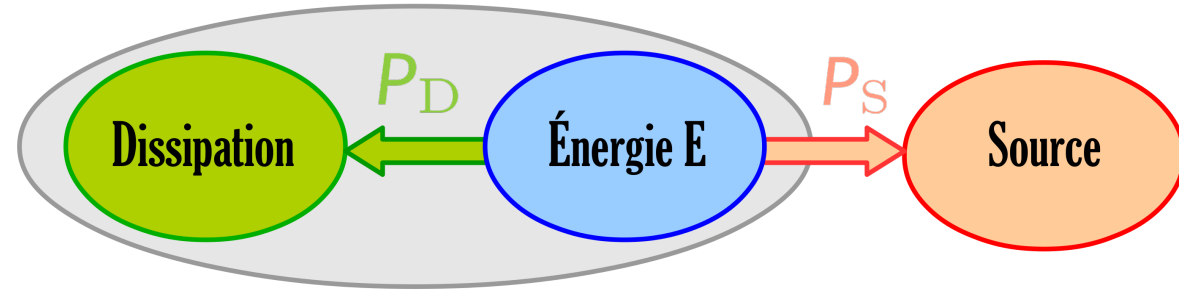


## MOTIVATIONS

### Constat:

Les systèmes physiques vérifient un **bilan de puissance**:

$$\frac{dE}{dt} = -P_D - P_S$$



### Objectif:

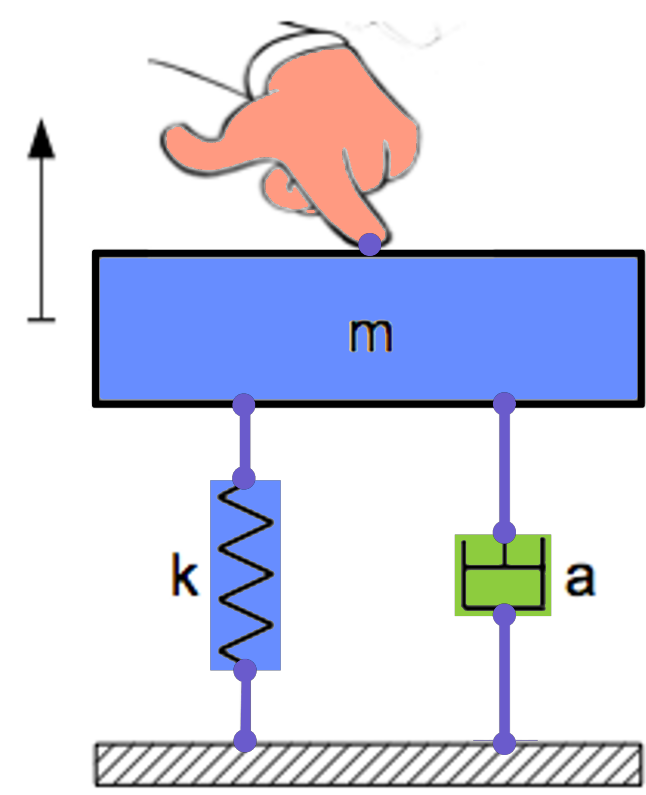
**Modéliser** et **simuler** en préservant cette propriété.

### Approche:

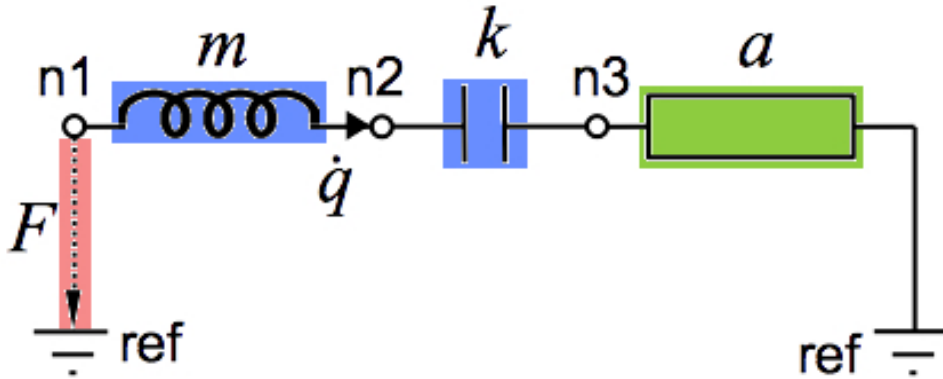
Les **Systèmes Hamiltoniens à Ports**

## EXEMPLE

### Oscillateur amorti excité par une force



### Graphe associé



### Dictionnaire

Var.	Fonction	Flux	Effort	
m	$x_1 = m \dot{q}$	$H_1 = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dH_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$
k	$x_2 = q$	$H_2 = \frac{k}{2} x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dH_2}{dx_2}$
a	$w_3 = \dot{q}$	$z_3 = Aw_3$	$v_3 = w_3$	$F_3 = z_3$
In	∅	∅	$v_4 = y_4$	$F_4 = u_4$

### Netlist

```
mechanics.mass M ('n1','n2'): M=('M',0.1);
mechanics.stiffness K ('n2','n3'): K=('K',1e6);
mechanics.damper A ('n3','ref'): A=('A',1);
mechanics.source IN ('ref','n1'): type='force';
```

### Structure retournée par PyPHS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_J \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}}_a$$

## DICTIONNAIRE ACTUEL

**Mécanique (1D):** masses, ressorts lin./nonlin. (cubique, saturants, etc.), amortissements lin./nonlin., visco-élasticité (dérivateur fractionnaire).

**électronique:** piles, bobines et condensateurs lin./nonlin., résistances, transistors, diodes, triodes.

**Magnétique:** Aimants, capacités magnétiques lin./nonlin, rA'sisto-inductance (intégrateurs fractionnaires).

**Thermique:** sources de chaleur, capacités thermiques.

**Connections:** couplages électromagnétiques, couplages électromécaniques, transferts irréversibles, gyrateurs, transformateurs.

## I. SYSTÈME HAMILTONIEN À PORTS [1]

### $n_E$ Composants stockants :

- État  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_E}$
- $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_E} H_n(x_n) \geq 0$
- $\frac{dE}{dt} = \nabla H^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{n_E} \frac{dH_n}{dx_n} \frac{dx_n}{dt}$

### $n_D$ Composants dissipatifs :

- Variable  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_D}$
- Fonction  $\mathbf{z} : \mathbb{R}^{n_D} \rightarrow \mathbb{R}^{n_D}$
- $P_D = \mathbf{w}^T \mathbf{z} = \sum_{n=1}^{n_D} w_n z_n \geq 0$

### $n_S$ Sources externes :

- Entrée  $\mathbf{u}$ , sortie  $\mathbf{y}$
- $P_S = \mathbf{y}^T \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{n_S} y_n u_n$

### Interconnexion conservative :

- **Puissance reçue:**  $P = \mathbf{f} \mathbf{e}$
- flux  $\mathbf{f}$  et effort  $\mathbf{e}$  (elec:  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e} \equiv \mathbf{v}$ )
- $N = n_E + n_D + n_S$
- $\sum_{n=1}^N P_n = \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_n \mathbf{e}_n = 0$

### Représentation d'état

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_x \\ -\mathbf{G}_x^T & -\mathbf{G}_w^T & \mathbf{J}_y \end{pmatrix}}_{\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_a$$

### Encode le bilan de puissance

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + P_D + P_S &= \nabla H^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} + \mathbf{u}^T \mathbf{y} \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{J} \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{J} \text{ antisym.}) \end{aligned}$$

### Système passif

- **entrée  $\mathbf{u}$ /état  $\mathbf{x}$ /contrainte  $\mathbf{w}$ /sortie  $\mathbf{y}$ .**
- **Énergie  $H \equiv$  Fonction de Lyapunov** (stabilité/contrôle).

## III. MÉTHODE NUMÉRIQUE [3]

**Objectif:** Garantir un **bilan de puissance** à temps discret:

$$\frac{\delta E}{\delta T}[k] = \mathcal{P}[k] - \mathcal{D}[k].$$

### Choix:

$$\frac{\delta E[k]}{\delta T} = \frac{E[k+1] - E[k]}{\delta T} = \frac{H(\mathbf{x}[k+1]) - H(\mathbf{x}[k])}{\delta T}$$

**Une Solution:** gradient discret [?]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &\rightarrow \frac{\delta \mathbf{x}[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]}{\delta T} \\ \nabla H(\mathbf{x}) &\rightarrow \nabla^d H(\mathbf{x}[k], \delta \mathbf{x}[k]) \end{aligned}$$

avec

$$[\nabla^d H(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})]_n = \frac{H_n([\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}]_n) - H_n([\mathbf{x}]_n)}{[\delta \mathbf{x}]_n}$$

$\Rightarrow$  bilan de puissance discret avec

$$\frac{\delta E}{\delta T}[k] = \nabla^d H^T(\mathbf{x}[k], \delta \mathbf{x}[k])^T \frac{\delta \mathbf{x}[k]}{\delta T}$$

## CONCLUSIONS

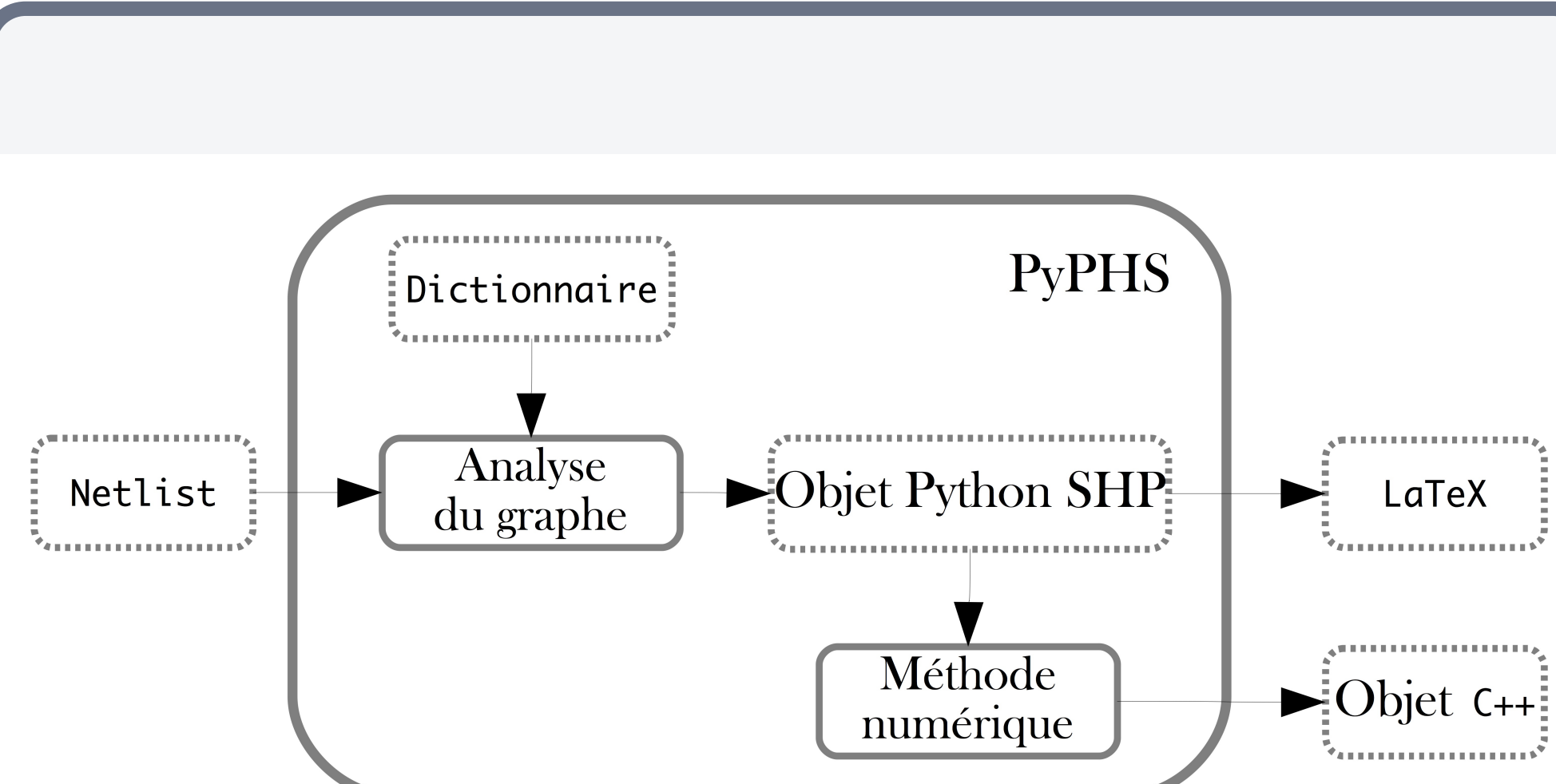
**PyPHS:** <https://afalaize.github.io/pyphs/>

- Licence CECILL (CEA-CNRS-INRIA).
- PYTHON 2.7 supporté sous Mac OSX, Windows 10 et Linux.

**Perspectives** Résultats disponible à implémenter: variables d'ondes aller/retour, méthodes numériques d'ordre supérieur, résolution des conflits de réalisabilité, génération de lois de commandes (approche par platitude).

## RÉFÉRENCES

- [1] Duintam, V., Macchelli, A., Stramigioli, S., & Bruyninckx, H. (Eds.). (2009). Modeling and control of complex physical systems: the port-Hamiltonian approach. Springer Science & Business Media.
- [2] Falaize, A., & Hélie, T. (2016). Passive Guaranteed Simulation of Analog Audio Circuits: A Port-Hamiltonian Approach. Applied Sciences, 6(10), 273.
- [3] Lopes, N., Hélie, T., & Falaize, A. (2015). Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-Hamiltonian systems. IFAC-PapersOnLine, 48(13), 223-228.



## II. ANALYSE DU GRAPHE [2]

**Objectif :** Générer le système d'équations.

1. Graphe  $\rightarrow$  Matrice d'incidence réduite  $\Gamma$ :

$$[\Gamma]_{n,b} = \begin{cases} 1 & \text{si la branche } b \text{ entre le noeud } n, \\ -1 & \text{si la branche } b \text{ sort du noeud } n. \end{cases}$$

2.  $\Gamma \rightarrow$  Lois de Kirchhoff généralisées:

- Potentiels sur les noeuds  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_n}$ .
- Référence  $N_0$  arbitraire.
- $\Gamma^T \mathbf{p} = \mathbf{e}$ , (Loi des mailles).
- $\Gamma \mathbf{f} = 0$ , (Loi des noeuds).

3. Séparation suivant le type de contrôle

$$\Gamma = \left( \begin{array}{c|c} \gamma_0 & \\ \hline \gamma_e & \gamma_f \end{array} \right)$$

- $\gamma_0$ : référence,
- $\gamma_e$ : effort-ctrl,
- $\gamma_f$ : flux-ctrl.

4. Critère de réalisabilité:

Forme  $\mathbf{b} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}$  possible si  $\gamma_f$  inversible.

**Question:** Quel contrôle pour les composants dissipatifs bijectifs?

### Algorithme:

Données:

Netlist et dictionnaire de composants.

Résultat

- Si réalisable:
  1. partition de  $\Gamma$ ,
  2. structure  $\mathbf{b} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}$ .
- Sinon: détection des conflits.