



HAL
open science

Mesures géométriques pour les groupes d'homologie : vers une adaptation aux complexes simpliciaux

Aldo Gonzalez-Lorenzo, Alexandra Bac, Jean-Luc Mari, Pedro Real

► To cite this version:

Aldo Gonzalez-Lorenzo, Alexandra Bac, Jean-Luc Mari, Pedro Real. Mesures géométriques pour les groupes d'homologie : vers une adaptation aux complexes simpliciaux. Journées du Groupe de Travail en Modélisation géométrique (GTMG 2016), Mar 2016, Dijon, France. pp.12-15. hal-01476541

HAL Id: hal-01476541

<https://hal.science/hal-01476541v1>

Submitted on 24 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesures géométriques pour les groupes d'homologie : vers une adaptation aux complexes simpliciaux

Aldo Gonzalez-Lorenzo^{1,2}, Alexandra Bac¹, Jean-Luc Mari¹ et Pedro Real²

¹Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296, Marseille (France)

²Université de Séville, Institut de Mathématiques IMUS, Séville (Espagne)

Résumé

Les mesures pour les groupes d'homologie ont été introduites récemment pour les objets discrets. Étant donné un volume binaire (un ensemble de voxels), on obtient deux mesures pour chaque générateur de groupes d'homologie associés à ce volume : l'épaisseur (thickness) et l'ampleur (breadth). Elles sont définies à partir de la transformée de distances signée et la persistance homologique et elles permettent de mesurer les trous du volume sous deux points de vue : est-il facile de le casser ou de le remplir ? Cette approche donne une heuristique aussi pour casser ou remplir les trous de façon minimale.

Nous présentons dans ce court article un travail en cours sur l'adaptation de ces définitions au contexte des complexes simpliciaux. La difficulté consiste à définir la transformée de distances signée pour un tel complexe.

The measures for the homology groups were recently introduced in the context of discrete objects. Given a binary volume (a set of voxels), we can obtain two measures for each generator of the homology groups associated to the volume : its thickness and its breadth. They are defined through the signed distance transform and the persistent homology, and they allow to measure the holes of a volume from two points of view : is the hole easy to break or to fill ? This approach provides also a heuristic for breaking or filling holes in a minimal way.

We present in this short article the ongoing work on adapting these definitions to the context of simplicial complexes. The difficulty consists of defining the signed distance transform for such a complex.

Mots-clés : complexe simplicial, homologie, mesures, persistance homologique, morphologie mathématique

1. Introduction

Le calcul de l'homologie est un outil permettant la classification et la compréhension des objets discrets d'une façon rigoureuse en dimension quelconque.

Un *objet discret* est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{Z}^d$ muni d'une relation de connectivité. On assume dans cet article que X est un volume ($d = 3$) et ses éléments sont appelés *voxels*. Néanmoins, la généralisation vers des dimensions supérieures est triviale. L'homologie n'est pas directement calculée sur le volume, mais sur son complexe cubique [KMM04] associé.

L'homologie [Mun84] est un outil algébrique qui formalise la notion de « trou ». On obtient une suite de groupes abéliens associés à un objet, dont les éléments sont des

sommes de trous. Ces éléments ont une interprétation simple dans \mathbb{R}^3 : les 0-trous (les éléments du groupe d'homologie H_0) sont des composantes connexes de l'objet, les 1-trous sont des tunnels ou anses et les 2-trous sont des cavités. Quand on calcule l'homologie d'un objet, on veut obtenir le nombre de trous de chaque dimension (les *nombres de Betti*), qui sont les rangs des groupes d'homologie, et un représentant de chaque trou. Malheureusement, le calcul de l'homologie se fait à un niveau abstrait (le complexe de chaînes) qui néglige le plongement de l'objet dans \mathbb{R}^3 . La géométrie de l'objet est donc perdue.

De plus, les trous sont difficiles à visualiser. On peut savoir combien de trous il y a dans un objet, mais pas où ils se trouvent. Pour montrer cela, on remarque qu'un cube creux sans ses faces contient cinq 1-trous au lieu de six. Dans cet exemple il n'y a pas de manière de repérer canoniquement ces 1-trous.

Dans un travail très récent [GBMRar] on munit les nombres de Betti de deux mesures (l'épaisseur et l'ampleur) ayant une interprétation géométrique. Ces mesures sont uniques et peuvent donc être utilisées comme descripteurs topologiques. Elles sont définies à partir de la transformée de distances signée du volume et la persistance homologique d'une filtration définie naturellement.

De plus, cette approche donne une heuristique pour trouver de petits générateurs des groupes d'homologie (et aussi de cohomologie) ainsi qu'une façon de remplir (en ajoutant des cellules) ou de casser (en supprimant des cellules) les trous de façon minimale.

Dans ce court article on présente les problèmes que cette notion pose quand on considère des complexes simpliciaux comme donnée d'entrée.

2. Les mesures

Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ un volume, sa transformée de distances signée est l'application $tds_X : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$tds_X(x) = \begin{cases} -\min\{d(x,y) \mid y \notin X\} & \text{si } x \in X \\ \min\{d(x,y) \mid y \in X\} & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

Ici $d(x,y)$ dénote la distance Euclidienne, mais rien n'empêche de considérer une autre distance.

Notons que $tds_X^{-1}([-\infty, 0]) = X$, $tds_X^{-1}([-\infty, t]) \subset X$ si $t < 0$, $tds_X^{-1}([-\infty, t]) \supset X$ si $t > 0$ et $tds_X^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}^3$. Donc $\{tds_X^{-1}([-\infty, t])\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une suite de volumes imbriqués.

La persistance homologique [EH08] est une théorie qui permet d'étudier l'homologie non d'un espace, mais d'une suite d'espaces imbriqués. Elle permet d'obtenir non seulement les nombres de Betti dans chaque espace, mais elle fournit pour chaque trou l'espace où il apparaît et l'espace où il disparaît. Plus formellement, étant donnée une *filtration* (suite finie $F = \{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ de complexes imbriqués), son diagramme de persistance est l'ensemble de points (appelés *intervalles de persistance*) $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tel qu'un trou est créé dans X_i et disparu dans X_j . Les volumes $\{tds_X^{-1}([-\infty, t])\}_{t \in \mathbb{R}}$, une fois transformés en complexes cubiques, constituent une filtration. Les intervalles (i, j) contenant le zéro correspondent aux trous présents dans $tds_X^{-1}([-\infty, 0]) = X$. Donc, chaque trou de X est identifié à un intervalle de persistance (i, j) où $-i$ est appelé son *épaisseur* et j , son *ampleur*.

Ces mesures donnent une information géométrique des trous, bien que la notion de trou soit topologique et donc dépourvue de métrique. De plus, on peut visualiser ces mesures à l'aide de boules. Pour chaque trou, sa *boule d'épaisseur* est la boule $B(x_e, e)$ où x_e est le barycentre de la cellule (non-unique) qui crée le trou et e dénote son épaisseur. Symétriquement, sa *boule d'ampleur* est la boule $B(x_a, a)$ où x_a est le barycentre de la cellule (non-unique) qui détruit

le trou et a dénote son ampleur. Ces deux boules permettent une visualisation des trous complètement différente à celle donné par les générateurs des groupes d'homologie. La figure 1 montre les boules d'épaisseur et d'ampleur pour le même volume.

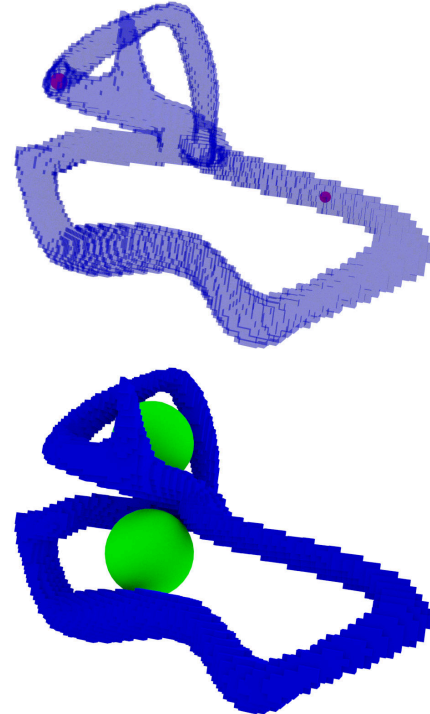


Figure 1: Boules d'épaisseur (haut) et d'ampleur (bas) d'un volume.

3. Deux applications

Le calcul de la persistance homologique d'une filtration peut être enrichi avec une suite des réductions [Ser92]. Brièvement, une réduction est un triplet d'applications (h, f, g) qui connecte le complexe à ses groupes d'homologie. Pour chaque trou d'un volume, sa boule d'épaisseur permet de trouver un générateur du groupe de cohomologie qui est typiquement minimal au sens du nombre de cellules. Il suffit de construire une filtration basée sur la distance vers la cellule σ_e qui crée le trou et utiliser l'application g pour détecter le premier cocycle contenant le trou considéré. Symétriquement, sa boule d'ampleur permet de trouver un générateur du groupe d'homologie typiquement minimal en utilisant l'application f .

Aussi, à l'aide de l'application h on peut obtenir un ensemble (typiquement minimal) de cellules qui bouchent le trou. D'autre part, les générateurs de cohomologie décrits auparavant permettent d'obtenir un ensemble (typiquement minimal) de cellules qui cassent le trou. La figure 2 montre

les générateurs d'homologie et cohomologie obtenus pour un volume ainsi que le remplissage et la fissure de ses trous.

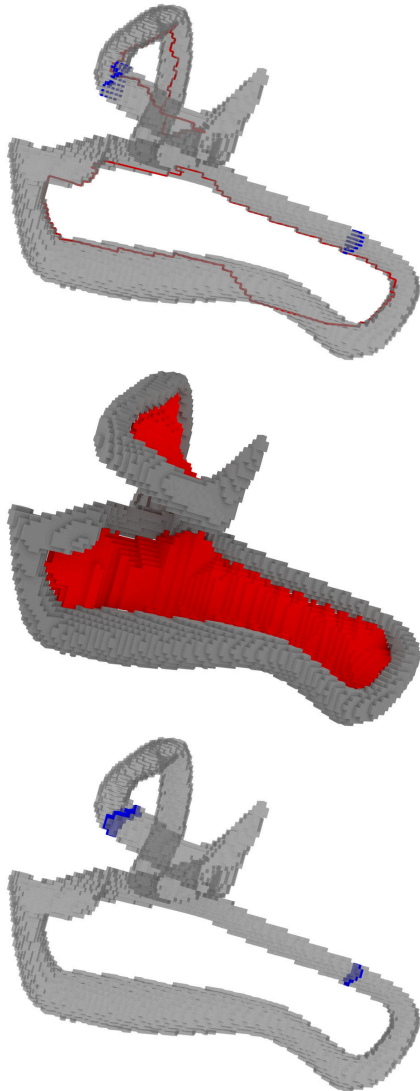


Figure 2: Haut : générateurs d'homologie (rouge) et cohomologie (bleu) d'un volume. Milieu : ensemble de cellules remplissant ses trous. Bas : ensemble de cellules cassant ses trous.

Notons que ces heuristiques ne donnent pas toujours des ensembles minimaux, mais les résultats obtenus sont prometteurs.

4. Passage aux complexes simpliciaux

La filtration utilisée pour définir les mesures est facile à calculer dans le contexte des volumes. Il suffit de calculer la transformée de distances signée sur un ensemble discret et

régulier de points et ensuite construire le complexe cubique d'une façon triviale. Cela n'est pas le cas pour des complexes simpliciaux. Nous résumons ici deux techniques qui peuvent être utilisées pour ce cas.

Première approche : discrétiser. La solution la plus simple consiste à discrétiser le complexe simplicial. En fixant un paramètre, on peut transformer le complexe simplicial dans un volume et donc calculer les mesures des trous de la façon usuelle. Le processus de discrétisation peut créer ou détruire des trous qui étaient présents dans le complexe simplicial, mais cela ne devrait affecter que les trous avec une petite épaisseur ou ampleur.

Deuxième approche : morphologie mathématique sur les complexes simpliciaux. Une solution plus développée consiste à définir une opération de dilatation et d'érosion sur le complexe simplicial. Ceci ne devrait pas sembler une idée étrange puisque les volumes $tds_X^{-1}([-\infty, t])$ sont des dilations et érosions de X . Considérons juste la dilatation pour le moment. Soit K un complexe simplicial et $\epsilon > 0$, on peut envisager deux approches :

1. L'élément structurel est un polyèdre qui approche une boule de rayon ϵ ;
2. On calcule un complexe simplicial qui approche l'ensemble $|K| \oplus B(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, |K|) \leq \epsilon\}$ où $|K|$ dénote la réalisation géométrique de K , $B(\epsilon)$ est la boule de rayon ϵ et \oplus dénote la somme de Minkowski.

Dans les deux cas il faut obtenir un complexe simplicial $dil(K, \epsilon)$ qui contient K comme un sous-complexe. Cet opération ne semble pas triviale puisqu'il faut bien gérer les auto-intersections de la dilatation et tétraédriciser la différence entre les deux complexes. En appliquant cet opération itérativement on arrive à obtenir une tétraédricisation du complémentaire de K où chaque simplexe est étiqueté avec la distance vers le complexe K .

L'érosion présente le même problème, puisqu'une érosion est une dilatation « vers l'intérieur ». Appelons le complexe érodé $erod(K, \epsilon)$. Notons alors que la sous-division interne de K doit être modifiée pour que $erod(K, \epsilon)$ soit un sous-complexe simplicial.

Si les deux opérations $dil(K, \epsilon)$ et $erod(K, \epsilon)$ peuvent être définies on peut donc obtenir une filtration de l'espace sur laquelle on peut calculer la persistance homologique. Cette filtration dépend donc de ϵ et de la dilatation. Alors, pour définir les mesures pour les groupes d'homologie d'un complexe simplicial il faut trouver un algorithme qui calcule les opérations $dil(K, \epsilon)$ et $erod(K, \epsilon)$.

Notons aussi que le calcul de la persistance homologique a une complexité (au pire des cas) cubique sur le nombre de simplexes. Il peut donc être intéressant de ne pas considérer que des simplexes, mais aussi des polyèdres. On peut aussi considérer le paramètre ϵ variable pour avoir une tétraédricisation de l'espace moins dense au fur et mesure qu'on s'éloigne du complexe simplicial.

5. Conclusion et travaux futurs

Dans ce document on a présenté les mesures pour les groupes d'homologie d'un volume. Leur définition est simple et bénéficie énormément de la structure régulière de \mathbb{Z}^3 . On a montré aussi quelques applications intéressantes de ces mesures. Ensuite, on a identifié le problème que pose l'adaptation de ces définitions dans le contexte des complexes simpliciaux ainsi que quelques soucis qui n'apparaissent pas dans le cas des volumes.

La prochaine étape prévue pour la suite de ce travail consistera à trouver un algorithme efficace pour les opérations $\text{dil}(K, \epsilon)$ et $\text{erod}(K, \epsilon)$.

Références

- [EH08] EDELSBRUNNER H., HARER J. : Persistent homology – a survey. In *Surveys on Discrete and Computational Geometry : Twenty Years Later* (Providence, Rhode Island, 2008), J. E. Goodman J. P., Pollack R., (Eds.), vol. 453, Amer. Math. Soc., Contemporary Mathematics, pp. 257–282.
- [GBMRar] GONZALEZ-LORENZO A., BAC A., MARI J., REAL P. : Two measures for the homology groups of binary volumes. In *Discrete Geometry for Computer Imagery - 19th IAPR International Conference, DGCI 2016, Nantes, France, April 18-20, 2016. Proceedings* ("to appear").
- [KMM04] KACZYNSKI T., MISCHAIKOW K., MROZEK M. : *Computational Homology*, vol. 157 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [Mun84] MUNKRES J. R. : *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [Ser92] SERGERAERT F. : Effective homology, a survey. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sergerar/Papers/Survey.pdf>, 1992. [Online ; accessed 5-March-2016].