



**HAL**  
open science

# Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques

Joel Frelat

► **To cite this version:**

Joel Frelat. Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques. Mottin, Stéphane and Lelièvre, Gérard. Matériaux et joints d'étanchéité pour les hautes pressions, 18, MRCT-CNRS, pp.51-61, 2011, Intégrations des savoirs et des savoir-faire, 978-2-918701-04-0. 10.5281/zenodo.376087 . hal-01472124

**HAL Id: hal-01472124**

**<https://hal.science/hal-01472124v1>**

Submitted on 24 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Cliquer sur le sommaire pour parcourir plus vite ce document.

<b><u>Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques</u></b> .....	55
<u>1 – Introduction</u> .....	55
<u>2 – Rappel de la formulation théorique</u> .....	56
<u>3 – Formulation variationnelle</u> .....	57
<u>4 – Formulation numérique</u> .....	58
<u>5 – Etapes d'une mise en oeuvre pratique</u> .....	59
<u>5 – 1. Définition de la géométrie et construction du maillage</u> .....	60
<u>5 – 2. Introduction des données des matériaux</u> .....	61
<u>5 – 3. Construction de la matrice de rigidité globale</u> .....	61
<u>5 – 4. Conditions aux limites en déplacement imposé</u> .....	61
<u>5 – 5. Chargements</u> .....	61
<u>5 – 6. Résolution : calcul du champ des déplacements</u> .....	62
<u>5 – 7. Calcul du champ des contraintes</u> .....	62
<u>6 – Conclusion — extension aux problèmes non linéaires</u> .....	62
<u>7 – Bibliographie</u> .....	63

Liens : <https://doi.org/10.5281/zenodo.376087>

<http://www.sudoc.fr/155436619>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01472124>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/INTEGRATIONS/page/materiaux-et-joints-etancheite-pour-les-hautes-pressions>

<https://zenodo.org/communities/integrations>

### Référence au format BibTeX :

```
@inbook{5materiaux18_2011,
location = {Meudon},
edition = {{3e éd.}},
title = {Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques},
isbn = {978-2-918701-04-0},
url = {http://www.sudoc.fr/155436619},
series = {Intégrations [des savoirs et des savoir-faire]},
abstract = {Préface / Dominique Leguillon P. 17. Introduction générale / Patrick Boissinot, Patrick Langlois, Agílio A.H. Pádua P. 21. Introduction au dimensionnement / Agílio A.H. Pádua 1 — Définition du problème 2 — Dimensionnement 3 — Obturateurs 4 — Conclusion P. 31. Fretage et autofretage / Patrick Langlois 1 — Considérations préliminaires au fretage 2 — Fretage d'une enceinte bloc 3 — Fretage d'une enceinte multibloc 4 — Formulation de l'autofretage 5 — Modes de réalisation de l'autofretage 6 — Conclusion P. 55. Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques / Joël Frelat 1 — Introduction 2 — Rappel de la formule théorique 3 — Formulation variationnelle 4 — Formulation numérique 5 — Etapes d'une mise en œuvre pratique 6 — Conclusion — Extension aux problèmes non linéaires P. 65. Les matériaux sidérurgiques et les hautes pressions / Jean-Paul Dichtel 1 — Caractérisation mécanique des aciers 2 — Métallurgie des aciers et superalliages 3 — Commentaires : la Directive Européenne Appareils à Pression P. 77. Les métaux non ferreux – Alliage cuivre-béryllium et titane / Jean-Pierre Petitot 1 — Introduction 2 — Le cuivre-béryllium 3 — Le titane P. 85. Les Carbures cémentés (WC)-Co / Emmanuel Pauty 1 — Les procédés de fabrication 2 — Les propriétés des carbures cémentés 3 — Conclusions P. 99. Choix et usinage des carbures de tungstène / Jacques Calzas 1 — Choix des carbures de tungstène 2 — Usinage du carbure de tungstène P. 111. Céramiques et matériaux pour l'optique / Jean-Claude Chervin 1 — Céramiques 2 — Matériaux pour l'optique P. 141. Types de joints et de montage / Roger Argoud et Jacques Roux 1 — Introduction 2 — Généralités 3 — Joints à basse pression 4 — Joints cône sur cône 5 — Joints Bridgman Champignon 6 — Joints annulaires auto-serrés 7 — Joints coniques d'Amagat 8 — Autres joints 9 — Conclusion P. 161. Joints hautes pressions pour la compression de gros volumes solides / Sylvie Le Floch 1 — Joints solides utilisés dans les différents types d'enceintes hautes pressions 2 — Matières premières des joints 3 — Assemblages (HP)-(HT) P. 173. Le matériel standard / Jean-Pierre Petitot 1 — Tubes, conduites et raccords 2 — Les vannes 3 — Quelques types d'enceintes commercialisées 4 — Les générateurs de pression 5 — Le matériel moins standard P. 187. Assemblages haute pression / Gérard Hamel 1 — Montage des raccords de pressions 2 — Montage de quelques passages électriques 3 — Les passages de thermocouple 4 — Les passages optiques, montage des fenêtres 5 — Montage des joints et des obturateurs sur une cellule haute pression P. 197. Usinage / Jean-Pierre Michel 1 — Introduction 2 — Les joints de faible épaisseur 3 — Les bagues anti-extrusion à 45° 4 — Les joints à 45° 5 — Les joints « double Bridgman » 6 — Les joints plats en élastomères 7 — Les joints en indium (étanchéité en hélium et azote liquide 8 — Joints métal-métal type Lens ring 9 — Les passages du courant 10 — Usinage de matériaux exotiques P. 211. Les règles de sécurité / Patrick Boissinot 1 — Dangers présentés par les appareils à pression 2 — Appareils à pression rencontrés dans les laboratoires et facteurs de risques 3 — Principes généraux de prévention et réglementation 4 — Moyens de protection 5 — Conclusion},
pages = {51–61},
number = {18},
booktitle = {Matériaux et joints d'étanchéité pour les hautes pressions},
publisher = {{MRCT}-{CNRS}},
author = {Frelat, Joël},
bookauthor = {Boissinot, Patrick and Langlois, Patrick and Pádua, Agílio},
editor = {Mottin, Stéphane and Lelièvre, Gérard},
editorb = {Mottin, Stéphane},
editorbtype = {redactor},
date = {2011},
langid = {french},
keywords = {Hautes pressions -- Matériaux, Joints d'étanchéité, Matériaux -- Effets des hautes pressions}, doi = {10.5281/zenodo.376087},
}
```

# Méthodes d'éléments finis en calcul de structures élastiques

*Joël Frelat*

Laboratoire Modélisation en Mécanique  
Université Pierre et Marie Curie,  
4 place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05

## 1 – Introduction

Utilisée depuis plus de quarante ans par les ingénieurs travaillant dans le domaine du calcul des structures, la méthode des éléments finis a démontré son efficacité dans le domaine du calcul linéaire, que ce soit en thermique ou en élasticité. Il ne s'agit pas ici de répéter une forme de cours sur les fondements théoriques de cette méthode tant en thermique qu'en élasticité, mais de donner au lecteur non familier avec son utilisation quelques éléments de base couramment rencontrés dans l'utilisation des programmes ou codes disponibles. Les éléments théoriques pourront être trouvés dans de nombreux ouvrages et conférences. Une présentation suffisamment détaillée a été donnée par D. Leguillon lors du 1er forum de la technologie des hautes pressions de La Londe les Maures (20 au 23 mai 1997), donnant une liste de références rappelées ici.

Longtemps réservée à un nombre limité d'ingénieurs et de chercheurs, cette méthode s'est ensuite adressée à de plus en plus d'ingénieurs lorsque les études sont limitées à des problèmes linéaires. Cette évolution s'est faite par l'apparition de nombreux codes de calcul à la fois bien validés par des cas test représentatifs, et surtout présentant une interface homme-machine de plus en plus conviviale, gommant du même coup beaucoup des difficultés inhérentes au calcul par ordinateur. Enfin, l'augmentation phénoménale de la puissance de calcul des ordinateurs personnels fait qu'il n'est désormais plus utile de disposer (pour les calculs linéaires au moins) d'un ordinateur cher et coûteux. Ainsi, et sans qu'il s'agisse d'une liste exhaustive, on peut citer comme codes généralistes disponibles: ABAQUS, ANSYS, *Code\_Aster*, Castem 2000, ELFINI, Modulef, NASTRAN, SAMCEF, SYSTUS, etc.

Tous ne sont pas disponibles sur plate-forme micro-informatique, de par leur origine ancienne (NASTRAN), ou leur complexité, ou encore leur origine "propriétaire". Cependant, beaucoup sont disponibles sur PC (depuis ANSYS parmi les plus anciens, jusqu'à Castem 2000 pour ceux d'origine française).

La contrepartie de cette évolution est que l'utilisateur dispose toujours de résultats et que sa vigilance, autrefois toujours sollicitée, doit être appliquée à l'interprétation de ces résultats.

Notre propos ici se limite à donner quelques indications de base à un utilisateur non familier avec cette technique. Il sera donc très simplifié. Son but n'est que de donner les informations minimales pour débiter dans l'utilisation de logiciels de calcul des structures par éléments finis.

Nous décrivons ici les étapes successives classiques dans l'utilisation d'un code. Nous nous attacherons à donner, étape par étape, quelques indications pour un contrôle minimal des résultats.

## 2 – Rappel de la formulation théorique

Nous nous limitons aux problèmes d'élasticité linéaire, à la fois par souci de simplicité, mais aussi car la majorité des études concernant le dimensionnement des enceintes haute pression relève de ce cadre. Nous reviendrons en conclusion sur les problèmes non-linéaires qui peuvent être rencontrés dans ce dimensionnement. Par ailleurs, même s'il est nécessaire de prendre en compte les effets de la température, ceci ne représente pas une difficulté. Toujours pour garder la simplicité du propos, nous nous limiterons au cas de matériaux élastiques isotropes, la structure globale pouvant être inhomogène. De plus nous restons, pour respecter le caractère linéaire du problème, dans le cadre des petites perturbations, les déplacements et les déformations restant petites. Enfin, nous ne considérons pas ici le cas d'éléments dits "de structure", poutres, plaques et coques, les enceintes hautes pressions ne relevant généralement pas de ces modélisations.

Nous considérons donc une structure occupant un domaine  $V$  de l'espace  $\mathbf{R}^3$ .

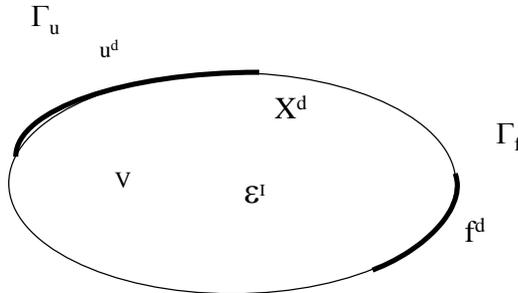


Figure 1 – Domaine mathématique.  $V$  est le volume occupé par la structure,  $\Gamma_u$  est la partie du bord sur laquelle sont imposés les déplacements  $u^d$ ,  $\Gamma_f$  est la partie du bord sur laquelle sont imposés les forces de surface  $f^d$ ,  $X^d$  sont les forces de volume imposées et  $\epsilon^l$  sont les déformations initiales.

Sur une partie de la frontière, notée  $\Gamma_u$ , les déplacements sont imposés :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \Gamma_u \quad (1)$$

sur la partie complémentaire de la frontière, notée  $\Gamma_f$ , les efforts sont imposés :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \Gamma_f \quad (2)$$

et dans le volume  $V$ , on impose des forces de volumes,  $X^d$ , et des déformations initiales pouvant être d'origine thermique, ou incompatibles (induisant des contraintes résiduelles)  $\epsilon_i$ . Le système d'équations aux dérivées partielles s'écrit alors:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{t} \nabla \mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{t} \nabla \mathbf{u}) \end{aligned}$$

équations qui donnent l'expression linéarisée du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en fonction du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ ,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i^d \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{X}^d = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i^d = 0$$

équations qui donnent l'expression de l'équilibre du tenseur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  avec les forces de volume,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \quad (5)$$

équations qui expriment les conditions aux limites en déplacement (Dirichlet),

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_f \quad (6)$$

équations qui expriment les conditions aux limites en effort (Neumann).

Pour que ce système soit complet et puisse être résolu, il est nécessaire de formuler des relations entre les déformations et les contraintes, ce qui constitue la loi de comportement, ici élastique linéaire:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

où  $\mathbf{L}$  représente le tenseur de l'élasticité linéaire, dépendant éventuellement du point de l'espace.

Cet ensemble d'équations constitue la formulation locale classique d'un problème d'élasticité linéaire.

### 3 – Formulation variationnelle

Pour appliquer la méthode des éléments finis, il est nécessaire d'utiliser la formulation énergétique d'un tel problème (formulation variationnelle) qui s'exprime sous la forme suivante:

Parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\mathbf{w}$ , c'est-à-dire respectant les conditions aux limites en déplacement, le champ solution  $\mathbf{v}$  est celui qui minimise l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle s'exprime comme la différence entre l'énergie de déformation élastique et le travail des forces extérieures.

$$J = J_{el} - J_{ext} \quad (8)$$

avec :

$$J_{el} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} \, dv ; \quad J_{ext} = \int_V \mathbf{X}^d \mathbf{w} \, dv + \int_\Gamma \mathbf{F}^d \mathbf{w} \, ds \quad (9)$$

Nous arrêtons ici ce très bref rappel des bases théoriques qui peuvent être utilement retrouvées dans les références.

## 4 – Formulation numérique

Pour trouver le minimum de cette énergie potentielle, ce qui ne peut être fait dans le cas général de manière analytique, le champ des déplacements  $u$  est approché dans un espace d'éléments finis. Cette approximation conduit aux propriétés essentielles suivantes :

- Le champ approché  $\hat{u}$  est une fonction de ses valeurs aux points du maillage (les noeuds), en particulier, sur chaque élément fini, le champ approché  $\hat{u}^e$  s'exprime sous la forme :

$$\hat{u}^e = \sum \Psi_i u_i \tag{10}$$

$$\hat{u}^e = \sum_{i=1}^n \Psi_i u_i$$

avec  $i$  : noeuds de l'élément,  $u_i$  déplacement en chaque noeud de l'élément (avec convention de sommation des indices muets).

- Le champ des déformations s'exprime sur chaque élément, en fonction des inconnues nodales :

$$\epsilon^e = \mathbf{B} \hat{u}^e \tag{11}$$

$$\epsilon^e = \mathbf{B} \sum_{i=1}^n \Psi_i u_i$$

où la matrice  $\mathbf{B}$  ne dépend que de la géométrie de l'élément (matrice gradient).

- Il est alors possible d'exprimer les intégrales de l'énergie potentielle approchée élément par élément.

Ainsi, l'expression de la fonction densité dépendant des déplacements aux noeuds devient alors sur l'élément

$$\int_{\text{élément}} \mathbf{L} \epsilon^e(\mathbf{v}) \epsilon^e(\mathbf{w}) dv \tag{12}$$

devient:

$$\int_{\text{élément}} \hat{u}^e \mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{B} \hat{u}^e dv = \hat{u}^e \mathbf{K}^e \hat{u}^e \tag{13}$$

dans laquelle  $\mathbf{K}^e$  est la « matrice de rigidité de l'élément » ou « matrice de rigidité élémentaire »; c'est le seul terme quadratique.

Les autres expressions, si elles sont non nulles sur l'élément prennent la forme :

- pour les déformations initiales

$$\hat{u}^e \mathbf{F}_\epsilon^e \tag{14}$$

- pour les forces de volume

$$\hat{u}^e \mathbf{F}_X^e \tag{15}$$

- pour les forces de surface

$$\hat{u}^e \mathbf{F}_S^e \tag{16}$$

On somme alors la contribution de chaque élément fini, pour obtenir (par la table de correspondance locale-globale) la matrice de rigidité globale, somme (intelligente) de toutes les matrices de rigidité élémentaires, ainsi que le vecteur second membre global contenant les contributions des déformations initiales, des forces de volume et des forces de surface, car l'expression approchée de l'énergie potentielle peut s'écrire, avec  $\hat{\mathbf{U}}$  désignant le vecteur contenant tous les déplacements nodaux (y compris sur partie de la frontière où les conditions aux limites en déplacement doivent être satisfaites) :

$$J^* = (1/2) \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}^G \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_s) \quad (17)$$

en conservant sous la forme appropriée (bande, « sparse » ...) la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}^G$  qui est définie positive symétrique et le vecteur second membre.

Suivant le logiciel, diverses méthodes sont ensuite utilisées pour prendre en compte les conditions aux limites de type Dirichlet (élimination des lignes-colonnes correspondantes aux valeurs imposées, multiplicateurs de Lagrange).

L'expression approchée de l'énergie potentielle devient alors :

$$(1/2) \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}^G \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_G \quad (18)$$

où  $\mathbf{R}_G$  contient les déplacements imposés.

La minimisation devient alors une dérivation par rapport au vecteur  $\hat{\mathbf{U}}$ , et donc à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{R}_G \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_G \quad (19)$$

Ainsi les déplacements aux noeuds du maillage sont obtenus. On peut ensuite calculer les déformations élément par élément :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}^e \quad (20)$$

ainsi que le tenseur des contraintes lui aussi élément par élément :

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{L}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{L}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}^e$$

et tout critère associé, en particulier de plasticité. Il va de soi que si le champ approché des déplacements est connu aux noeuds du maillage, alors le champ des contraintes l'est élément par élément. A titre d'exemple, si les éléments finis sont P1, c'est-à-dire si le champ des déplacements est approché par des fonctions affines par morceaux, alors le champ des contraintes est constant par élément. Ainsi, ni les composantes, ni le vecteur contrainte ne sont continus à la traversée entre deux éléments adjacents. A la frontière du domaine, s'il n'y a pas d'effort extérieur, le vecteur contrainte n'est pas exactement nul.

## 5 – Etapes d'une mise en oeuvre pratique

Très succinctement, la mise en oeuvre à partir d'un logiciel, même s'il peut exister quelques différences d'un logiciel à l'autre, comporte systématiquement les étapes suivantes:

- description de la géométrie,
- décomposition en éléments de la géométrie,
- choix des éléments finis,

- introduction des propriétés des matériaux,
- construction de la matrice de rigidité
- introduction des conditions aux limites en déplacement (de type Dirichlet)
- prise en compte des forces de volume et des déformations initiales
- prise en compte des forces de surface (conditions de type Neumann)
- résolution du système linéaire: calcul du champ approché des déplacements
- calcul du champ approché des contraintes et des critères dimensionnants (plasticité et/ou fatigue).

A géométrie et conditions aux limites fixées constituées des étapes 1 à 6, il est possible de répéter les étapes 7 à 10 avec plusieurs cas de chargement en effort et/ou déformations initiales. Dans la pratique, il est bien évident que cette suite doit être présente à l'esprit à toutes les étapes. Par exemple, l'existence de plusieurs matériaux va impliquer une construction géométrique adaptée. Nous donnons ci-dessous des indications complémentaires concernant ces étapes successives.

## 5 – 1. Définition de la géométrie et construction du maillage

Il s'agit de la partie qui nécessite à la fois le plus de temps, ainsi que le plus d'attention. En effet, bien que de nouveaux outils (tels le contrôle des calculs et le maillage adaptatif) soient en voie d'être disponibles de manière systématique, cette étape demande une réflexion initiale, permettant de cerner les difficultés majeures (zone de concentration de contraintes par exemple) et d'estimer un « bon » maillage *a priori*.

Bien qu'il existe un certain nombre de logiciels soit comportant une petite CAO, soit interfacés avec des logiciels de CAO, considérons ici le cas suffisant où cette partie est directement réalisée par ce qui est appelé le « mailleur ».

Classiquement les étapes sont les suivantes :

- entrée des points caractéristiques de la géométrie, définissant le contour, les interfaces, etc,
- les lignes sont alors définies, par des courbes géométriques éventuellement paramétrables,
- le « maillage » bidimensionnel peut alors être fait sur les parties géométriques limitées par les lignes,
- enfin, les volumes sont découpés en éléments.

Lors de ces étapes, suivant les logiciels, on peut être amené à définir la répartition des futurs noeuds du maillage, en particulier sur les lignes.

De même, il peut être nécessaire de définir le type d'approximation qui sera retenu dans le calcul. Ainsi, peuvent être créés des éléments (dans le cas d'une modélisation classique) de type segment à deux ou trois noeuds, triangles à trois ou six noeuds, brique à huit ou vingt noeuds, etc.

Lors de ces constructions, il faut préparer les futures entrées de données, en « repérant » les parties géométriques suivant les chargements. De plus en plus souvent, avec l'évolution des logiciels vers les notions d'objets nommés, ceci consiste à affecter à des parties du maillage, soit des références, soit des noms d'objets informatiques.

## 5 – 2. Introduction des données des matériaux

Il est alors nécessaire de construire un champ, *défini en principe par élément*, fournissant les caractéristiques élastiques des matériaux : module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique dans le cas isotrope.

## 5 – 3. Construction de la matrice de rigidité globale

A ce stade de l'entrée des données, les matrices de rigidité élémentaires peuvent être calculées. L'assemblage de ces matrices est alors fait de manière à minimiser l'espace mémoire nécessaire au stockage de la matrice de rigidité globale, puisque celle-ci est définie positive symétrique et comporte un grand nombre de termes nuls. Diverses techniques peuvent être utilisées, la plus simple est d'utiliser la forme « bande » de la matrice, les logiciels ordonnant les noeuds de manière à minimiser la « largeur » de cette bande. (Bien sûr, les méthodes de résolution du système linéaire final doivent être adaptées et imposent la technique de stockage).

Il peut être utile de conserver cette matrice en vue de la résolution de plusieurs problèmes aux limites sur cette géométrie fixe. Il faut noter que la plupart des logiciels rendent cette étape totalement « transparente ».

Nota : Certains logiciels, lorsque le nombre de noeuds et de degrés de liberté est très grand utilisent une technique couplant cette étape et les suivantes jusqu'à la résolution de manière à ne conserver en mémoire qu'une quantité suffisamment petite de quantités numériques ; cependant, les capacités des ordinateurs sont désormais telles, et les nécessaires extensions aux problèmes non-linéaires font que ces techniques sont de plus en plus abandonnées dans les nouveaux logiciels.

## 5 – 4. Conditions aux limites en déplacement imposé

Pour satisfaire les conditions aux limites en déplacement, la technique des multiplicateurs de Lagrange est parmi les plus efficaces. Cette technique (dualisation) consiste numériquement à construire des matrices de rigidité supplémentaires qui lient données en déplacement et forces de réaction associées. Elle permet de calculer aisément ces dernières.

Bien sûr, l'étape de discrétisation géométrique a largement préparé la prise en compte des conditions en déplacements imposés, seules les valeurs de ces déplacements sont en général à entrer à ce stade.

## 5 – 5. Chargements

Quels que soient les chargements en forces de volume, de surface, ou en déformation initiale, ils se traduisent par la construction du « second membre ». Par l'utilisation de l'intégration par « points de Gauss » cette construction se fait élément par élément ou côté d'élément par côté d'élément. Encore une fois c'est à l'étape de discrétisation géométrique que la préparation principale a été faite, seules les valeurs numériques des efforts en à entrer.

Une nuance à ce propos doit être apportée pour les déformations initiales : par exemple, s'il s'agit de déformations d'origine thermique, le champ de température, défini aux noeuds du maillage, peut provenir d'un calcul thermique antérieur.

## 5 – 6. Résolution : calcul du champ des déplacements

Les constructions de la matrice de rigidité globale, de celles correspondant aux déplacements imposés, du vecteur second membre étant faites, le calcul de la solution en déplacement peut être effectué.

Les déplacements obtenus sont les déplacements aux noeuds du maillage, et suivent l'interpolation adoptée dans les éléments finis. Ainsi, si cette interpolation est linéaire (cas minimal), il est tout à fait régulier de « lisser » ces déplacements sur l'ensemble de la structure. Une visualisation graphique (déformée, isovaleurs de déplacement) a donc une signification numérique et physique. Ainsi, si des conditions de déplacements maximum doivent être respectées, il est possible d'utiliser directement les résultats.

Pour garantir la validité du maillage, la méthode (archaïque) consiste à refaire de nouveaux calculs utilisant des maillages plus fins.

L'observation de la variation des déplacements en certains points significatifs et de la convergence de ces déplacements doit être absolument faite avant toute exploitation complémentaire.

Nota : Ce contrôle sera dans un proche avenir directement fait par les logiciels, basé sur tous les développements de contrôle de solution largement développés depuis dix ans par les chercheurs.

## 5 – 7. Calcul du champ des contraintes

Le calcul des contraintes est fait élément par élément, éventuellement en certains points particuliers de chaque élément (par exemple lorsque le degré de l'approximation élément fini est plus grand que 1). Il est aussi possible de calculer tout critère basé sur le tenseur des contraintes (en plasticité par exemple, Von Mises et/ou Tresca).

Ceci implique que l'utilisateur fasse preuve de vigilance dans l'analyse des résultats obtenus. En particulier, si cet utilisateur souhaite visualiser un champ de contrainte approché, le logiciel effectuera un « transport aux nœuds », qui n'est pas le même d'un logiciel à un autre (moyenne sur les éléments adjacents, utilisation des fonctions de forme des éléments finis). L'analyse des résultats devra donc être faite en ayant à l'esprit cette transformation graphique, et ne pas « lire » ses graphiques sans discernement.

## 6 – Conclusion — extension aux problèmes non linéaires

Cette brève présentation de l'utilisation pratique de logiciels de calcul des structures élastiques ne se veut pas exhaustive. Cependant, elle cherche à éclairer un futur utilisateur lors de ses « premiers pas ».

Depuis longtemps utilisée cette technique numérique ne s'applique pas seulement aux problèmes linéaires. Dans le domaine de la plasticité classique (comportement non linéaire) les développements faits depuis presque trente ans ont conduit à des algorithmes itératifs fiables.

Dans le domaine du contact unilatéral, les algorithmes utilisés dans les logiciels sont en général fiables en bi-dimensionnel et lorsqu'il n'y a pas de frottement, conditions suffisantes dans le calcul « hautes pressions ».

Nous avons oublié volontairement tous les développements en dynamique (modes propres, évolution...), en flambage linéaire ou non linéaire, et en grands déplacements — grandes déformations.

## 7 – Bibliographie

Ces références sont volontairement limitées à quelques ouvrages de base :

- J.L. Batoz, G. Dhatt (1990) Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 1, 2 et 3, Hermès.
- P.G. Ciarlet (1978) The finite element method for elliptic problems, North-Holland.
- O.C. Zenkiewicz (1971) The finite element method in engineering science, MacGraw-Hill.
- O.C. Zenkiewicz, R.L. Taylor (1991) The finite element method, 4<sup>th</sup> ed., Vol 1 Basic formulation and linear problems, Vol 2 Solid and fluid mechanics dynamics and no-linearity, MacGraw-Hill.

Pour une présentation détaillée mais courte de la méthode :

- D. Leguillon (1997) Modélisation des contraintes, Recueil du 1<sup>er</sup> forum de la technologie des hautes pressions, CNRS-IPGP.