



HAL
open science

Riconoscibilità nelle semantiche di Dag Prawitz

Antonio Piccolomini d'Aragona

► **To cite this version:**

Antonio Piccolomini d'Aragona. Riconoscibilità nelle semantiche di Dag Prawitz. Cruciani M et al. (eds) *Apprendimento, Cognizione e Tecnologia. Atti del convegno AISC Mid-term 2016*, 2016, ISBN-9788890453984., 2016. hal-01473690

HAL Id: hal-01473690

<https://hal.science/hal-01473690>

Submitted on 3 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Riconoscibilità nelle semantiche di Dag Prawitz

Antonio Piccolomini d'Aragona
CEPERC, Université d'Aix-Marseille
Dip. di Filosofia, Università "La Sapienza" di Roma
antonio.piccolomini-daragona@etu.univ-amu.fr

1 Tra *Rashomon* e *Blade Runner*

Negli ultimi anni, il *machine learning* ha compiuto progressi inimmaginabili. Prova lampante di ciò è l'ideazione, in netto anticipo rispetto ai tempi previsti, di un programma in grado di sconfiggere alcuni campioni nel complessissimo gioco del Go. Forse, un futuro alla *Blade Runner* non è poi così lontano. I teoremi di Gödel, tuttavia, sembrano porre uno scarto incolmabile tra una, seppur elevatissima, intelligenza automatica e la mente umana; si dice spesso che la rilevanza di tali teoremi risiede nella nostra comprensione, al di fuori del sistema di riferimento, del fatto che essi mostrano formule vere ma indecidibili nel sistema. La creatività, tipica del pensiero umano, sarebbe qui una specifica capacità di riconoscere assiomi evidenti per la costruzione di teorie rilevanti. In cosa consiste questa capacità? Proprio come personaggi di *Rashomon*, molte descrizioni formali della nozione di dimostrazione sembrano non riuscire a catturarla.

2 La semantica BHK

Come noto, Dummett ha proposto una teoria verificazionista del significato basata su *condizioni di asseribilità corretta* (Dummett 1993). L'idea si riallaccia alla semantica formale intuizionista di Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), con clausole fondate sulla nozione costruttiva di dimostrazione. Nel caso della costante logica \rightarrow , una dimostrazione di $\alpha \rightarrow \beta$ è intesa come una funzione effettiva π tale che, per ogni dimostrazione π_1 di α , $\pi(\pi_1)$ è una dimostrazione di β .

Le clausole BHK non sono però esenti da problemi. Il più grave sembra discendere dalla potenzialmente estrema complessità delle funzioni effettive richieste. Da un lato, un calcolo esplicito potrebbe risultarne impossibile; dall'altro, il dominio di definizione è infinito e in generale non decidibile, il che complica il processo di sostituzione delle variabili libere. Da questo punto di vista, non sembra corretto chiamare qualcosa una dimostrazione se ci è preclusa la possibilità di comprendere che essa lo sia.

3 Prawitz sulla riconoscibilità di funzioni effettive

Ispirato dai sistemi di Gentzen, e dai suoi propri teoremi di normalizzazione per tali sistemi (Prawitz 2006), Prawitz ha sviluppato una semantica formale incentrata sulla nozione di argomento valido (Prawitz 1973). La ricerca è proseguita prendendo in considerazione le proposte di Dummett, e generalizzando da argomenti validi a dimostrazioni BHK (Prawitz 1977). Il logico svedese ha avanzato la tesi secondo la quale argomenti validi e dimostrazioni BHK non possono essere semplici funzioni effettive, essendo in aggiunta necessario un *riconoscimento* del comportamento rilevante di tali funzioni.

Una prima proposta in tal senso era già venuta da Kreisel, che aveva ad esempio definito una dimostrazione di $\alpha \rightarrow \beta$ come una coppia ordinata $\langle \pi, \tau \rangle$, con π come sopra, e τ dimostrazione di $\forall x(\text{PROOF}(x, \alpha) \rightarrow \text{PROOF}(\pi(x), \beta))$. Tuttavia, una dimostrazione di $\alpha \rightarrow \beta$ è qui spiegata attraverso un'altra dimostrazione τ , presupponendo di conoscere la nozione di dimostrazione che si intende definire, e con l'eventualità di dover comprendere il comportamento di possibili funzioni effettive contenute in τ .

In alternativa, una dimostrazione di $\alpha \rightarrow \beta$ potrebbe essere vista come una coppia ordinata $\langle \pi, A(\pi) \rangle$, con π come sopra, e A algoritmo per un opportuno sistema formale S tale che, per ogni successione (s_1, \dots, s_n) di formule nel linguaggio di S , $A(s_1, \dots, s_n) = 1$ se (s_1, \dots, s_n) è una derivazione in S , altrimenti $A(s_1, \dots, s_n) = 0$. Nessuno degli algoritmi disponibili risulta però adeguato: le esigenze semantiche travalicano qualunque sistema formale dal momento che, in virtù dei teoremi di Gödel, nessuno di tali sistemi può generare tutte le funzioni effettive di cui si ha bisogno.

In anni recenti, Prawitz ha proposto una *teoria dei grounds* che mira a fornire una descrizione matematica del potere di costrizione epistemica delle inferenze valide; sotto l'ipotesi di premesse corrette, esse obbligano alla conclusione (Prawitz 2009, 2012, 2013, 2015). A tale scopo, è informalmente introdotta una nozione di *ground* come ciò di cui siamo in possesso quando ci troviamo in uno stato di giustificazione. Il carattere astratto dei grounds è controbilanciato dal coinvolgimento di atti epistemici; ciascuna costante logica \odot è infatti provvista di una funzione inferenziale primitiva G_\odot che, data una formula $\beta = \odot(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, produce un ground per β quando applicata a grounds per $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Presi in input certi oggetti il cui possesso ci consente asserire qualcosa, le funzioni primitive ne riconoscono proprietà significative consentendoci di ottenere come output oggetti il cui possesso convalida nuove asserzioni. Tali funzioni corrispondono alle inferenze di introduzione, e servono come nucleo per la semantica delle costanti coinvolte.

Per descrivere i grounds, Prawitz sviluppa un linguaggio equazionale aperto L i cui termini sono tipati su formule di un linguaggio logico del primo ordine; L conterrà funzioni non-primitive che devono essere *definite* tramite schemi di equazioni. Se la funzione f deve produrre un ground per β

quando applicata a grounds per $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, essa dovrà essere fissata in modo tale che

$$f(T_1, \dots, T_n) = G_{\odot}(U_1, \dots, U_n)$$

per ogni T_i di tipo α_i denotante un ground per α_i , con \odot costante principale di β e U_i termine di tipo α_i denotante un ground per α_i . In tal senso, f può essere associata a un'inferenza di eliminazione. In caso di buona definizione, l'inferenza è valida e produce, a partire da grounds per le premesse, un ground per la conclusione. Tuttavia, gli schemi di equazioni attraverso i quali abbiamo definito f possono essere molto complessi, e contenere errori difficilmente individuabili. Dunque, non vi è nessuna garanzia che il semplice possesso di un ground denotato da $f(T_1, \dots, T_n)$ corrisponda anche alla comprensione del fatto che $f(T_1, \dots, T_n)$ ha questa proprietà.

La situazione è analoga a quella riscontrata con le clausole BHK, ed anche in questo caso sembra che il riconoscimento richiesto debba essere esplicitamente postulato. Di nuovo, non possiamo appellarci ad una soluzione *à la* Kreisel, né ad algoritmi di sorta; grounds e linguaggi chiusi per grounds non sono altro, infatti, che codifiche di, rispettivamente, dimostrazioni e sistemi formali.

4 Parametri di riconoscibilità

Il problema di cui ci stiamo occupando è, molto in generale: data una funzione effettiva f con dominio D_1 , è possibile riconoscere se, per ogni $k \in D_1$, $f(k) \in D_2$ per un certo D_2 ? E se sì, in che senso? Sembra necessario individuare dei parametri per dare all'espressione "riconoscere" un contenuto più preciso. Si potrebbe sostenere che il riconoscimento può avere almeno due diversi gradi di forza e due diversi gradi di generalità.

Quanto al grado di forza, esso può essere *conclusivo* o *fallibile*. Quanto al grado di generalità, invece, potremmo parlare di: *riconoscimento specifico*, inteso come abilità eterogenea di stabilire caso per caso se una certa funzione effettiva produce uno specifico risultato, e ciò attraverso un ragionamento che potrebbe funzionare in certi casi ma non in altri; *riconoscimento generico*, una procedura generale applicabile a funzioni effettive arbitrarie, che ci consenta di riconoscere omogeneamente se ciascuna di esse produce certi valori per dati argomenti.

Una semantica costruttiva è ovviamente interessata ad un tipo conclusivo di riconoscimento, ma non è chiaro quale sia la scelta da fare nel caso del grado di generalità. Tale scelta, tutt'altro che neutrale, suggerisce tra l'altro modelli molto diversi delle capacità epistemiche.

- (S) Per ogni funzione effettiva f con dominio D_1 , esiste un ragionamento attraverso il quale è possibile riconoscere se, per ogni $k \in D_1$, $f(k) \in D_2$ per un certo D_2 .

- (G) Esiste una procedura generale attraverso la quale, per ogni funzione effettiva f con dominio D_1 , è possibile riconoscere se, per ogni $k \in D_1$, $f(k) \in D_2$ per un certo D_2 .

Ovviamente, (S) e (G) hanno conseguenze divergenti. In particolare, (S) sembra plausibile: una funzione effettiva è, dopotutto, un oggetto epistemico, e gli oggetti epistemici hanno proprietà sempre in linea di principio riconoscibili. Al contrario, (G) solleva forti dubbi: quale dovrebbe essere la procedura generale che esso chiama in causa? La logica matematica contemporanea non offre nulla di simile.

Anche stante la plausibilità di (S), comunque, è tutt'altro che evidente come tale tesi possa essere ulteriormente specificata. In particolare, cosa sono i ragionamenti in essa coinvolti? Sembra trattarsi di qualcosa di totalmente diverso dal tipo di atti epistemici descritti nelle semantiche costruttive. A titolo di esempio, detta L_Q un'estensione del linguaggio dei grounds L di Prawitz ottenuta autorizzando quantificazione su variabili per grounds, è possibile formalizzare in L_Q meta-enunciati come "l'operazione f produce un ground di tipo β quando applicata a grounds di tipo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ "; si può poi costruire un linguaggio di grounds L^2 per L_Q , e descrivere in esso funzioni che generano grounds per meta-enunciati. Si vede allora facilmente che equiparare i ragionamenti di (S) a funzioni in L^2 potrebbe generare un regresso analogo a quello di Kreisel.

Bibliografia

M. Dummett (1993), *The seas of language*, Oxford University Press, Oxford.

D. Prawitz (1973), *Towards a foundation of a general proof theory*, in *Logic, methodology and philosophy of science*, pp. 225 - 250, North-Holland Publishing, Amsterdam.

— (1977), *Meaning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic*, in *Theoria* 43, pp. 2 - 40.

— (2006), *Natural deduction. A proof theoretical study*, Dover Publications, New York.

— (2009), *Inference and knowledge*, in M. Pelis, *The Logica Yearbook 2008*, pp. 175 - 192, College Publications, London.

— (2012), *The epistemic significance of valid inference*, in *Synthese* 187(3), pp. 887 - 898.

— (2013), *Validity of inferences*, in M. Frauchiger, *Reference, rationality, and phenomenology: themes from Føllesdal*, pp. 179 - 204, Ontos Verlag, Dordrecht.

— (2015), *Explaining deductive inference*, in H. Wansing, *Dag Prawitz on proofs and meaning*, pp. 65 - 100, Springer, Heidelberg.