\rho\zeta}^{\tau\eta} R_{\sigma\mu\nu}^\zeta ?$$

4. L'équation relativiste de Dirac

On suppose que le fibré ζ est complexe, γ est une section de Dirac et ∇ une connexion de Koszul complexe [10]. On s'intéresse à la représentation locale de l'opérateur $H_1 = \gamma \otimes \nabla$, dans une carte de trivialisatoin W de $\xi_{\mathbf{W}}$ et ζ . On pose $\gamma_\beta^{\nu\sigma} = (\gamma^\nu)_\beta^\sigma$ les coefficients de la matrice de γ^ν dans le local frame $\{e_\alpha, 0 \leq \alpha \leq p-1\}$ associé à la carte de trivialisatoin de ζ . Les fonctions locales $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ sont les symboles de Christoffel de la connexion ∇ . Dans une base de sections locales $\{e_\alpha : \alpha = 0, 1, \dots, p-1\}$, on pose si $s = s^\alpha e_\alpha$,

$$\nabla e_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta$$

où $L_\nu(s) = \mathcal{L}_\nu(s^\alpha) e_\alpha$, $\mathcal{L}_\nu$ est la dérivée de Lie le long du champ ∂_ν et la matrice de l'opérateur de Christoffel Γ_ν dans le local frame est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$. Avec ces notations, l'opérateur H_1 s'écrit,

THEOREM 4. *L'opérateur de Dirac H_1 est*

$$H_1 = \gamma^\nu D_\nu,$$

γ^ν sont les quatre endomorphismes de Dirac définies par le "local frame" où $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$.

On se place sur le fibré tangent $\zeta = \xi_{\mathbf{W}}$. Pour construire l'équation relativiste de Dirac, on part d'une section de Dirac réelle et de la connexion de Levi-Civita associée au tenseur métrique défini par le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$. On complexifie l'opérateur de Dirac H_1 par le procédé décrit plus haut, cet opérateur s'écrit

$$\overline{H}_1 = \overline{\gamma}^\nu D_\nu, \quad D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu \quad (4.1)$$

avec $L_\nu(Z) = \mathcal{L}_\nu(Z^\alpha) \partial_\alpha$, $\mathcal{L}_\nu(Z^\alpha) = \mathcal{L}_\nu(X^\alpha) + i\mathcal{L}_\nu(Y^\alpha)$ où $Z = Z^\alpha \partial_\alpha$ avec $Z^\alpha = X^\alpha + iY^\alpha$ et $\mathcal{L}_\nu$ est la dérivée de Lie le long du champ ∂_ν . L'opérateur Γ_ν a pour matrice $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ où

$$\overline{\nabla} \partial_\alpha = \nabla \partial_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes \partial_\beta,$$

les endomorphismes $\overline{\gamma}^\nu$ sont les endomorphismes associés à la section de Dirac $\overline{\gamma}$ complexifiée de γ .

REMARK 9. *Dans cette situation, les sections locales de ζ sont les sections locales de $\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$, c'est-à-dire, les champs locaux complexes de l'univers $\mathbf{W}$.*

L'opérateur de Christoffel Γ_ν défini sur les sections réelles de $(\xi_{\mathbf{W}}^ \otimes \xi_{\mathbf{W}})^* \otimes \xi_{\mathbf{W}}$ s'étend aux sections complexes, ainsi que l'opérateur de Lie s'étend aux champs complexes.*

L'équation relativiste de Dirac est donnée par

$$\overline{H}_1(Z) = \lambda Z, \quad Z \in \Gamma_W(\xi \mathbf{W} \otimes \mathbb{C}),$$

où λ est une fonction propre locale de $\overline{H}_1$ définie sur W cela signifie, puisque $\overline{H}_1$ est $\mathbb{C}$ -linéaire et que $\forall w \in W, Z(w) \in E_w(\xi \mathbf{W} \otimes \mathbb{C})$ est un vecteur propre pour l'endomorphisme $\overline{H}_1(w)$ de $E_w(\xi \mathbf{W} \otimes \mathbb{C})$. Dans le local frame l'équation de Dirac s'écrit

$$\overline{\gamma}_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda Z^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq 3, \quad (4.2)$$

ainsi les champs locaux propres de $\overline{H}_1$ ont une densité de masse λ , on peut ainsi quantifier les densités de masse d'un champ propre.

REMARK 10. Si le tenseur de Poisson associé à γ définit une métrique pseudo-riemannienne alors

$$\overline{H}_1(Z) = H_1(X) + iH_1(Y), \quad Z = X + iY,$$

l'opérateur $\overline{H}_1$ est l'extension naturelle de l'opérateur H_1 aux champs complexes.

Si on se place sur un univers parallélisable, le fibré tangent est trivial, ainsi que le complexifié. Les sections de ce fibré sont formées des C^∞ -applications de $\mathbf{W}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^4$. On se fixe une carte W de $\mathbf{W}$, de local frame $\{\partial_\nu\}$. L'équation de Dirac s'écrit [3]

$$\gamma_D^\mu \partial_\mu \psi = -\frac{imc}{\hbar} \psi, \quad \psi \in C^\infty(W, \mathbb{C}^4),$$

où

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \sigma_P^\mu \\ -\sigma_P^\mu & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } \mu = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

et σ_P^ν sont les matrices de Pauli définies en 3.7. Ces matrices ont pour tenseur de Poisson associé

$$\gamma^{00} = 4, \quad \gamma^{\mu\mu} = -4 \text{ pour } \mu = 1, 2, 3 \text{ et } \gamma^{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu$$

la métrique associée sur la carte est une métrique de Minkowski. La question que l'on peut se poser est de savoir si on peut écrire l'opérateur $\gamma^\nu \partial_\nu$ comme le complexifié d'un opérateur de Dirac réel de rang 1, dont la métrique locale est une métrique de Minkowski. On doit trouver quatre matrices réelles $\{\delta^\nu\}$ telles que

$$\delta^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}.$$

Les coefficients de Christoffel associés à cette métrique sont nuls, le complexifié s'écrit en utilisant 4.1

$$\overline{H}_1 = ({}^\mu \overline{\delta}) L_\mu = ({}^\mu \overline{\delta}) \partial_\mu$$

et ${}^\mu \overline{\delta} = \gamma^\mu$, en particulier

$$\delta^1 = -i\gamma^1 \text{ et } \delta^3 = -i\gamma^3,$$

l'opérateur de Dirac complexifié associé à la section de Dirac γ définie par les matrices gamma est

$$\overline{H}_1 = \gamma^0 \partial_0 + i\gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + i\gamma^3 \partial_3, \quad (4.4)$$

si on pose $\{\overline{\partial}_\mu\}$ la base de champs locaux complexes sur W par

$$\overline{\partial}_0 = \partial_0, \quad \overline{\partial}_1 = i\partial_1, \quad \overline{\partial}_2 = \partial_2 \text{ et } \overline{\partial}_3 = \partial_3$$

l'opérateur complexifié $\overline{H}_1$ s'écrit

$$\overline{H}_1 = \gamma^\mu \overline{\partial}_\mu.$$

5. Unification par section de Dirac hermitienne

DEFINITION 10. Une section de Dirac hermitienne est une section du fibré $(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta_{\mathbb{C}})^* \otimes \zeta_{\mathbb{C}}$ si $\forall d \in \xi_{\mathbf{W}}^*$, γ^d est hermitien.

Cette définition a un sens car le fibré $\xi_{\mathbf{W}}^*$ est réel et on a

$$\overline{\text{Tr} \gamma^{\lambda_\nu d^\nu}} = \overline{\text{Tr} (\lambda_\nu \gamma^{d^\nu})} = \overline{\lambda_\nu \text{Tr} \gamma^{d^\nu}} = \lambda_\nu \overline{\text{Tr} \gamma^{d^\nu}} = \lambda_\nu \gamma^{d^\nu} = \gamma^{\lambda_\nu d^\nu}.$$

Soit g une métrique de signature $(-, +, +, +)$ et W une carte de trivialisation de $\xi_{\mathbf{W}}$, le local frame et son dual sont notés $\{\partial_\mu\}$ et $\{d^\nu\}$. On pose

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu),$$

et soit $\{e_\mu\}$ une base de sections locales réduites et orthogonales pour g , $\{e^\nu\}$ est la base duale de $\{e_\mu\}$. Les procédés d'orthogonalisation de Gramm-Schmit étant C^∞ , la base de sections locales $\{e_\mu\}$ existe. On définit une section de Dirac hermitienne γ , en posant

$$\mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\gamma^{e^\nu}) = \gamma_D^\nu,$$

où γ_D^ν sont les matrices de Dirac définies en 4.3. Cette représentation est la représentation de Dirac. Avec les notations précédentes, soit $P = (\alpha_\mu^\nu)$ la section locale des matrices de passage de $\{\partial_\mu\}$ à $\{e_\mu\}$ et $Q = P^{-1} = (\beta_\mu^\nu)$ alors la représentation matricielle de $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$ dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ est

$$\alpha_\tau^\nu \gamma_D^\tau, \alpha_\tau^\nu \in \mathbb{R}$$

l'opérateur de rang 1 dans le local frame s'écrit

$$H_1 = \alpha_\tau^\nu \gamma_D^\tau (L_\nu + \Gamma_\nu), \quad (5.1)$$

et l'équation locale des champs complexes s'écrit

$$\alpha_\tau^\nu \gamma_D^\tau (L_\nu + \Gamma_\nu)(Z) = \lambda Z,$$

où λ est une fonction propre de H_1 définie localement sur la carte de trivialisation W . La section locale de Dirac définie par

$$\gamma(d \otimes Z) = \gamma^\nu(Z), d^\nu \in \Gamma(\xi_W^*)$$

est une section de Dirac locale hermitienne. On se fixe une section de Dirac hermitienne γ , métrisable. La métrique induite localement par le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est indépendante du choix de la carte de trivialisation choisie. L'opérateur de Dirac H_1 de rang 1 s'écrit dans une carte de trivialisation sous la forme 5.1. Pour une carte de trivialisation, le local frame $\{\partial_\mu\}$ est une base de champs locaux complexes du fibré $\xi_W \otimes \mathbb{C}$. La section des matrices de γ^d dans cette base est une section de matrices hermitiennes [10]

$$\mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\gamma^d) = A^d + iB^d, A^d, B^d \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

donc, A^d est symétrique et B^d est antisymétrique. La section de Dirac réelle $\gamma_{\mathbb{R}}^d$ dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ est

$$\mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\gamma_{\mathbb{R}}^d) = A^d + B^d$$

est la décomplexification de γ .

LEMMA 3. *L'application $\gamma_{\mathbb{R}}$ ne dépend que de la section hermitienne γ et l'application*

$$\gamma \rightarrow \gamma_{\mathbb{R}}$$

est un isomorphisme des sections de Dirac hermitiennes sur les sections de Dirac réelles.

PROOF. On pose $\hat{\gamma}^d(X) = \gamma^d(X + io)$, o est le champ nul, on vérifie que

$$\gamma_{\mathbb{R}}^d(X) = \text{Re } \hat{\gamma}^d(X) + \text{Im } \hat{\gamma}^d(X) \quad (5.2)$$

avec

$$\gamma^d(Z) = \hat{\gamma}^d(X) + i\hat{\gamma}^d(Y) \text{ si } Z = X + iY \in \Gamma(\xi_W \otimes \mathbb{C}), d \in \Gamma(\xi_W^*)$$

et

$$\gamma^d(Z) = \text{Re } \hat{\gamma}^d(X) - \text{Im } \hat{\gamma}^d(Y) + i(\text{Re } \hat{\gamma}^d(Y) + \text{Im } \hat{\gamma}^d(X)).$$

On note $A^d = \mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\text{Re } \hat{\gamma}^d)$ et $B^d = \mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\text{Im } \hat{\gamma}^d)$, la matrice

$$\mathcal{M}_{\{\partial_\mu\}}(\gamma^d) = A^d + iB^d, A^d, B^d \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

car

$$\begin{aligned} \gamma^d(\partial_\mu) &= \text{Re } \hat{\gamma}^d(\partial_\mu) + i \text{Im } \hat{\gamma}^d(\partial_\mu), \\ \text{Tr } \overline{A^d + iB^d} &= (\text{Tr } A^d) - i(\text{Tr } B^d) = A^d + iB^d \end{aligned}$$

donc $\text{Tr } A^d = A^d$ et $\text{Tr } B^d = -B^d$. L'endomorphisme symétrique $\text{Re } \hat{\gamma}^d$ et $\text{Im } \hat{\gamma}^d$ l'endomorphisme antisymétrique forment la décomposition d'un unique endomorphisme vérifiant 5.2. $\square$

DEFINITION 11. *Le passage de γ à $\gamma_{\mathbb{R}}$ est une décomplexification, le passage de $\gamma_{\mathbb{R}}$ à γ est une complexification.*

REMARK 11. *On parlera de complexification hermitienne pour la distinguer de la complexification métrique.*

La section de Dirac réelle $\gamma_{\mathbb{R}}$ définit un opérateur de Dirac de rang 2, noté

$$H_2 = (\gamma_{\mathbb{R}})_2 \otimes R^\nabla$$

où R^∇ est la courbure de la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g . Dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ associé à une carte de trivialisatation de ξ_W , la matrice de H_2 est

$$h_\rho^\sigma = \gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_j^{\mu\tau} R_{\mu\nu\rho}^j,$$

si

$$[\gamma_{\mathbb{R}}^\nu, \gamma_{\mathbb{R}}^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^\sigma = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu - g^{\sigma\nu} \delta_j^\mu \quad (5.3)$$

alors H_2 est un opérateur de Ricci et si le tenseur de Ricci est inversible, H_2 est un opérateur d'Einstein d'ordre λ si

$$[\gamma_{\mathbb{R}}^\nu, \gamma_{\mathbb{R}}^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda), (\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu. \quad (5.4)$$

Le problème d'unification par section hermitienne peut s'énoncer comme suit. On se fixe une matrice réelle symétrique inversible de signature $(+, -, -, -)$, notée $(g_{\mu\nu}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, de matrice inverse $(g^{\mu\nu})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe-t-il quatre matrices hermitiennes

$$M^\nu = A^\nu + iB^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

telles que si on note $N^\nu = A^\nu + B^\nu$, les matrices décomplexifiées associées aux matrices M^ν ,

$$\{M^\nu, M^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbf{I}_4 \text{ et } [N^\nu, N^\mu] = \mathcal{G}^{\mu\nu}(\lambda),$$

si la réponse est affirmative, on peut unifier par section de Dirac hermitienne. Si la réponse est négative, on est amené à unifier par paires de sections compatibles.

6. Les paires de sections compatibles

On se fixe deux sections de Dirac réelles ou complexes γ et ϱ métrisables. On sait que les métriques induites sur l'univers $\mathbf{W}$, par ces sections métrisables, sont idépendantes du choix de la carte choisie [5].

DEFINITION 12. *La paire de sections de Dirac (γ, ϱ) est compatible si et seulement si, les métriques qu'elles définissent, sont les mêmes. De façon plus générale, la paire (γ, ϱ) est isométriquement compatible si l'univers muni de la métrique induite par γ est isométrique à l'univers muni de la métrique induite par ϱ .*

Dans ce qui suit, γ est une section de Dirac complexe et ϱ est une section de Dirac réelle. Le théorème d'unification par paire s'écrit comme suit. On se fixe une carte de trivialisation W de $\mathbf{W}$ et le local frame $\{\partial_\mu\}$ qui lui est associé. On note $\{\gamma^\mu\}$ et $\{\varrho^\mu\}$ les sections locales d'endomorphismes de Dirac qui sont associées à γ et à ϱ respectivement. Le tenseur métrique s'écrit $g_{\nu\mu}$ avec

$$4g^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma^\nu \gamma^\mu) = \text{Trace}(\varrho^\nu \varrho^\mu),$$

on suppose que cette métrique est une métrique Lorentzienne de signature $(1, 3)$, c'est-à-dire, $(+, -, -, -)$. Il existe une base de sections locales $\{e_\mu\}$ orthogonale et réduite pour g . Si on note $\{e^\mu\}$ les sections locales d'endomorphismes de Dirac associées à $\{e_\mu\}$, on veut que l'équation relativiste de Dirac, dans la base sections locales orthogonale et réduite, retrouver l'équation de Dirac et que le tenseur associé à l'opérateur de Dirac de rang 2 défini par la section de Dirac ϱ soit une section de Ricci. On a les théorèmes suivants d'unification.

THEOREM 5. *L'équation de Dirac associée à la section γ s'écrit dans le local frame $\{\partial_\mu\}$*

$$\gamma^\mu (L_\mu + \Gamma_\mu) Z = \rho Z, \quad Z \in \Gamma_W(\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C})$$

où ρ est une fonction propre locale de l'opérateur $\gamma^\mu (L_\mu + \Gamma_\mu)$, L_μ est la dérivée de Lie le long du champ ∂_μ , Γ_μ est l'opérateur de Christoffel dont la matrice dans le local frame s'écrit $\Gamma_\mu = (\Gamma_{\alpha\mu}^\beta)$. Les endomorphismes $\{\gamma^\mu\}$ sont des sections locales d'endomorphismes dans l'algèbre de Clifford [9]

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbf{I}_4.$$

On impose la condition supplémentaire, si le local frame est orthogonal et réduit, c'est-à-dire, si localement on a une métrique de Minkowski alors les endomorphismes de Dirac $\{\gamma^\mu\}$ ont pour matrices dans le local frame les matrices gamma et pour fonction locale propre

$$\rho = -\frac{imc}{\hbar},$$

m est la masse de la particule.

REMARK 12. Dans l'hypothèse où la métrique est une métrique de Minkowski dans le local frame, l'opérateur de Christoffel est identiquement nul et on retombe sur l'équation relativiste de Dirac.

D'autre part, les fonctions propres associées à $\gamma^\mu (L_\mu + \Gamma_\mu)$ discrétisent, en un certain sens, les mesures des masses.

L'autre théorème permet d'écrire l'équation relativiste d'Einstein à l'aide de l'opérateur de rang 2 associée à la section de Dirac réelle.

THEOREM 6. Si les sections locales d'endomorphismes de Dirac $\{\varrho^\mu\}$ associées à la section de Dirac réelle ρ vérifient

$$[\varrho^\nu, \varrho^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu},$$

l'équation relativiste d'Einstein s'écrit sous la forme

$$H_2 = \left(\frac{1}{2}R - \Lambda \right) \mathcal{G} + \kappa \mathcal{T},$$

où H_2 est l'opérateur de Dirac de rang 2 associé à ϱ , $\mathcal{G}$ est l'opérateur métrique de matrice dans le local frame $\mathcal{G} = (g_\rho^\sigma)$, $\mathcal{T}$ est l'opérateur énergie-impulsion de matrice $\mathcal{T} = (T_\rho^\sigma)$ avec $T_{\sigma\rho}$ est le tenseur énergie-impulsion, la fonction R désigne la courbure scalaire, Λ la constante cosmologique et $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Si le tenseur de Ricci $R_{\sigma\rho}$ associé à la métrique g est inversible et

$$[\varrho^\nu, \varrho^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda),$$

avec $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$ alors l'équation d'Einstein s'écrit

$$H_2 = \kappa \mathcal{T}.$$

DEFINITION 13. Une équation unitaire est une équation qui lie les sections de Dirac γ et ϱ sous la forme

$$\mathcal{E}(\gamma_{\mathbb{R}}, \varrho) = o \text{ ou } \mathcal{E}(\gamma, \varrho_{\mathbb{C}}) = o$$

où o est la section identiquement nulle de $(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta$ avec $\zeta = \xi_{\mathbf{W}}$ ou $\zeta = \xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$.

REMARK 13. Dans le cas de l'unification par section de Dirac hermitienne, l'équation unitaire s'écrit

$$\gamma_{\mathbb{R}} = \varrho.$$

PROBLEM 1. Existe-t-il une équation unitaire entre les sections de Dirac γ et ϱ vérifiant les équations

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu} \mathbf{I}_4$$

et

$$[\varrho^\nu, \varrho^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu} \text{ ou } [\varrho^\nu, \varrho^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu} ?$$

Dans l'hypothèse où la section de Dirac ϱ vérifiant 5.3 ou 5.4 n'existe pas, il faut décomposer le tenseur $h_{\rho\sigma}$ associé à H_2 en un tenseur symétrique $S_{\rho\sigma}$ et un tenseur antisymétrique $A_{\rho\sigma}$.

7. Les tenseurs $S_{\rho\sigma}$ et $A_{\rho\sigma}$

Les tenseurs $S_{\rho\sigma}$ et $A_{\rho\sigma}$ sont les tenseurs, respectivement symétrique et anti-symétrique, associé au tenseur $h_{\rho\sigma}$,

$$S_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (h_{\rho\sigma} + h_{\sigma\rho}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\mu\nu}^j)$$

$$\text{et } A_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (h_{\rho\sigma} - h_{\sigma\rho}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j - \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\mu\nu}^j),$$

ces tenseurs $S_{\rho\sigma}$ et $A_{\rho\sigma}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} 2S_{\rho\sigma} &= \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\nu\mu}^j \\ &= (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta) R_{\eta\nu\mu}^j \\ &= (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta) g^{j\alpha} R_{\alpha\eta\nu\mu} \\ &= (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} \delta_\sigma^\eta) R_{\alpha\eta\nu\mu} \\ &= \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} R_{\alpha\rho\nu\mu} + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} R_{\alpha\sigma\nu\mu}, \end{aligned}$$

et

$$2A_{\rho\sigma} = \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} R_{\alpha\rho\nu\mu} - \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma^{\mu\tau\alpha} R_{\alpha\sigma\nu\mu}$$

on rappelle que le tenseur de courbure est défini dans le local frame sous la forme

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] (\partial_\beta) = R_{\beta\mu\nu}^\tau \partial_\tau, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\tau} R_{\beta\nu\mu}^\tau$$

avec cette notation, les symétries de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ s'écrivent

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\nu\mu}, \quad R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (7.1)$$

et l'identité cyclique

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (7.2)$$

THEOREM 7. Si

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta = \delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta} \quad (7.3)$$

alors

$$S_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma},$$

et si le tenseur $h_{\sigma\rho}$ est symétrique, l'équation 7.3 s'écrit

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}.$$

PROOF. On a

$$\begin{aligned} 2S_{\sigma\rho} &= \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\nu\mu}^j \\ &= (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta) R_{\eta\nu\mu}^j, \end{aligned}$$

si

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta = \delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta}$$

alors

$$\begin{aligned} 2S_{\sigma\rho} &= (\delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta}) R_{\eta\nu\mu}^j = \delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} R_{\eta\nu\mu}^j + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta} R_{\eta\nu\mu}^j \\ &= \delta_{\sigma\rho}^{\mu\eta} R_{\eta\mu} + \delta_{\rho\sigma}^{\mu\eta} R_{\eta\mu} = R_{\rho\sigma} + R_{\sigma\rho} = 2R_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

Si l'équation tensorielle 7.3 est vérifiée et si le tenseur $h_{\sigma\rho}$ est symétrique on a

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j - \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\nu\mu}^j = 0$$

et

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta = \frac{1}{2} (\delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta}).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} &= \frac{1}{2} (\delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta}) = \delta_{j\sigma}^{\nu\mu}, \\ \gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_j^{\mu\tau} &= g^{\sigma\kappa} \gamma_{\kappa\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \\ &= g^{\sigma\kappa} \delta_{j\kappa}^{\nu\mu} = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu \end{aligned}$$

et

$$\gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_j^{\mu\tau} - \gamma_\tau^{\mu\sigma} \gamma_j^{\nu\tau} = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu - g^{\sigma\nu} \delta_j^\mu,$$

ce qui s'écrit matriciellement $[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}$. $\square$

On rappelle que l'opérateur de Dirac de rang 2 est un opérateur de Ricci si

$$S_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho},$$

et un tenseur d'Einstein d'ordre λ est un tenseur qui s'écrit, dans le local frame, sous la forme

$$R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho},$$

où λ est une C^∞ -application définie dans une carte de trivialisation, $R_{\sigma\rho}$ est le tenseur de Ricci, $g_{\sigma\rho}$ est le tenseur métrique. On rappelle que le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est inversible s'il existe un tenseur $T^{\mu\nu}$ tel que

$$T^{\mu\tau} R_{\tau\nu} = \delta_\nu^\mu \text{ ou } R_{\nu\tau} T^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu.$$

Sous cette hypothèse, le tenseur $T^{\mu\tau}$ est unique si il existe. Si $R_{\mu\nu}$ est inversible il existe un unique tenseur $\varepsilon^{\sigma\mu}$ tel que

$$\varepsilon^{\sigma\mu} R_{\mu\rho} = g_\rho^\sigma \text{ et } \varepsilon_\sigma^\mu R_{\mu\rho} = g_{\sigma\rho}. \quad (7.4)$$

THEOREM 8. Si

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta = \delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} + \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta} + \lambda \varepsilon_\sigma^\eta \delta_{j\rho}^{\nu\mu} + \lambda \varepsilon_\rho^\eta \delta_{j\sigma}^{\nu\mu} \quad (7.5)$$

alors le tenseur $S_{\sigma\rho}$ est un tenseur d'Einstein d'ordre λ .

PROOF. On a

$$\begin{aligned} 2S_{\sigma\rho} &= \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\nu\mu}^j \\ &= (\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\rho^\eta + \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} \delta_\sigma^\eta) R_{\eta\nu\mu}^j \\ &= \delta_{j\rho\sigma}^{\nu\mu\eta} R_{\eta\nu\mu}^j + \delta_{j\sigma\rho}^{\nu\mu\eta} R_{\eta\nu\mu}^j + \lambda \varepsilon_\sigma^\eta \delta_{j\rho}^{\nu\mu} R_{\eta\nu\mu}^j + \lambda \varepsilon_\rho^\eta \delta_{j\sigma}^{\nu\mu} R_{\eta\nu\mu}^j \\ &= \delta_{\rho\sigma}^{\mu\eta} R_{\eta\mu} + \delta_{\sigma\rho}^{\mu\eta} R_{\eta\mu} + \lambda \varepsilon_\sigma^\eta \delta_\rho^\mu R_{\eta\mu} + \lambda \varepsilon_\rho^\eta \delta_\sigma^\mu R_{\eta\mu} \\ &= R_{\sigma\rho} + R_{\rho\sigma} + \lambda \varepsilon_\sigma^\eta R_{\eta\rho} + \lambda \varepsilon_\rho^\eta R_{\eta\sigma} \\ &= R_{\sigma\rho} + R_{\rho\sigma} + \lambda g_{\sigma\rho} + \lambda g_{\rho\sigma} \\ &= 2(R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}). \end{aligned}$$

$\square$

COROLLARY 1. Si l'équation 7.5 est vérifiée pour $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$, l'équation relativiste d'Einstein s'écrit sous la forme

$$S_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}$$

où $T_{\sigma\rho}$ est le tenseur énergie-impulsion.

8. Les métriques de Dirac-Ricci-Einstein

Les métriques de Dirac-Ricci-Einstein sont des métriques construites à partir d'une section de Dirac métrisable. Si $g^{\nu\mu}$ est le tenseur métrique défini par les sections locales d'endomorphismes de Dirac γ^μ dans le local frame, cette métrique est une métrique de Dirac si

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbf{I}_4, \quad (8.1)$$

c'est une métrique de Ricci si le symétrisé $S_{\sigma\rho}$ du tenseur associé à l'opérateur de Dirac de rang 2 vérifie

$$S_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho}.$$

Si ce tenseur vérifie

$$S_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$$

on dit que la métrique est une métrique d'Einstein. La métrique de Minkowski est une métrique de Dirac pour la section de Dirac dont les sections d'endomorphismes, définies sur une carte de trivialisations, ont pour matrices les matrices de Dirac γ_D^μ dans le local frame. Si les sections d'endomorphismes de Dirac, définies sur une carte de trivialisations, vérifient 7.3 alors la métrique est de Ricci et si 5.3 est vérifiée la métrique est une métrique de Ricci et le tenseur associé à l'opérateur de Dirac de rang 2 est symétrique.

On peut donner des conditions sur les sections locales d'endomorphismes de Dirac. Si 7.5 est vérifiée alors le tenseur $S_{\sigma\rho}$ est un tenseur d'Einstein d'ordre λ , cette équation a un sens que si le tenseur de Ricci est inversible. L'existence de métrique de Ricci et d'Einstein est un problème ouvert. L'unification est donnée par l'existence d'une métrique de Dirac-Einstein, c'est-à-dire, une métrique d'Einstein qui vérifie la condition de Dirac 8.1. Ainsi on peut reformuler l'équation relativiste d'Einstein sous la forme 3.2.

9. Conclusion

On a démontré que l'on pouvait, sous certaines hypothèses, écrire l'équation relativiste de Dirac comme l'équation propre d'un opérateur de rang 1, d'une section de Dirac hermitienne métrisable γ . Pour l'équation relativiste d'Einstein, sous certaines hypothèses, l'opérateur de rang 2 d'une section de Dirac ϱ réelle de Ricci ou d'Einstein, s'écrit comme combinaison linéaire de l'opérateur de Ricci et de l'opérateur métrique. L'équation relativiste d'Einstein devient une relation entre opérateurs, tandis que l'équation relativiste de Dirac s'écrit comme une équation propre d'un opérateur.

L'unification se fait en déterminant une équation entre γ et ϱ , de façon précise entre $\gamma_{\mathbb{R}}$ et ϱ ou γ et $\varrho_{\mathbb{C}}$. La première équation du type $\mathcal{E}(\gamma_{\mathbb{R}}, \varrho) = o$ est une équation dans l'espace des sections de Dirac réelles. La deuxième, $\mathcal{E}(\gamma, \varrho_{\mathbb{C}}) = o$ est une équation dans l'espace des sections complexes hermitiennes. Certains problèmes d'unification par sections de Dirac restent ouverts. L'existence des métriques de Dirac-Ricci ou de Dirac-Einstein n'est pas résolue complètement. Le tenseur anti-symétrique associé au tenseur défini par la section de Dirac de rang 2, n'a pas encore d'interprétation physique. L'hypothèse d'identifier le tenseur symétrique associé à H_2 au tenseur $\kappa T_{\mu\nu}$, permet d'unifier les équations de Dirac et d'Einstein si

ce tenseur est un tenseur d'Einstein d'ordre λ avec

$$\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda.$$

References

- [1] Arai A. "A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)
- [2] Arkfen G. "Mathematical Methods for Physicists", 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 211-217, (1985)
- [3] Esteban M.J., Séré E., "Les équations de Dirac-Fock". Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
- [4] Jonot J.L., "Représentation unitaire dans les algèbres de Clifford" hal.archives-ouvertes.fr(2016)
- [5] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac", hal.archives-ouvertes.fr(2016)
- [6] Jonot J.L., "Sur les opérateurs de Dirac de rang supérieur et l'équation relativiste d'Einstein", hal.archives-ouvertes.fr(2016)
- [7] Jonot J.L., "Quantification des fibrés des états", hal.archives-ouvertes.fr(2015)
- [8] Kobayashi S. and Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience (1996)
- [9] Porteous I., "Clifford Algebras and the Classical Groups", Cambridge University Press (1995)
- [10] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
- [11] Tumpach A.B. "Variétés kaehlériennes et hyperkaélériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes, (2006)

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr ou j.jonot@gmail.com