



HAL
open science

Uso do método de superfície de resposta para estimar um modelo estocástico de uma viga não linear com rigidez cúbica

Rafael de Oliveira Teloli, Luis Gustavo Giacom Villani, Samuel da Silva, Americo Cunha Jr

► To cite this version:

Rafael de Oliveira Teloli, Luis Gustavo Giacom Villani, Samuel da Silva, Americo Cunha Jr. Uso do método de superfície de resposta para estimar um modelo estocástico de uma viga não linear com rigidez cúbica. IX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2016), Aug 2016, Fortaleza, Brazil. hal-01471297

HAL Id: hal-01471297

<https://hal.science/hal-01471297>

Submitted on 19 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA



21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

Uso do Método de Superfície de Resposta para Estimar um Modelo Estocástico de uma Viga Não Linear com Rigidez Cúbica

Rafael de Oliveira Teloli, teloli.r@gmail.com¹

Luis Gustavo G. Villani, luisgustavovillani@gmail.com¹

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br¹

Americo Cunha Jr., americo@ime.uerj.br²

¹ UNESP, Univ Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Brasil Sul, 56, Ilha Solteira/SP, Brasil

² Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Rua São Francisco Xavier, 524, Maracanã, Rio de Janeiro/RJ, Brasil

Resumo: A meta deste trabalho é identificar funções densidade de probabilidade associadas aos parâmetros que descrevem o comportamento vibratório em regime linear e não linear de uma viga assumindo as incertezas existentes. O método é testado em uma viga de alumínio com condição de contorno engastada-livre com forte mecanismo de não linearidade polinomial associado a endurecimento da rigidez. Este comportamento não linear é acionado através da interação magnética entre uma massa de ferro conectada na ponta livre da viga e ímãs presos na extremidade livre da estrutura. O processo de identificação utilizado é híbrido e não paramétrico. Com baixos níveis de amplitude da força de excitação, a força elástica de restauração é nula. Nestas condições de operação, técnicas de análise modal são utilizadas para extrair parâmetros modais. Já para elevados níveis de excitação a força de restauração deve incluir termos não lineares. Assim, a identificação do coeficiente não linear será feita pelo método de superfície de resposta. Os testes experimentais foram realizados diversas vezes considerando diferentes dias e condições para considerar incertezas nos dados adquiridos e com os parâmetros identificados para cada realização. Assim, se estimam funções densidades de probabilidade de cada parâmetro identificado com cada método. Um modelo estocástico do sistema é obtido e validado com as repostas experimentais previstas para verificação da confiabilidade do modelo frente a diferentes regimes de vibração.

Palavras-chave: Vibração Não Linear, Quantificação de Incertezas, Método de Superfície de Resposta.

1. INTRODUÇÃO

A validação de modelos matemáticos para descrição do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos depende da identificação de seus parâmetros com base em dados experimentais (Peeters *et al.*, 2011). Neste contexto, destaca-se a análise modal, que é o processo de descrição de uma estrutura em função de seus parâmetros modais, que são as frequências naturais, as razões de amortecimento e os modos de vibrar (Ewins, 1986; Fu and He, 2001). A partir do conhecimento dos parâmetros modais, já é bem conhecido que pode-se prever de maneira confiável o comportamento do sistema mecânico para qualquer sinal de entrada (Avitabile, 2001).

Na totalidade das aplicações experimentais de análise modal a condição de linearidade é assumida. Contudo, a maioria das estruturas de engenharia apresentam fenômenos não lineares (Tomlinson, 2001), como por exemplo a ocorrência de saltos, múltiplas harmônicas e caos (Virgin, 2000; Kerschen *et al.*, 2006; Kovacic and Brennan, 2011). Assim, há uma crescente importância no desenvolvimento de processos em identificação de sistemas mecânicos que possuem em seu ciclo de funcionamento um regime de operação não linear (Scussel *et al.*, 2013; Silva, 2005; Shiki *et al.*, 2014a; Shiki *et al.*, 2014b). Dentre estes métodos de identificação, um bem simples, mas muito interessante e prático foi desenvolvido por Masri and Caughey (1979), conhecido como método de superfície de resposta. Este método possui como objetivo determinar uma aproximação para a força de restauração, que pode representar o comportamento da rigidez não linear de um sistema mecânico em função do deslocamento e da velocidade, com possibilidade de aplicação em sistemas com um único ou múltiplos graus de liberdade (Kerschen *et al.*, 2001; Worden, 1990a).

Infelizmente, a identificação de parâmetros físicos envolve muitas incertezas devido a imperfeições no instrumento de medição ou a dificuldade no processo de aquisição de dados (Oden *et al.*, 2010), além de incertezas na

própria forma estrutural que se assume para a função força de restauração (Cunha and Sampaio, 2014). Existem dois tipos de incertezas em modelos matemáticos de sistemas dinâmicos reais, as incertezas paramétricas e não paramétricas (Soize, 2005). Um dos objetivos da quantificação de incertezas é prever possíveis variações nas respostas do modelo, criando intervalos de confiança e comparando as respostas experimentais com as analíticas (Iaccarino, 2009). Assim, para proposição de modelos confiáveis é indispensável a análise e quantificação da presença e propagação das incertezas, ou seja, deve-se identificar as distribuições de probabilidade dos parâmetros, o que conduz a modelos estocásticos e não apenas determinísticos como a maioria dos métodos comuns de identificação.

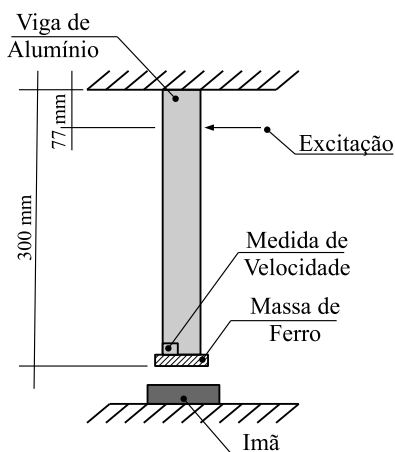
Neste trabalho, apresenta-se um processo de identificação híbrido de parâmetros com base em dados experimentais de uma viga com comportamento não linear, e que pode ser aproximada por um oscilador de Duffing. Para baixos níveis de amplitude de excitação a força de restauração é nula e o sistema apresenta regime de movimento linear. Nestas condições, os parâmetros modais são extraídos de forma estocástica e suas funções densidade de probabilidade são estimadas de maneira não paramétrica. Já para elevados níveis de amplitude de excitação a força de restauração inclui termos não lineares. Neste caso, a identificação de um coeficiente não linear é feita pelo método de superfície de restauração. Com a estimativa das funções densidade de probabilidade de cada parâmetro, um modelo estocástico é obtido com limites de confiança estabelecidos para as respostas do sistema e validado a partir de dados experimentais. Por fim, as vantagens e desvantagens da metodologia proposta são avaliadas nas conclusões deste trabalho.

2. DESCRIÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL

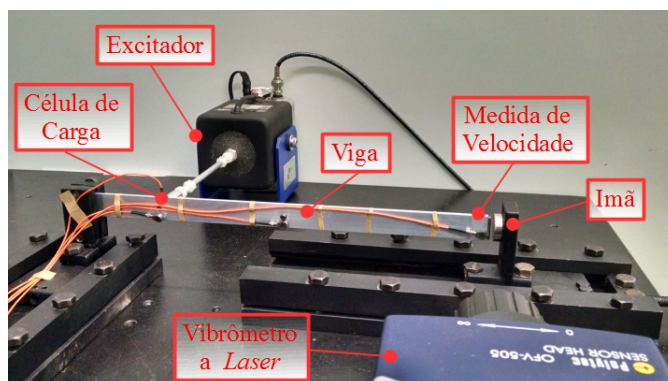
A bancada experimental utilizada consiste em uma viga com condição de contorno engastada-livre de alumínio e com dimensões $300 \times 18 \times 3$ [mm], como visto na Fig. 1. Na extremidade livre da viga foi conectado uma massa de ferro responsável por causar a interação magnética entre a viga de alumínio e o ímã. O excitador foi conectado a 77 mm da extremidade engastada da viga e foi utilizado para excitar a estrutura considerando dois diferentes níveis de amplitude de tensão elétrica, 0.05 V (baixo nível) e 0.15 V (alto nível). A força aplicada foi monitorada com uma célula de carga. A resposta da estrutura foi medida por um vibrômetro a laser posicionado próximo à extremidade livre da viga. Todos os sinais foram medidos com taxa de amostragem de 1024 Hz e 4096 amostras. Os equipamentos, sensores e atuadores usados para os testes experimentais foram:

- Excitador *Modal Shop*[®] 2400E;
- Vibrômetro a laser *Polytec*[®] OFV-525/-5000-S;
- Célula de carga *Dytran*[®] 1022V;
- Sistema de aquisição de dados m+p *VibPilot*[®].

É importante destacar que o sinal de excitação utilizado como referência foi a tensão elétrica aplicada no excitador, assim como feito em Tang *et al.* (2015). Este procedimento foi realizado, pois a tensão aplicada no excitador se mantém constante durante um intervalo de frequência, enquanto que a força aplicada não.



(a) Diagrama esquemático.



(b) Vista geral da bancada.

Figura 1: Descrição da bancada experimental.

O efeito geométrico causado pela interação entre ímã e viga gera comportamento não linear associado ao endurecimento de rigidez. O efeito de endurecimento é ilustrado no teste de excitação senoidal em regime

permanente, visto na Fig. 2. Quando o alto nível de amplitude de excitação é aplicado pelo excitador, a viga apresenta o fenômeno de salto, representado pela súbita queda de amplitude do sinal de resposta. Este resultado mostra claramente o forte comportamento não linear de endurecimento do sistema. Os picos de frequência para cada nível de amplitude de excitação são 23, 24.5 e 26.5 [Hz], respectivamente. O valor da frequência de salto não é exato uma vez que depende da resolução em frequência fornecida pelo teste de excitação senoidal em regime permanente (Brennan *et al.*, 2008).

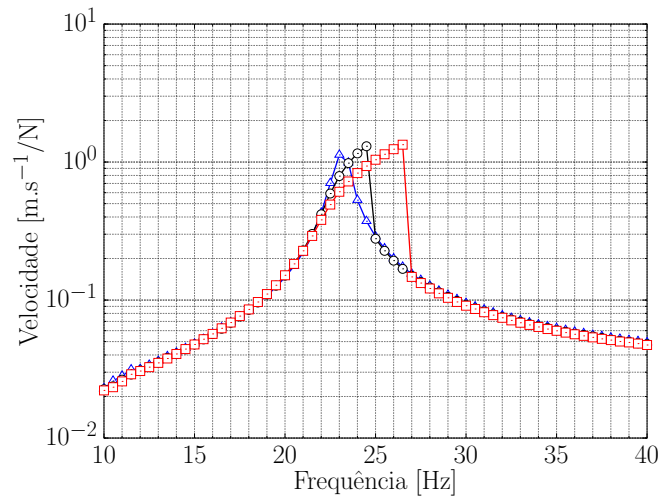


Figura 2: Fenômeno de salto do sistema ao teste de excitação senoidal em regime permanente. Linha \triangle indica nível baixo nível de excitação (0.05 V), \circ para nível médio (0.10 V) e \square para nível alto (0.15 V) aplicado pelo excitador.

3. CONSTRUÇÃO DO MODELO

A bancada experimental na configuração apresentada na seção 2.pode ser aproximada de maneira razoável por um sistema com um grau de liberdade, representando um oscilador de Duffing. Considerando que os parâmetros do sistema possuem diversas incertezas associadas ao processo de aquisição de dados e aos métodos de identificação, o oscilador de Duffing pode ser descrito de forma estocástica:

$$\ddot{x}(\theta, t) + 2\xi(\theta)\omega_n(\theta)\dot{x}(\theta, t) + \omega_n(\theta)^2x(\theta, t) + \mathbb{F}_{nl}(\theta, x(\theta, t)) = \mathbf{u}(\theta, t) \quad (1)$$

sendo θ um elemento do espaço de repetições experimentais realizadas para a identificação do modelo, ξ e ω_n são as variáveis aleatórias que representam os parâmetros de razão de amortecimento e frequência natural [rad/s] do sistema linear equivalente, respectivamente, \mathbb{F}_{nl} é a força não linear de restauração [N/kg], \mathbf{u} a força de excitação aplicada normalizada pela massa [N/kg], e x , \dot{x} e \ddot{x} são o deslocamento [m], a velocidade [m/s] e a aceleração [m/s²] medidos na extremidade livre da viga. Assim, todas as variáveis envolvidas na eq. (1) são aleatórias

Conhecido os parâmetros lineares que descrevem o comportamento do sistema, a força de restauração não linear pode ser determinada por (Masri and Caughey, 1979; Kerschen *et al.*, 2003):

$$\mathbb{F}_{nl,i}(\theta) = \mathbf{u}_i(\theta) - \ddot{x}_i(\theta) - 2\xi(\theta)\omega_n(\theta)\dot{x}_i(\theta) - (\theta)\omega_n(\theta)^2x_i(\theta) \quad (2)$$

sendo o subscrito i referente a cada amostra temporal das grandezas. O método é simples, porém em aplicações experimentais requer que as grandezas de aceleração, velocidade e deslocamento sejam adquiridos em cada instante de amostragem (Worden, 1990b). Neste trabalho, os dados de velocidade e excitação são medidos experimentalmente, enquanto que a aceleração e o deslocamento foram obtidos pela derivação e integração, respectivamente, no domínio da frequência.

A força de restauração \mathbb{F}_{nl} pode ser apresentada em um gráfico tridimensional contra o plano deslocamento versus velocidade. Por outro lado, considerando apenas a representação \mathbb{F}_{nl} versus deslocamento, neste caso a curva pode ser aproximada por:

$$\mathbb{F}_{nl}(\theta, x(\theta, t)) \approx \beta(\theta)x(\theta, t)^3 \quad (3)$$

sendo β [N/m³kg] a variável aleatória do coeficiente não linear de rigidez. Caso o coeficiente seja positivo (negativo), o comportamento não linear do sistema é dito endurecimento (amolecimento) (Kovacic and Brennan, 2011).

Para um sistema que opera em regime de vibração não linear, quando o nível de amplitude de deslocamento é pequeno, a \mathbb{F}_{nl} é aproximadamente zero e para esta condição o sistema tem comportamento linear (Kovacic and Brennan, 2011). Contudo, a influência da \mathbb{F}_{nl} aumenta em razão de elevadas amplitudes de deslocamento do sistema, ocasionando o início do comportamento não linear.

4. IDENTIFICAÇÃO DA VIGA NÃO LINEAR

A identificação dos parâmetros lineares da equação do movimento foi feita de maneira híbrida. Utilizou-se a excitação do tipo varredura senoidal empregada na faixa de 10 até 50 Hz, com taxa de 10 Hz/s e baixo nível de amplitude de excitação (0.05 V), duração de 4 segundos e 4192 amostras. Além disso, foram realizados 900 testes experimentais em diferentes dias. Nas condições em que os testes foram realizados, o sistema opera em regime de vibração linear e os parâmetros ξ e ω_n foram identificados através do ajuste da curva FRF¹ experimental na região do primeiro modo, assim como descrito em Kouroussis *et al.* (2012), seguindo a seguinte expressão:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \frac{1/m}{(j\Omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\Omega) + \omega_n^2} \quad (4)$$

sendo $\mathcal{H}(\Omega)$ a função de resposta em frequência, Ω a frequência e j a unidade imaginária. A Fig. 3 apresenta um exemplo de FRF do sistema utilizada para identificação dos parâmetros na região do primeiro modo.

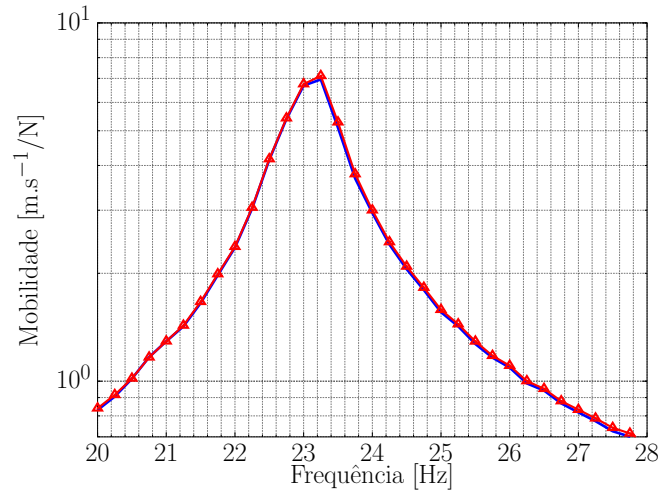


Figura 3: Exemplo de FRF do sistema. Linha — indica resposta aproximada e \triangle a resposta experimental.

A Fig. 4 apresenta as Funções Densidade de Probabilidade (PDFs²) dos parâmetros ξ e ω_n estimadas de forma não paramétrica a partir do ajuste da curva da eq. (4). A função densidade de probabilidade da razão de amortecimento ξ apresenta grande concentração em torno do valor médio com baixa dispersão. Por outro lado, a frequência natural ω_n possui maior dispersão.

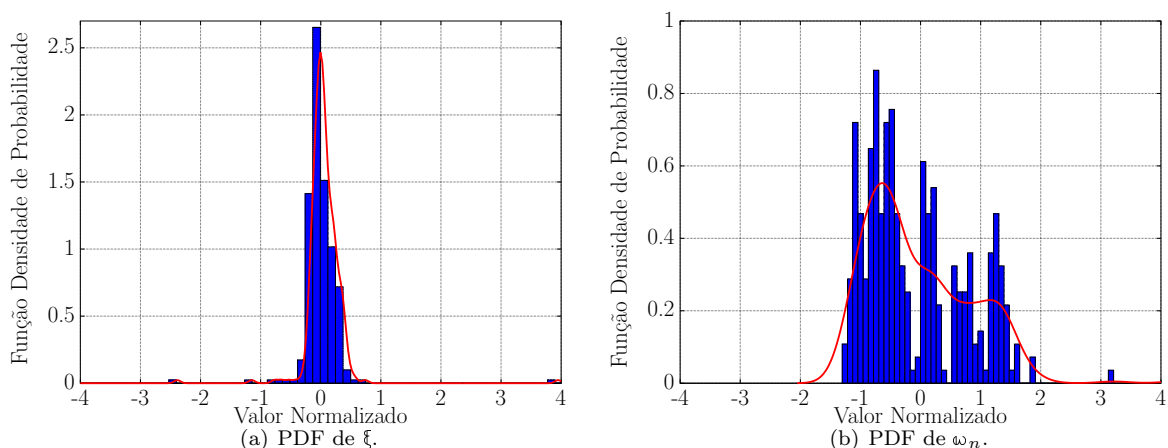


Figura 4: Função densidade de probabilidade normalizada dos parâmetros lineares.

Para identificação da \mathbb{F}_{nl} utilizou-se a excitação do tipo varredura senoidal empregado na faixa de 10 até 50 Hz, com taxa de 10 Hz/s e alto nível de amplitude de excitação (0.15 V), duração de 4 segundos e 4192 amostras. Neste nível de amplitude de excitação, o sistema apresenta comportamento não linear e assim torna-se possível estimar a força de restauração e conseqüentemente o coeficiente não linear. Assim, a partir da eq. (2) aplicou-se o método dos mínimos quadrados e identificou-se a força de restauração \mathbb{F}_{nl} . A Fig. 5(a) mostra a função

¹Função de Resposta em Frequência

²Do inglês *Probability Density Function*.

densidade de probabilidade (PDF) do parâmetro β e a Fig. 5(b) a força de restauração não linear do sistema com intervalo de confiança de 99%. Verifica-se uma distribuição bimodal do parâmetro em função da influência da resposta não linear do sistema e da incerteza relacionada ao método de identificação da F_{nl} .

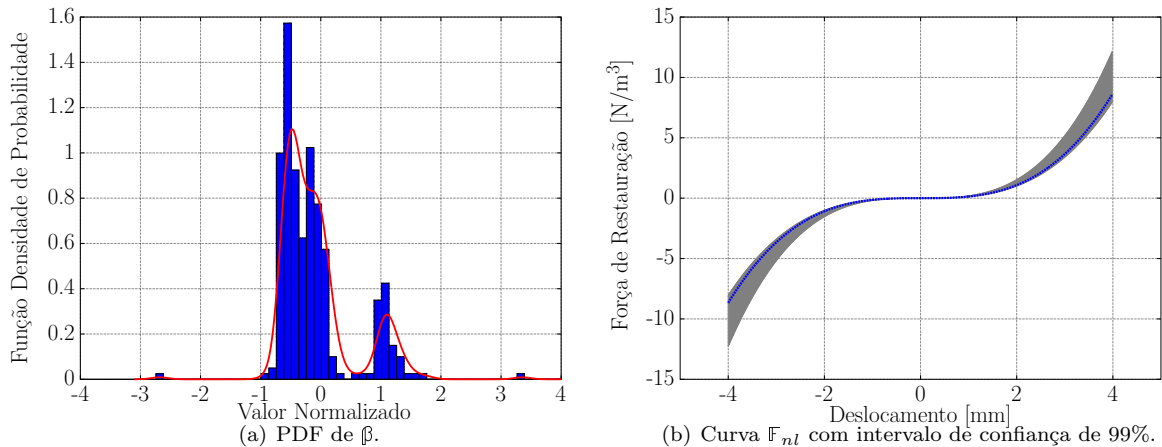


Figura 5: Parâmetros não lineares do sistema. Linha — representa o valor médio de F_{nl} .

Para validar o modelo identificado, novos testes experimentais foram realizados. As respostas do modelo foram validadas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A Fig. 6 apresenta a resposta do modelo estocástico identificado com os limites de confiança determinados a partir de dados experimentais. Observa-se que as respostas do modelo estão dentro do limite de 99% de confiança, mostrando que o modelo estocástico prediz as respostas experimentais do sistema para baixo e alto nível de amplitude de excitação. No domínio da frequência, a validação do modelo foi realizada com o teste de varredura senoidal em regime permanente para baixo e alto nível de amplitude de excitação. A Fig. 7 apresenta as respostas do modelo, que reproduz com bom desempenho o efeito de endurecimento de rigidez, com salto à direita, causado devido ao coeficiente não linear. A dispersão dos valores para alto nível de amplitude de excitação deve-se a grande incerteza presente na identificação da força de restauração não linear.

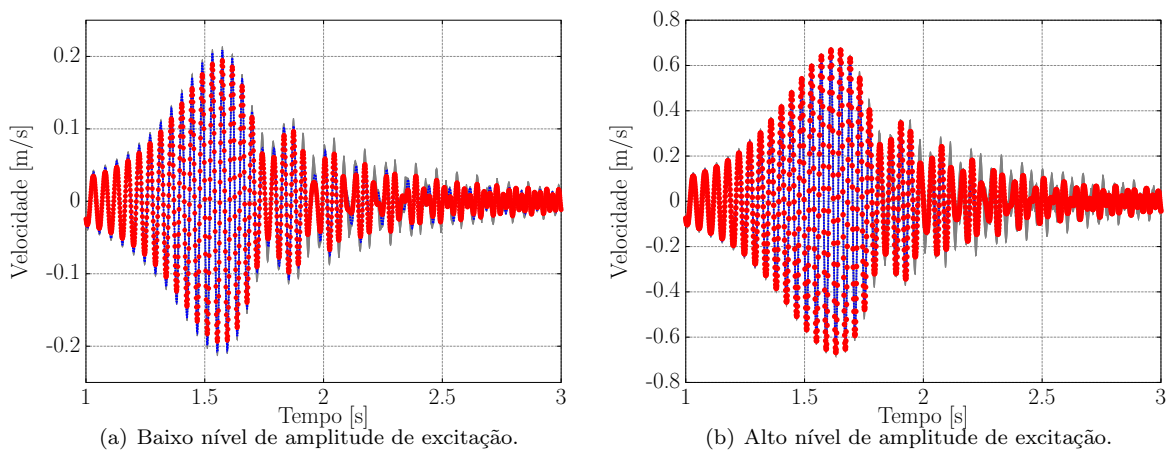


Figura 6: Limites para resposta do sistema com 99% de confiança. Linha — indica a média e \circ a resposta experimental.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, propôs-se a identificação de um modelo estocástico para um sistema que opera em regime de vibração não linear. Para baixos níveis de amplitude de excitação, o sistema possui comportamento linear e para essa condição técnicas de análise modal podem ser aplicadas para estimar seus parâmetros modais. Contudo, para altos níveis de amplitude de excitação, o sistema se comporta de maneira não linear, tornando-se necessário o uso de métodos mais sofisticados de análise. Assim, o método usado neste trabalho para estimar o coeficiente não linear do sistema foi o método de superfície de resposta. Este método apresentou-se como uma poderosa ferramenta para estimar o coeficiente não linear, necessitando apenas de uma severa análise do método de integração que será utilizado e como é feito o monitoramento do sistema. Para contornar este problema, nesta aplicação utilizou-se dados de velocidade para determinar a aceleração e o deslocamento do sistema através da

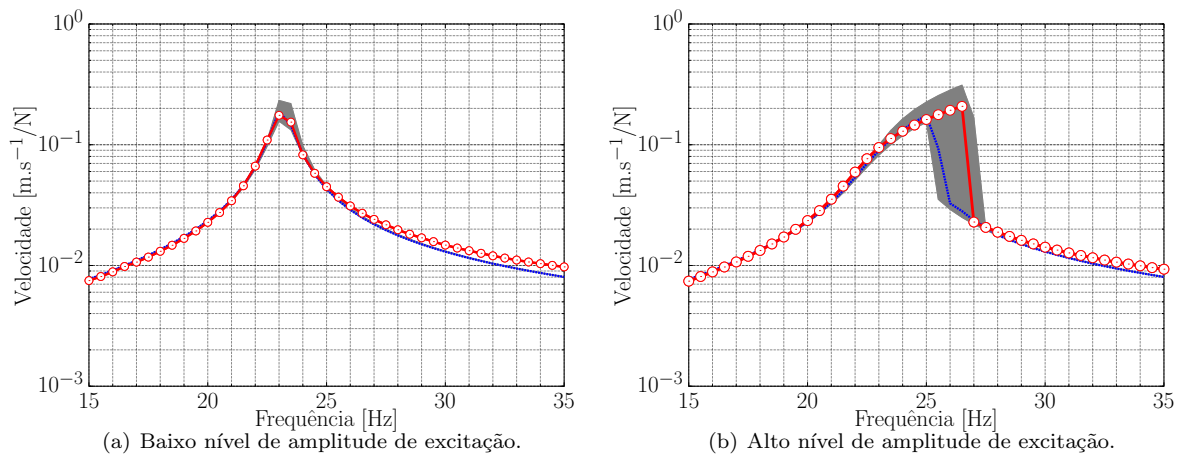


Figura 7: Limites para resposta ao teste de varredura senoidal em regime permanente do sistema com 99% de confiança. Linha — indica a média e ◦ a resposta experimental.

integração no domínio da frequência. Porém, observou-se grande dispersão na força de restauração não linear identificada, o que indica que o método é sensível a presença de incertezas nas medições, o que deve sempre ser considerado na construção do modelo. Os resultados apresentados indicam que o sistema investigado pode ser aproximado razoavelmente por um oscilador de Duffing. As respostas do modelo estocástico apresentam boa reprodução do comportamento não linear do sistema para diferentes níveis de amplitude de excitação com confiabilidade estatística dentro dos limites aceitáveis.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem o apoio financeiro da FAPESP aos processos 2012/099153–3, 2014/02971–6 e 2015/25676 – 2, e pela FAPERJ ao processo E–26/010.002178/2015.

7. REFERÊNCIAS

- Avitabile, P., 2001. “Experimental modal analysis”. *Sound and vibration*, Vol. 35, No. 1, pp. 20–31.
- Brennan, M., Kovacic, I., Carrella, A. and Waters, T., 2008. “On the jump-up and jump-down frequencies of the duffing oscillator”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4–5, pp. 1250 – 1261. ISSN 0022-460X. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.032>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08003805>.
- Cunha, A. and Sampaio, R., 2014. “Effects of a random cubic spring on the longitudinal dynamics of a bar excited by a gaussian white noise”. In *2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*. Rousen, Fran doi:10.13140/2.1.1120.0805. URL <http://www.researchgate.net/publication/262974200>.
- Ewins, D.J., 1986. *Modal testing: theory and practice*, Vol. 2. Research studies press Letchworth.
- Fu, Z. and He, J., 2001. *Modal Analysis*. Elsevier Science. ISBN 9780080511788. URL <http://books.google.com.br/books?id=ElwhqUtJUj8C>.
- Iaccarino, G., 2009. “Quantification of uncertainty in flow simulations using probabilistic methods”. Technical report, DTIC Document.
- Kerschen, G., Lenaerts, V. and Golinval, J.C., 2003. “Vtt benchmark: Application of the restoring force surface method”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 1, pp. 189 – 193. ISSN 0888-3270. doi:<http://dx.doi.org/10.1006/mssp.2002.1558>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832700291558X>.
- Kerschen, G., Lenaerts, V., Marchesiello, S. and Fasana, A., 2001. “A frequency domain versus a time domain identification technique for nonlinear parameters applied to wire rope isolators”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 123, No. 4, pp. 645–650. doi:<http://dx.doi.org/10.1115/1.1410368>.
- Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A.F. and Golinval, J.C., 2006. “Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 3, pp. 505 – 592. ISSN 0888-3270. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2005.04.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327005000828>.
- Kouroussis, G., Fekih, L.B., Conti, C. and Verlinden, O., 2012. “Easymod: A matlab/scilab toolbox for teaching modal analysis”. In *Proceedings of the international congress on sound and vibration, Vilnius*. pp. 9–12.
- Kovacic, I. and Brennan, M., 2011. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Wiley. ISBN 9780470977835. URL <http://books.google.com.br/books?id=f6oZ0cwjTs8C>.

- Masri, S.F. and Caughey, T.K., 1979. “A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems”. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 2, pp. 433–447.
- Oden, T., Moser, R. and Ghattas, O., 2010. “Computer predictions with quantified uncertainty, part i”. *SIAM News*, Vol. 43, No. 9, pp. 1–3.
- Peeters, M., Kerschen, G. and Golinval, J., 2011. “Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 3, pp. 486 – 509. ISSN 0022-460X. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2010.08.028>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X10005559>.
- Scussel, O., Vasconcelos, G.J.Q., Villani, L.G.G., Shiki, S.B. and da Silva, S., 2013. “Identification of mechanical systems through Volterra series - study of benchmark cases”. In *DINCON 2013 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Fortaleza, CE. URL <http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4248.pdf>.
- Shiki, S.B., Hansen, C. and da Silva, S., 2014a. “Parameter identification of a nonlinear beam with hardening behavior using volterra series”. In *5th Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer*. Istanbul, Turquia.
- Shiki, S., Lopes, Vicente, J. and da Silva, S., 2014b. “Identification of nonlinear structures using discrete-time volterra series”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 36, No. 3, pp. 523–532. ISSN 1678-5878. doi:10.1007/s40430-013-0088-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s40430-013-0088-9>.
- Silva, W., 2005. “Identification of nonlinear aeroelastic systems based on the volterra theory: progress and opportunities”. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 39, No. 1-2, pp. 25–62.
- Soize, C., 2005. “A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics”. *Journal of sound and vibration*, Vol. 288, No. 3, pp. 623–652.
- Tang, B., Brennan, M., Lopes, V., da Silva, S. and Ramlan, R., 2015. “Using nonlinear jumps to estimate cubic stiffness nonlinearity: An experimental study”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, p. 0954406215606746.
- Tomlinson, K.W.G.R., 2001. *Nonlinearity in Structural Dynamics*. Institute of Physics Publishing.
- Virgin, L.N., 2000. *Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics*. Cambridge University Press.
- Worden, K., 1990a. “Data processing and experiment design for the restoring force surface method, part 1: integration and differentiation of measured time data”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 4, No. 4, pp. 295 – 319. ISSN 0888-3270. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0888-3270\(90\)90010-I](http://dx.doi.org/10.1016/0888-3270(90)90010-I). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/088832709090010I>.
- Worden, K., 1990b. “Data processing and experiment design for the restoring force surface method, part 2: Choice of excitation signal”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 4, No. 4, pp. 321 – 344. ISSN 0888-3270. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0888-3270\(90\)90011-9](http://dx.doi.org/10.1016/0888-3270(90)90011-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0888327090900119>.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

Use of Restoring Surface Method to Estimate a Stochastic Model of a Nonlinear Beam with Cubic Stiffness

Rafael de Oliveira Teloli, teloli.r@gmail.com¹

Luis Gustavo G. Villani, luisgustavovillani@gmail.com¹

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br¹

Americo Cunha Jr., americo@ime.uerj.br²

¹ UNESP, Univ Estadual Paulista, Av. Brasil Sul, 56, Ilha Solteira/SP, Brasil

² Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rua São Francisco Xavier, 524, Maracanã, Rio de Janeiro/RJ, Brasil

Abstract: *The goal of this work is to identify the probability density function associated with the parameters that describe the linear and nonlinear vibrating behavior considering uncertainties quantification. The method was tested in a clamped-free aluminum beam with nonlinear hardening behavior. The nonlinear behavior was caused due to the magnetic interaction between the magnet and a steel mass connected to the free end of the aluminum beam. The identification process is hybrid and nonparametric. When the level of force amplitude applied is low, the restoring force is null. In these operating conditions, modal analysis are used to extract the modal parameters. However, when the level of force amplitude is high, the restoring force must include nonlinear terms. Thus, the identification of the nonlinear coefficient is performed using the restoring surface method. Experimental tests were carried out several times on different days and conditions to consider uncertainties in the acquired data and the identified parameters for each measurement. Therefore, the probability density function of each parameter was estimated. A stochastic model of the system is obtained and validated with the experimental responses to verify the model reliability for different regimes of motion.*

Keywords: *Nonlinear Vibration, Uncertainty Quantification, Restoring Surface Method.*