



**HAL**  
open science

# Modélisation géométrique et simulation bio-mécanique des tissus mous

Fabrice Jaillet

► **To cite this version:**

Fabrice Jaillet. Modélisation géométrique et simulation bio-mécanique des tissus mous. Informatique [cs]. Université Claude Bernard - Lyon 1, 2011. hal-01469672

**HAL Id: hal-01469672**

**<https://hal.science/hal-01469672v1>**

Submitted on 18 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Mémoire**

présenté à

**L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1**

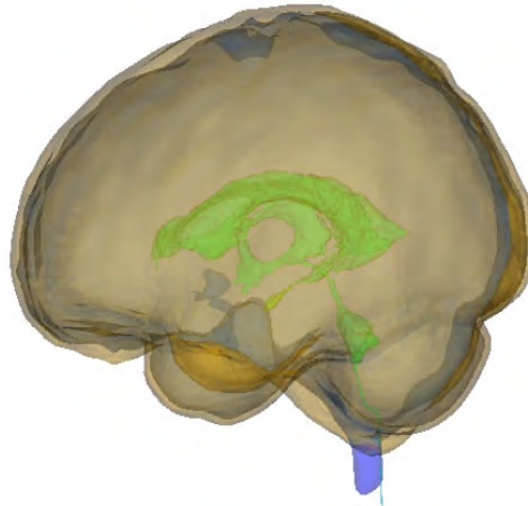
pour l'obtention du diplôme d'**Habilitation à Diriger des Recherches**

(arrêté du 23 novembre 1988)

(modifié par les arrêtés du 13 février 1992 et du 13 juillet 1995)

par

**Fabrice JAILLET**



**MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE ET SIMULATION  
BIO-MÉCANIQUE DES TISSUS MOUS**

Soutenue le 30 juin 2011 devant la Commission d'Examen :

Mme. Dominique FAUDOT (rapporteur)	Professeure, Université de Bourgogne
M. André CROSNIER (rapporteur)	Professeur, Université de Montpellier
M. Marc DANIEL (examinateur)	Professeur, ESIL, Université Aix-Marseille II
M. Yohan PAYAN (rapporteur)	Directeur de Recherche, Université Grenoble 1
M. Behzad SHARIAT (examinateur)	Professeur, Université Lyon1



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Thématique de recherche actuelle . . . . .	5
1.2	L'Informatique Graphique, appliquée à la Santé . . . . .	6
1.3	Problématique et cycle de développement . . . . .	7
	Étape 1 : Segmentation des images . . . . .	9
	Étape 2 : Génération de maillage optimisé . . . . .	9
	Étape 3 : Modélisation et simulation bio-mécanique des tissus mous . . . . .	10
	Étape 4 : Mesure in vivo des paramètres biomécaniques . . . . .	11
	Étape 5 : Analyse d'erreurs <i>a posteriori</i> et raffinement en mécanique des solides, des fluides et des interactions fluide/structure . . . . .	12
	Tâche transversale : Intégration logicielle . . . . .	13
	Interactions avec les autres disciplines . . . . .	13
1.4	Modèles physiques pour les tissus mous . . . . .	14
	Système Masse-Ressort . . . . .	14
	Système de particules . . . . .	15
	Méthode des éléments finis . . . . .	17
	Masses-Tenseurs . . . . .	19
	Schémas d'intégration temporelle . . . . .	21
	Comparaison des différents modèles . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Modélisation biomécanique du système respiratoire</b>	<b>25</b>
2.1	Problématique de la simulation 3D : application au traitement par rayons ionisants . . . . .	26
2.2	Un modèle hybride pour modéliser l'appareil respiratoire . . . . .	27
	Article : « Tracking of target motion using physically based modelling of organs » . . . . .	29
2.3	Une formulation physique des systèmes de particules . . . . .	34
	Avec 2 particules . . . . .	34
	Un système infini . . . . .	35
	Cas général . . . . .	37
	Contribution sur la détermination de $E$ pour les systèmes de particules . . . . .	38
2.4	Modéliser les objets déformables avec des Masses-Ressorts . . . . .	38
	Avec des quadrangles ? . . . . .	39
	Extension aux objets 3D hexaédriques . . . . .	40
	Article : « Integrating Tensile Parameters in Hexahedral Mass-Spring Sys- tem for Simulation » . . . . .	42

2.5	Acquisition multimodale de données physiologiques . . . . .	51
	Suivi externe de la respiration . . . . .	51
	Suivi du mouvement diaphragmatique et pilotage du modèle . . . . .	54
2.6	À propos de cette thématique . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Modélisation des tissus mous en neuro-chirurgie</b>	<b>59</b>
	Vers des modèles déformables en per-opératoire? . . . . .	59
3.1	Étude et modélisation du <i>Brainshift</i> en neurochirurgie . . . . .	61
3.2	Un modèle du cerveau adapté au patient . . . . .	62
	Les maillages <i>Simplexes</i> comme outil pour la déformation d'un maillage générique . . . . .	63
	Adaptation à l'image RM du patient . . . . .	66
	Intégration des structures internes . . . . .	67
	Validation de la segmentation des membranes. . . . .	68
	Influence des membranes dans la simulation. . . . .	71
3.3	Conversion entre 2- <i>Simplexe</i> et triangulation . . . . .	73
	Rapport de Recherche : « From Triangulation to Simplex Mesh : a Simple and Efficient Transformation » . . . . .	74
3.4	Analyse éléments finis et maillage adaptatif . . . . .	83
	Une formulation pour le couplage fluide/structure . . . . .	84
	Adaptation du maillage . . . . .	85
	Article : « Finite-element analysis of a static fluid-solid interaction problem »	86
	À propos de cette thématique . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Travaux en cours, Perspectives et Conclusions</b>	<b>103</b>
4.1	Acquisition de la surface corticale pour piloter le modèle biomécanique du cerveau . . . . .	104
4.2	L'apport de l'élastographie . . . . .	105
4.3	Simulateur d'accouchement . . . . .	106
4.4	Vers un modèle humain temps réel? . . . . .	108
4.5	En conclusion... . . . .	109
	<b>Références</b>	<b>113</b>
	<b>A Curriculum Vitæ</b>	<b>121</b>
	<b>B Liste des publications</b>	<b>125</b>
	<b>Résumé - Summary</b>	<b>130</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Thématique de recherche actuelle

J'effectue mon activité de recherche en Informatique Graphique, plus précisément dans le domaine de la reconstruction 3D à partir de différentes sources, principalement d'imagerie médicale, mais pas uniquement. La modélisation des objets mous (ou déformables) que l'on propose est généralement basée sur des modèles discrets, et, depuis quelques temps, continus. L'intégration d'informations multi-sources dans ces maillages triangulaires ou tétraédriques permet de simuler leurs déformations, tout en respectant leur comportement naturel. Le but recherché est de fournir des outils informatiques qui permettent de guider le personnel médical dans son diagnostic ou pendant une opération de traitement. Après l'opération, les modèles de simulation permettent une validation du traitement. L'originalité : l'intégration de la rhéologie dans les modèles discrets, pour offrir une alternative de simulation des déformations utilisable pendant l'opération, a contrario des méthodes classiques des éléments finis, précises mais plus gourmandes, surtout quand des conditions de non-linéarité sont requises.

J'ai soutenu ma thèse en informatique graphique en 1999. J'ai ensuite été recruté en tant que maître de conférences en septembre 1999 à l'IUT Lyon I, au département Informatique sur le site délocalisé de Bourg-en-Bresse. Mon recrutement dans une équipe à orientation « Image » en tant que spécialiste en modélisation géométrique s'inscrivait naturellement dans la volonté du LIGIM (devenu le LIRIS depuis 2002) de renforcer la coopération entre l'analyse d'image et la modélisation. C'est dans ce cadre que j'ai pu poursuivre efficacement les travaux initiés lors de ma thèse et que j'ai démarré de nouvelles études. Après quelques années marquées par de lourdes responsabilités pédagogiques à l'IUT, j'ai souhaité recentrer mes activités sur la recherche, et surtout, j'ai voulu découvrir certaines techniques que j'utilisais sans les connaître. C'est dans ce cadre que je me suis expatrié deux fois, d'abord à Manchester dans un laboratoire de Physique Médicale, puis au Chili dans des équipes de recherche en *Mathématiques pour l'Image* ainsi qu'en *Informatique* à Santiago du Chili, et en *Analyse Numérique* à Concepción. Depuis la rentrée 2007, je suis de retour à Lyon 1, dans le laboratoire LIRIS, pour mettre en pratique mes nouvelles connaissances dans les projets en cours au sein de l'équipe SAARA, ainsi qu'en collaboration avec les équipes citées ci-dessus. On retrouvera cette progression dans mon CV plus détaillé, présenté en Annexe A.

Durant ces 12 années écoulées depuis ma thèse, j'ai engrangé une certaine expérience,

tant scientifique qu'à travers des responsabilités administratives ou de gestion de projet. La diversité de ces tâches est très motivante dans l'exercice de mon métier. J'ai d'abord eu la chance de travailler avec des personnes qui m'ont tout de suite fait confiance, en m'offrant la possibilité de co-encadrer très vite des doctorants. Apprendre à leurs côtés m'a ensuite permis de devenir plus autonome dans cette tâche d'encadrement sous toutes ses facettes (gestion du contact humain, travail en équipe, suivi d'un projet, recherche de bourse, de financement). On trouvera également en Annexe A la liste des étudiants que j'ai encadrés en recherche, avec le sujet abordé.

Depuis ma nomination en tant que MCF, j'ai participé à la constitution d'un groupe local et international de recherche dans le cadre de l'amélioration de la radiothérapie conformationnelle (projets européens, projets région RA), concrétisé par la participation de l'équipe au projet ÉTOILE, construction du centre Hadronthérapie Rhône-Alpes, porté par Lyon 1. D'autre part, j'ai mis en place des collaborations soutenues avec plusieurs universités ou centres hospitaliers au niveau local, européen et maintenant sud-américain. Trois ans passés au Chili m'ont permis de diversifier mes contacts, de tisser des réseaux et d'initier quelques collaborations fortes qui sont en train de se concrétiser par la soumission de travaux communs. Cela s'est aussi matérialisé par la participation dans plusieurs projets de coopération, en tant qu'acteur, mais aussi en tant qu'initiateur, puis porteur de ces projets. Deux expatriations m'ont fait découvrir d'autres horizons, connaître différents fonctionnements dans les équipes de recherche, et différents systèmes de recherche. Cela m'a apporté flexibilité et adaptation, ainsi qu'une aptitude à travailler en équipe. Éloigné de mon laboratoire français de rattachement, cela m'a amené à accélérer ma prise d'indépendance, tout en gardant un contact fort, qui a grandement facilité ma réintégration au LIRIS, ainsi que celle des doctorants en cotutelle.

**Mots-clés :** informatique graphique ; reconstruction géométrique et indexation 3D ; modélisation physique et biomécanique ; applications médicales, essentiellement neurochirurgie, radio- et hadronthérapie.

## 1.2 L'Informatique Graphique, appliquée à la Santé

Les avancées réalisées ces dernières décennies dans le domaine de la génération, du traitement et de l'analyse des images médicales (CT, IRM, US) ont eu un impact fort sur l'exercice de la médecine. En effet, la possibilité d'accéder visuellement à l'intérieur du corps humain, sans avoir à requérir à une intervention chirurgicale, et d'observer sous un aspect structurel, fonctionnel et métabolique les différents organes et systèmes, est une réalité totalement acquise. Cela ne va pas sans une grande incidence sur le diagnostic, le traitement et le suivi des pathologies, ce qui a un effet bénéfique important pour le patient et pour la société dans son ensemble, diminuant le coût final.

Par modèles physiques des tissus mous du vivant, on sous-entend aussi bien les tissus biologiques déformables élastiques (par exemple la peau, le foie, le cerveau, le poumon), les composantes fluides déformables (air), voire le couplage de ces structures (ventricules cérébrales, arbres bronchiques). Deux communautés scientifiques ont historiquement travaillé sur l'utilisation et/ou la mise au point de modèles physiques des tissus mous biologiques : la communauté de l'informatique graphique et celle de l'informatique médicale. Pour chaque

communauté, les compétences nécessaires au développement de modèles physiques relèvent des domaines (1) de la segmentation d'images médicales, (2) de la reconstruction géométrique et du maillage volumique, (3) de la modélisation bio-mécanique, (4) de la mesure *in vivo* des caractéristiques des tissus et (5) de l'analyse numérique.

L'essentiel de mon projet de recherche actuel se situe dans le domaine de l'informatique pour la santé. Et même si les premiers travaux que j'ai initiés après ma thèse ne sont pas directement concernés, ils ont leur importance dans le cheminement réalisé, pour finalement aboutir aux applications médicales comme *fil rouge* de mes activités. Mon projet vise ainsi le développement commun de modèles physiques des tissus mous du vivant à partir de données d'imagerie médicale, avec en permanence l'envie d'ouverture vers une autre discipline, qu'elle soit médicale (imagerie, chirurgie, navigation) ou scientifique (analyse numérique, mécanique, physique des particules, vision). L'objectif principal qui peut se dégager serait de définir un cadre méthodologique et d'élaborer une plateforme mutualisée sur toute la chaîne de compétences, et plus particulièrement sur les cinq points énoncés ci-dessus. Comme mentionné précédemment, une des principales contributions est de couvrir l'ensemble de la chaîne des traitements requis en informatique pour la santé. Et je voudrais souligner ce point. En effet, le plus souvent, lorsque l'on effectue des recherches dans un des maillons de la chaîne, on se cantonne dans un domaine, en considérant que l'étape précédente a été réalisée correctement, et que l'étape suivante s'adaptera. Ainsi, je m'attache, dans mes projets de recherche, à mettre en contact des communautés qui se côtoient et j'essaie de favoriser l'aspect pluridisciplinaire.

Du point de vue socio-économique, l'impact important de ces recherches en *Informatique pour la Santé* mérite d'être souligné, en particulier pour l'aspect social, puisque les avancées contribueront à comprendre certains mécanismes et à améliorer significativement les diagnostics et les traitements. La levée des verrous scientifiques concernant la simulation numérique d'objets 3D déformables touche de nombreuses communautés scientifiques comme les physiciens, les biologistes, et les informaticiens notamment du calcul scientifique et de l'imagerie. Cela permet également d'appuyer un peu plus sur l'apport bénéfique de l'utilisation d'outils informatiques dans le monde du médical. Avec ces nouvelles modalités d'imagerie médicale, sont apparus des appareillages de plus en plus performants, et de plus en plus coûteux. On peut citer, par exemple, le cas des imageurs IRM per-opératoires, avec des images qui peuvent être directement collectées en cours d'intervention. Les partenaires, sud-américains ou français ayant déjà collaboré avec un pays d'Amérique du Sud, sont conscients du fait que les développements effectués doivent s'adapter à la réalité des systèmes de santé, plus ou moins développés selon les pays. En d'autres termes, il nous paraît complètement utopique d'imaginer des produits d'aide au diagnostic médical ou de robotique médicale qui s'appuient sur des imageurs très coûteux, et cela a son importance quant à la justification de certains choix scientifiques.

### 1.3 Problématique et cycle de développement

L'enchaînement des différentes étapes ainsi qu'une description de l'articulation entre les différentes étapes peuvent être résumés dans le schéma suivant, avant de les détailler dans la suite.

1. La première étape de la chaîne consiste en l'acquisition des images médicales, éven-



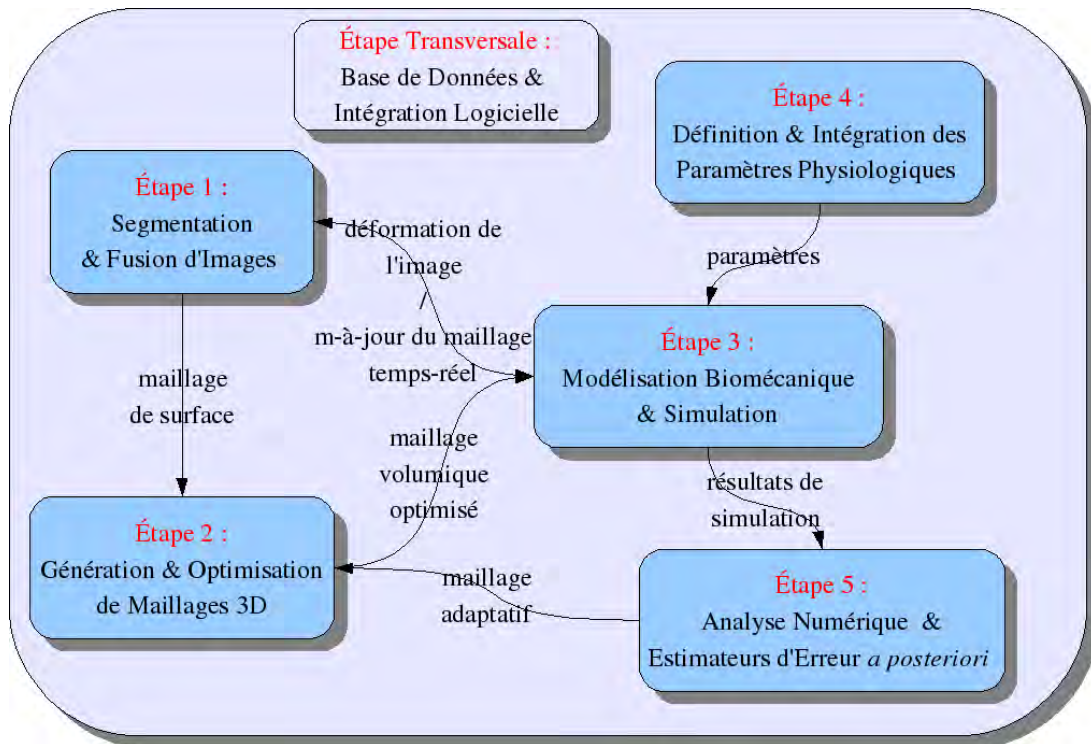


FIGURE 1.1 – Enchaînement des différentes étapes de la chaîne de traitement en informatique graphique pour la santé.

tuellement selon plusieurs modalités. Vient ensuite l'étape 1 de Segmentation qui permet de déterminer la forme et la position des organes cibles dans l'image. Il est possible ici d'intégrer des informations de localisation dans divers référentiels (patient, instrument). Ces informations peuvent être utiles pour mettre à jour le modèle lors de la simulation (Étape 3).

2. À partir des informations recueillies lors de l'étape 1, on va générer un maillage 2D ou 3D selon les besoins, surfacique ou volumique. C'est le rôle de l'étape 2, qui se charge aussi de produire un maillage optimisé et adapté au modèle de simulation biomécanique (Étape 3). La méthode de résolution est choisie en fonction des contraintes liées à l'application, et des comportements physiques qui vont intervenir (Étape 4).
3. L'étape 3 s'occupe ainsi de réaliser les simulations des déplacements et des déformations de l'organe et de son environnement, dans des conditions les plus proches possibles de celles existant dans la réalité. Le déplacement des éléments du maillage peut être extrapolé au déplacement des pixels/voxels pour produire une image déformée qui sera à comparer avec celles traitées lors de l'étape 1.
4. La détermination des paramètres physiologiques n'est pas toujours aisée dans le domaine médical. Les caractéristiques physiques et biomécaniques des organes sont souvent différentes *in vitro* et *in vivo*. L'étape 4 se charge d'acquérir ces paramètres réels et de les traduire comme paramètres numériques utilisables par la simulation réalisée lors de l'étape 3.
5. D'autre part, les informations obtenues à l'issue de l'étape 3 peuvent être analy-

sées *a posteriori* pour déterminer les zones où l'erreur est grande, et qui doivent être raffinées (Étape 5). Disposer d'un maillage optimisé est essentiel lorsque des contraintes de temps interactif, voir temps réel, sont requises.

6. Finalement, une tâche transversale concerne la constitution des bases d'images et l'intégration dans une plateforme logicielle.

Je n'ai pas la prétention de couvrir toute cette chaîne de traitement, ma contribution étant inégale sur chacune des étapes. Pour certaines, cela constitue le cœur de mon activité, pour d'autres il s'agit de compétences dont j'ai besoin mais que je trouve dans des collaborations avec d'autres groupes d'autres disciplines. C'est ce que je vais détailler ci-dessous.

## Étape 1 : Segmentation des images

En imagerie médicale, la segmentation est une étape importante, puisqu'elle conditionne de manière significative la précision de l'analyse quantitative qui peut être effectuée ultérieurement. Les bruits et les artefacts inhérents aux divers systèmes d'acquisition, et la variabilité des structures à segmenter rendent ce traitement particulièrement délicat.

L'imagerie médicale permet d'obtenir des données avant et après un traitement, et quelquefois même en temps réel pendant l'opération. Les plus utilisées sont la tomographie (CT) et l'imagerie de résonance magnétique (IRM), ainsi que les images échographiques (US). Elles sont particulièrement difficiles à segmenter étant donné que la qualité est relativement faible, avec un bruit significatif, et les zones d'intérêt ne sont pas toujours complètes, ni bien visibles. La littérature sur l'évaluation quantitative d'une segmentation (semi-)automatisée a montré que même la segmentation manuelle n'est pas évidente. Les méthodes semi-automatiques fiables de segmentation peuvent offrir l'avantage de rendre le procédé de mesure plus constant. Malheureusement, il est relativement difficile de localiser les frontières tissu-tissu (comme dans le cas du rein ou de la prostate). L'intégration d'une connaissance *a priori* sur la structure anatomique cherchée peut dans certains cas présenter un avantage significatif pour cette étape de segmentation.

D'autre part, chacune des modalités d'imagerie permet de mettre en évidence différentes caractéristiques, selon les organes. La combinaison de deux – voire plus – modalités est d'un grand apport pour effectuer un diagnostic, mais cela soulève des problèmes de mise en correspondance, les images étant forcément exprimées dans des référentiels et prise sous des conditions différentes. La phase de fusion des informations issues des différentes sources d'acquisition est donc primordiale, ce qui va permettre d'obtenir de précieuses données pendant le traitement du patient, données utiles pour mettre à jour les simulations, ou pour recueillir des informations complémentaires qui seront analysées ensuite pour évaluer le bon déroulement du traitement, et éventuellement le mettre à jour. Il est aussi important de travailler en amont avec les médecins, pour définir des protocoles adaptés d'acquisition conjointe de différentes sources d'imagerie.

## Étape 2 : Génération de maillage optimisé

L'objectif de cette étape est de fournir à l'étape 3 un maillage volumique adapté à la géométrie du patient. La génération d'une maille spatiale de qualité est essentielle pour

l'obtention d'une solution numérique aux Équations aux Dérivées Partielles (EDPs) ou aux systèmes discrets de type masses-ressorts. La discrétisation spatiale du domaine doit être suffisamment bonne pour représenter exactement la géométrie et toutes les caractéristiques physiques internes. De plus, les points superflus dans des régions inactives du maillage doivent être évités, puisqu'un plus grand nombre de points implique un temps de traitement CPU plus long et des besoins en mémoire plus importants afin de résoudre les équations discrétisées. Cela devient particulièrement crucial lors de calculs en trois dimensions, où il n'est pas rare de devoir faire tourner des simulations pendant plusieurs jours sur des super-calculateurs.

Les maillages peuvent être structurés ou non. Un maillage structuré est caractérisée par le fait que tous les éléments sont de même forme (par exemple, des rectangles ou hexaèdres). Un maillage non structuré, par contre, contient des éléments de topologie et de taille variables (par exemple, mélange d'éléments hexaédriques et tétraédriques). Il est plus difficile de produire ce type de maillages et cela nécessite des algorithmes et des structures de données plus complexes. L'utilisation de plusieurs types d'éléments (maillage mixte) permet de diminuer le nombre de points et d'éléments nécessaires pour modéliser le problème, par rapport à un maillage de qualité équivalente ne contenant par exemple que des éléments tétraédriques.

De plus, lors de la simulation de la déformation de tissus mous pendant une chirurgie, la dynamique continue du phénomène peut évoluer de manière distincte dans les différentes régions. Lorsque la simulation doit être faite en temps réel pendant une chirurgie, les frontières doivent toujours se déplacer dans un même maillage, c'est-à-dire, en changeant seulement la géométrie des éléments et non pas la topologie.

### **Étape 3 : Modélisation et simulation bio-mécanique des tissus mous**

Le champ de la bio-mécanique apporte, sans conteste, des réponses dans le cadre des applications médicales cherchant à prendre en compte des déformations des tissus mous du vivant. En effet, une meilleure compréhension du comportement bio-mécanique des tissus permettra, à l'aide de modèles numériques, de simuler et de prédire les déformations des tissus du vivant. À terme, l'intégration de ces prédictions dans les simulateurs, dans les logiciels d'aide au plan de traitement, ou pour réaliser du guidage des opérations chirurgicales devrait améliorer sensiblement la qualité de ces derniers. Trois étapes sont en général nécessaires à l'élaboration d'un modèle bio-mécanique : (1) la reconstruction de la surface géométrique de la structure, (2) le maillage volumique de cette structure et (3) la prise en compte de la bio-mécanique de cette structure. La première étape recoupe ce qui a été décrit dans l'étape 1. Il s'agit de segmenter (manuellement, semi-automatiquement ou automatiquement) la structure anatomique sur les images médicales disponibles (en général scanner, IRM ou échographie). La seconde étape rejoint l'étape 2, avec la discrétisation du volume de la structure modélisée et la création d'un « maillage volumique ». C'est, à partir de ces deux premières étapes, qu'est alors définie la phase de modélisation bio-mécanique.

De manière générale, on distingue souvent deux méthodes de modélisation bio-mécanique des tissus du vivant : les modèles discrets et les modèles continus. Dans les modèles discrets, les matériaux sont représentés par un ensemble d'éléments discrets. La représen-

tation la plus courante est le modèle « masses-ressorts », où les éléments (les masses) sont reliés par des composants de type *ressort*, généralement linéaire, mais ce n'est pas restrictif. C'est le modèle privilégié en Informatique Graphique, où il séduit par la simplicité de sa formulation, et les temps de calculs réduits. Cependant, le lien entre les paramètres des ressorts et le comportement de la matière n'est pas immédiat, et est souvent fixé de façon empirique, et ce modèle reste majoritairement cantonné à des applications où l'aspect visuel prime sur la précision de la simulation. Nous verrons comment nous essayons d'étendre cette modélisation pour contourner ces difficultés. Notamment, la construction du maillage à partir de données issues de la segmentation d'images médicales de différentes modalités est une thématique forte de l'équipe SAARA-LIRIS. Dans une approche discrète de type masses-ressorts, nous nous intéressons à l'intégration des lois de comportement mécanique dans le maillage pour augmenter le contrôle de l'erreur. Des méthodes d'actualisation de tels modèles, construits avant l'opération, sont aussi développées pour permettre une mise à jour pendant l'opération, en utilisant des données US par exemple.

La modélisation dite *continue* est d'une approche plus théorique, puisqu'elle se base sur les équations de la mécanique des milieux continus. Ces dernières décrivent les relations entre les contraintes subies par un objet et les déformations de ce même objet. Pour résoudre ce problème, on utilise le plus souvent la Méthode des Éléments Finis, qui passe par une représentation discrète, c'est-à-dire que l'on résout ces équations continues en un nombre discret d'éléments de l'objet, sur la surface ainsi qu'à l'intérieur. Ainsi, le comportement du matériau modélisé est directement lié à la loi de comportement mécanique. Ce qui fait que les modèles *continus* basés sur la MEF sont reconnus pour la précision des solutions qu'elles fournissent, et sont de fait largement préférés aux représentations dites *discrètes* lorsqu'un comportement réaliste, plus que visuel, est souhaité.

L'objet ou l'organe modélisé peut être discrétisé en éléments surfaciques ou volumiques (maillage 2D ou 3D). La résolution des contraintes externes ou internes peut ensuite être réalisée à l'aide d'une méthode discrète ou par Éléments Finis. Au-delà des modèles biomécaniques discrets dans un contexte d'informatique graphique développé au LIRIS, nous avons initié des travaux visant l'intégration des procédures de génération de maillages volumiques patient-spécifiques définies lors de l'étape 2, ainsi qu'au dialogue avec les étapes de caractérisation *in vivo* de la loi de comportement du matériau (étape 4) et d'analyse numérique (étape 5).

## Étape 4 : Mesure *in vivo* des paramètres biomécaniques

Les modèles biomécaniques construits lors des étapes 1 à 3 doivent prendre en compte les paramètres mécaniques des tissus (i.e. leur loi de comportement), ce qui nécessite la mise en place de procédures expérimentales *in vitro* ou *in vivo* afin d'estimer ces paramètres. La simplicité expérimentale a jusqu'ici favorisé essentiellement les caractérisations *in vitro* (la généralité de la forme des échantillons de tissu permet l'utilisation de mesures d'indentation). Mais les différences de réponse mécanique des tissus *in vivo* par rapport à la situation *in vitro* ainsi que la variabilité inter-patients plaident pour la mise en place de mesures réalisées directement sur le patient. Nous proposons d'extraire les caractéristiques mécaniques des tissus à partir d'une optimisation entre les résultats d'une ou plusieurs expériences et des simulations numériques directes dont les paramètres (raideur mécanique d'un modèle discret, module d'élasticité ou coefficients de lois hyper-élastiques

d'un modèle continu, . . . ) sont les variables à ajuster. Trois étapes doivent alors être mises en œuvre :

**Mesures *in vivo*.** Différents dispositifs existent, qui permettent une mesure directe sur patients. Parmi les quelques dispositifs déjà proposés dans la littérature, deux d'entre eux (indenteur, spiromètre) paraissent particulièrement adaptés aux contraintes d'une utilisation dans un cadre de médecine assistée par ordinateur, et pourraient répondre aux contraintes d'une utilisation en routine clinique et d'une inversion des modèles pour l'estimation des paramètres mécaniques.

**Inversion des modèles.** En terme d'optimisation, la particularité de cette problématique de *reverse engineering* est la lourdeur du calcul direct qui prend en compte à la fois la modélisation du dispositif de mesure et du matériau (plusieurs dizaines de minutes pour le calcul d'un modèle hyper-élastique tissu + indenteur par exemple). Pour effectuer la boucle d'optimisation en des temps raisonnables, il est possible par exemple d'envisager des stratégies comme le calcul multi-échelle avec raffinements successifs (Étape 5) ou l'utilisation d'un modèle intermédiaire simplifié.

**Validation expérimentale et évaluation clinique.** Avant de mettre en pratique notre approche sur des cas réels, il est fondamental de valider la méthodologie sur des *cas test* simplifiés. On utilise en général des éprouvettes (gels biologiques, silicones, . . . ) préalablement calibrées, puis des reproductions artificielles de parties du corps humain (« phantoms »), sur lesquels on pourra par exemple segmenter facilement la déformation des structures. Dans notre cas, un certain nombre d'applications cliniques nécessitent une mesure *in vivo* des propriétés mécaniques de tissus mous. On peut citer par exemple la prise en compte, lors du planning chirurgical, des propriétés mécaniques des tissus. La mesure difficile de l'élasticité des tissus cérébraux sera abordée également en cours d'intervention chirurgicale (résection tumorale et compensation des déformations du cerveau).

## Étape 5 : Analyse d'erreurs *a posteriori* et raffinement en mécanique des solides, des fluides et des interactions fluide/structure

Les techniques de raffinement du maillage sont devenues un outil puissant pour améliorer les performances de la méthode des Éléments Finis puisqu'elles évitent un calcul excessif dans le cas un maillage uniformément raffiné, en détectant automatiquement là où le maillage a besoin d'être plus précis, selon la nature du problème. Parmi les techniques les mieux établies pour guider ce raffinement automatique, les estimateurs d'erreurs *a posteriori* sont des candidats sérieux pour l'amélioration des maillages et des simulations. Parmi les pistes que l'on souhaiterait développer à moyen terme, dans le cadre de la collaboration initiée avec l'Université de Concepción, et maintenant de Stathclyde :

**Mécanique des fluides.** En particulier, nous essayerons de combiner les nouveaux schémas multi-échelles avec une erreur hiérarchique estimée *a posteriori*. Il s'agit d'une approche différente de celles traditionnellement développées pour ces équations pour l'évaluation d'erreur *a posteriori*. Nous projetons d'analyser les estimateurs résultants, mathématiquement et numériquement, et de les comparer aux estimateurs précédemment développés.

**Problèmes d'interaction fluide/structure.** Comme première étape dans la modélisation mathématique du cerveau, nous avons réalisé l'analyse en éléments finis d'un problème d'interaction fluide/structure, dans lequel nous avons choisi une description linéaire de la partie solide. La méthode numérique permet d'expérimenter les cas bi- et tridimensionnels, et nous avons proposé, justifié mathématiquement et testé numériquement une technique automatique de raffinement du maillage basée sur un estimateur d'erreurs *a posteriori* qui permet de raffiner séparément le fluide et la structure (travail commun entre DIM et LIRIS). La prochaine étape sera de considérer un cas plus réaliste, c'est-à-dire incorporer l'incompressibilité et le non linéaire. En outre, l'identification numérique des paramètres physiques du cerveau serait à envisager, en utilisant une technique de moindres carrés (Étape 4).

## Tâche transversale : Intégration logicielle

Il s'agit d'une réalisation transversale, puisque l'on rassemble des compétences tout au long de la chaîne de traitement de l'image médicale. Dans chacune des étapes, on va produire des éléments de différents types : base de données d'images, structures de maillage, architectures logicielles, algorithmes, lois de comportement. Tous ces éléments assemblés vont permettre de créer des modèles physiques applicables au médical, sans distinction de pathologie, et cela n'est rendu possible que par la collaboration de groupes issus de communautés complémentaires.

Pour rendre la collaboration encore plus profitable, il est nécessaire que chaque élément soit mis à la disposition de tous, non seulement à l'intérieur d'une même étape, mais aussi, étant donné le taux élevé d'interaction entre les étapes (Fig. 1.1), à tous les niveaux, voire à toute la communauté. Pour l'instant, cela se résume à un site web accessible à tous, mais nous travaillons beaucoup à intégrer nos algorithmes et résultats à des plateformes logicielles existantes, telles que *SOFA*, qui est spécialement dédiée à la simulation temps-réel dans le domaine du médical (mais qui pêche par son manque de documentation), ou *CamITK* qui est une autre plateforme proposant des outils pour l'intervention médicale Assistée par Ordinateur. Ou encore *MEPP* développée au LIRIS et basée sur la bibliothèque *CGAL* de manipulation d'entités géométriques, tels les maillages.

## Interactions avec les autres disciplines

Le but de ces collaborations nationales et internationales est de générer un échange d'idées de qualité entre les scientifiques et les étudiants des domaines de la neurobiologie, de la biomécanique, des mathématiques pour l'image et de la technologie informatique afin de renforcer la recherche existante dans tous ces domaines. Il est nécessaire de comprendre et comparer l'organisation, les fonctions et la dynamique des dispositifs réels, qui permettent de trouver des descriptions communes. Ce genre d'intégration est essentiel : comprendre un fonctionnement du point de vue physiologique prépare le terrain pour créer des systèmes informatiques ; et créer des systèmes informatiques peut aider à comprendre le fonctionnement physiologique.

Par conséquent, déchiffrer les problèmes généraux posés quand un dispositif physique doit trouver une description utile du monde extérieur, implique l'intégration de différentes disciplines. La promotion d'un champ d'intersection entre l'informatique graphique

et l'ingénierie biomédicale exige de rassembler des groupes de recherche qui abordent le problème avec différentes techniques et décrivent leurs conclusions dans différents langages scientifiques. Et je suis convaincu que cette collaboration de nombreuses disciplines permettra de lever certains verrous scientifiques. De plus, il ne faut pas oublier que nous avons un contact direct avec des médecins et des chirurgiens ; même si ces derniers ne font pas partie intégrante de cette chaîne de traitement, ils seront néanmoins bien présents à toutes les étapes, avec une expertise clinique sous-jacente à l'essentiel des contributions dans le domaine de l'informatique et vision pour la santé.

Ainsi, c'est l'évolution de cette démarche d'intégration scientifique que je voudrais décrire tout au long de ce mémoire.

## 1.4 Modèles physiques pour les tissus mous

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de présenter les différents modèles utilisés en simulation des déformations des tissus mous. Le but, ici, n'est pas de faire une description exhaustive des modélisations utilisées, mais plutôt de donner au lecteur les bases pour mieux appréhender ce mémoire de synthèse, et pouvoir apprécier les principales caractéristiques de chacune des modélisations utilisées dans les travaux qui y sont présentés. Pour une bibliographie plus complète, on pourra se référer à un des nombreux états de l'art sur le sujet, par exemple celui de Nealen *et al.* en 2006 [NMK<sup>+</sup>06].

### Système Masse-Ressort

Les systèmes Masse-Ressort sont sans conteste les modèles déformables les plus simples et les plus intuitifs de tous. Contrairement aux méthodes des Éléments Finis, qui s'appuient sur une formulation continue qui sera ensuite discrétisée de façon adéquate, ici le modèle est discret dès le départ. Et comme son nom l'indique, il est composé de masses reliées par un réseau de ressorts. L'état du système au temps  $t$  est défini par les positions  $\mathbf{x}_i$  des différentes masses, ainsi que leur vitesse  $\mathbf{v}_i$ . Les forces sont calculées à chaque pas de temps, selon les connexions internes par des ressorts, ainsi que les forces externes (gravité, friction, collisions, ...). Le mouvement d'une masse est alors gouverné par la seconde loi de Newton :  $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$ , ce qui pour l'ensemble du système peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice diagonale de masse, de dimension  $3n \times 3n$ . Ainsi, pour résoudre le système et obtenir la nouvelle position, il « suffit » d'intégrer itérativement selon le temps  $t$  (cf. paragraphe ci-dessous, page 21).

Les ressorts sont la plupart du temps considérés comme linéairement élastiques, et la force agissant sur la masse  $i$  générée par un ressort connectant  $i$  et  $j$ , peut s'écrire de façon très simple :

$$\mathbf{F}_i = k_s(|\mathbf{x}_{ij}| - l_{ij}) \frac{\mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|}$$

où  $\mathbf{x}_{ij}$  est la distance entre les masses  $i$  et  $j$ , et  $l_{ij}$  la longueur au repos du ressort. On peut très facilement prendre en compte le comportement visco-élastique, en rajoutant une

force d'amortissement,  $\mathbf{F}_i = k_d \mathbf{v}_{ij}$ . Mais cette dernière formulation présente le désavantage d'amortir tous les déplacements, et pas seulement ceux dus aux ressorts. On préférera alors utiliser la formulation suivante pour l'amortissement :

$$\mathbf{F}_i = k_d \left( \frac{\mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{x}_{ij}}{\mathbf{x}_{ij}^T \mathbf{x}_{ij}} \right) \mathbf{x}_{ij}$$

qui projette le vecteur *Différence de vitesse* le long du vecteur reliant les 2 masses, et n'autorisant que les forces dans cette direction.

Concernant la stabilité du système, diverses approches ont été présentées. Si l'on se place du point de vue des coefficients des ressorts, ceux-ci doivent satisfaire :  $k_s \approx \frac{m}{n\pi^2(\Delta t)^2}$ . Ou, par rapport au pas de temps, celui-ci devrait être inférieur à la période naturelle du ressort, soit  $T \approx \pi \sqrt{\frac{m_i}{k_s}}$ . Il a aussi été proposé de considérer le système dans son ensemble, et pour une résolution de type *Verlet* :  $\Delta t \leq 2\sqrt{\frac{M}{K}}$  fournit une formulation théorique très restrictive, qui peut être relâchée expérimentalement. Pour  $k_d$ , il a de plus été prouvé ([BL06]) que la stabilité est atteinte pour :

$$2\sqrt{m_i k_s} < k_d < \frac{|\mathbf{v}_i^T \frac{m_i}{\Delta t} + \mathbf{F}_i^T|}{|\mathbf{v}_i^T|}$$

En ce qui concerne les coefficients des ressorts, ils pourront être différents selon les directions, typiquement pour simuler des matériaux anisotropes. Quand aux ressorts diagonaux, ils jouent le rôle de résistance au cisaillement (tout en contribuant aussi à la résistance à l'élongation...), et participent à la stabilité du système.

Pour des comportements plus spécifiques (autres que linéaires élastiques), il existe dans la littérature une quantité de forces, surtout en 2D pour modéliser les tissus ou les visages, puisque ce modèle est plutôt populaire dans ces domaines. Ces forces peuvent alors être : angulaires pour rendre compte du cisaillement lorsque les ressorts diagonaux ne sont plus adaptés, de flexion, surfaciques, volumiques, etc.

La difficulté de ce type de modélisation réside dans la construction de la géométrie, et surtout, selon cette géométrie, dans la répartition des masses et la définition des différents coefficients des ressorts. Ce dernier point pose problème car, au contraire des éléments finis, la formulation ne repose pas sur une théorie mécanique bien cadrée. D'après [Ton98], il est possible de relier le module de Young au coefficient de raideur et à la distance au repos d'un ressort pris isolément :

$$k_s = \frac{E}{r_0}$$

Cela devient beaucoup moins évident lorsque l'on considère un réseau de ressorts, et on y reviendra dans le paragraphe sur la comparaison entre les modèles déformables, page 23.

## Système de particules

Les systèmes de particules ont été popularisés par Reeves en 1983 [Ree83] pour simuler des explosions. Ce modèle peut être vu comme une généralisation des masses-ressorts, où



les masses –les particules– interagissent entre elles sans relation spatiale bien définie. Il n’y a donc pas de ressorts, mais des forces qui dérivent d’un potentiel :

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_x \Phi_i = -\sum_{j \neq i} \nabla_{x_i} \Phi_{ij}$$

où  $\Phi_i$  est la somme de toutes les énergies  $\Phi_{ij}$  entre  $i$  et les autres particules  $j \neq i$ . Les particules évoluent au cours du temps, guidées par ces forces qui agissent entre toutes les particules. Cela permet de prendre en compte une grande variété de déformations, et surtout des changements topologiques importants peuvent avoir lieu sans que cela pose problème (passage de l’état solide à liquide, par exemple). Par contre, cela se fait au détriment d’une complexité en  $O(n^2)$ . Typiquement, pour réduire les temps de calcul, on utilise des forces bornées sur la distance entre 2 particules, ou l’on place ces dernières dans des grilles de résolution. On arrive donc à une complexité en  $O(n)$  lorsque l’on restreint les interactions à un certain voisinage, et  $O(n \log(n))$  pour la recherche du voisinage.

Pour les forces inter-particules dérivées, on utilise souvent le potentiel de Lennard-Jones, qui sous sa forme générale s’écrit :

$$\Phi_{LJ}(r) = \frac{B}{r^n} - \frac{A}{r^m}$$

où  $r$  est la distance entre 2 particules,  $A, B, n$  et  $m$  étant des constantes. Ce potentiel est bien connu en dynamique moléculaire, où il décrit l’interaction entre 2 atomes par une attraction à grande portée, et une répulsion à courte distance. On peut alors le reformuler :

$$\Phi_{LJ}(r) = \frac{-\varepsilon}{m-n} \left( m \left( \frac{r_0}{r} \right)^n - n \left( \frac{r_0}{r} \right)^m \right)$$

avec  $r_0$  la distance d’équilibre, et  $-\varepsilon$  l’énergie de dissociation qui contraint la rigidité du système. De grands coefficients  $m$  et  $n$  engendrent des objets fragiles, alors que de petites valeurs produisent des objets élastiques (Fig. 1.2). On peut éventuellement coupler cette équation avec des termes reproduisant des comportements différents selon la température, pour simuler la fonte ou la fusion des objets.

Ainsi, comme pour les masses-ressorts, le choix de ces coefficients reste relativement délicat. En effet, si l’on considère le développement limité de la force de Lennard-Jones autour de la position  $r_0$  d’équilibre entre les particules :

$$F(r_0 + \delta r) = F(r_0) + F'(r_0)\delta r \quad (1.1)$$

Comme  $F(r_0) = 0$  puisque nous sommes à l’équilibre, l’équation précédente devient :

$$F(r_0 + \delta r) = F'(r_0)(r - r_0) \quad (1.2)$$

Si l’on considère  $F'(r_0)$  comme un paramètre définissant une raideur élastique, on peut déduire le module de Young de la force de Lennard-Jones ( $E_{LJ}$ ) :

$$E_{LJ} = r_0 F'(r_0) \quad (1.3)$$

En évaluant  $F'(r_0)$ , on obtient finalement :

$$E_{LJ} = mn\varepsilon \quad (1.4)$$

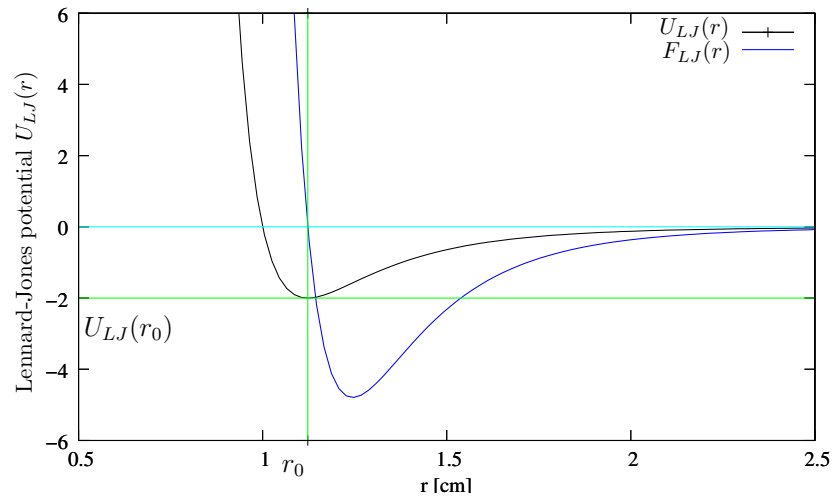


FIGURE 1.2 – Potentiel de Lennard-Jones pour  $m = 12$ ,  $n = 6$ ,  $r_0 = 1.1225$  et  $\Phi_{LJ}(r_0) = -2$ .

Comme nous l'avons noté dans l'introduction, cela ne répond que partiellement à la problématique car en général  $E$  est une donnée. Donc, le mieux que l'on puisse faire est de fixer 2 des paramètres, par exemple  $m = 12$  et  $n = 6$  (force dite de Van Der Waals), qui permettent de contrôler la déformation de l'objet, de plastique à élastique, puis de déterminer  $\varepsilon$  en fonction de  $E$ , et de contrôler ainsi la raideur de l'objet. Il restera encore à intégrer le coefficient de Poisson  $\nu$ , qui traduit les forces transversales.

Enfin, dans ce type de modélisation, la surface de l'objet n'est pas définie à proprement parler. Même si il existe une version « surfacique » qui répond quelque peu au problème (les particules orientées, [ST92]), cela va engendrer un certain nombre de complications, parmi lesquelles on peut répertorier : préservation du volume (même si le volume des particules ne change pas, celui de l'objet est modifié selon leur arrangement), mélanges non voulus, modélisation des contacts, etc. Dans ma thèse de doctorat [Jai99], j'ai proposé de réduire le nombre de particules nécessaires (et donc le temps de calcul), par une reconstruction de la géométrie par couche : de grosses particules au centre pour assurer la cohérence de l'objet, et des particules plus petites à la surface pour mieux rendre compte des collisions et de la forme. Nous avons aussi intégré un squelette implicite, permettant de préserver la forme de l'objet, et d'éviter ainsi les mélanges non voulus. Notre modèle est présenté plus en détails au paragraphe 2.2 (et dans [ABJS04]).

## Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une des plus populaires pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) sur des maillages de toutes sortes. Pour son utilisation en simulation des objets déformables, ces derniers sont vus comme un ensemble connexe d'éléments du volume, qui est discrétisé selon un maillage. La mécanique des milieux continus fournit alors tous les outils pour résoudre les EDP.

**Élasticité linéaire :** Les premiers travaux sur l'utilisation interactive des éléments finis ont d'abord commencé par une modélisation en petits déplacements. En effet, lorsque les déplacements des nœuds par rapport à la taille de l'objet sont relativement réduits, le tenseur des déformations (dit de Green-Saint Venant) tend vers une formulation linéaire :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$$

$\mathbf{U}$  est le déplacement du point où l'on évalue la déformation. Pour passer des déformations aux contraintes à l'intérieur de l'objet, on peut aussi utiliser une loi linéaire, valable pour les objets élastiques en petites déformations, appelée loi de Hooke :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon) Id$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, que l'on peut calculer à partir du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau.  $Id$  est la matrice identité.

Ensuite, on équilibre les contraintes internes avec les forces  $F$ , qui s'appliquent sur chaque élément de l'objet.

$$\text{div}(\sigma) + F = \underline{0}$$

Ces lois s'écrivent donc comme des équations aux dérivées partielles. L'utilisation d'éléments finis est la méthode la plus répandue pour obtenir une résolution numérique de ces systèmes d'équations.

Dans le cas statique pour l'élasticité linéaire, on extrait de chaque élément une matrice de raideur caractéristique. Ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées dans une grande matrice de raideur du modèle complet que l'on nomme  $K$ . Une fois discrétisés par la méthode des éléments finis, les déplacements en chaque point du maillage dépendent des forces extérieures appliquées aux mêmes points. Si l'on discrétise les lois de l'élasticité linéaire par cette méthode, on aboutit à une relation linéaire :

$$K\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

La loi de comportement en élasticité linéaire dynamique discrétisée par éléments finis, s'écrit par une équation différentielle entre l'ensemble des déplacements  $\mathbf{U}$  des nœuds du maillage, les forces  $F$  extérieures soumises sur ces nœuds et les matrices de masse ( $M$ ), d'amortissement ( $D$ ), et de raideur ( $K$ ) issues de la modélisation par éléments finis :

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + D \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + K\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

**Élasticité non-linéaire :** L'élasticité linéaire présentée ci-dessus, est valable uniquement en petits déplacements (déplacement  $< 10\%$  de la taille de l'objet). Si l'on veut étendre l'utilisation du modèle mécanique à une gamme plus large d'objets élastiques, de forces imposées et/ou de matériaux simulés, des non-linéarités vont bien souvent apparaître. Celles-ci ont deux origines :

**la non-linéarité géométrique :** le passage des déplacements vers les déformations est une relation non-linéaire lorsque les déplacements deviennent grands. Cela est dû, en grande partie, aux rotations. On parle de modèles à grands déplacements ou à grandes rotations (ex. Saint Venant-Kirchhoff).

**les lois de comportement non-linéaires :** dans le cas des petits déplacements avec des matériaux parfaitement élastiques et isotropes, nous avons utilisé la loi de Hooke qui est linéaire. Cependant, si l'on souhaite caractériser des matériaux plus complexes, il faudra généralement utiliser des lois qui permettent d'avoir une relation non-linéaire entre contraintes et déformations. On parle de grandes déformations (ex. Mooney-Rivlin, Yeoh, Ogden, etc.).

Le terme de raideur qui discrétise la contrainte élastique  $F_K(U)$  n'est plus linéaire :

$$K\mathbf{U} \longrightarrow F_K(\mathbf{U})$$

En dynamique, le système s'écrit :

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + D \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + F_K(\mathbf{U}) = \mathbf{F}$$

La résolution en ligne de ce type de systèmes ne peut être temps-réel que pour un nombre très réduit de nœuds. De plus, les non-linéarités sont telles qu'une phase de pré-calculs oblige à faire des hypothèses restrictives sur le type de contraintes que l'on peut soumettre au modèle.

## Masses-Tenseurs

Cotin et al. [CDA00] se sont attachés à modifier la méthode par éléments finis pour y introduire la possibilité de modifier la topologie. Leur idée a été de changer la manière de résoudre les équations du système d'éléments finis en passant à une résolution locale et itérative. Ils utilisent des matrices de raideur 3x3 pour les sommets appartenant au même tétraèdre. À partir de la discrétisation du champ des déplacements sur un élément fini, on peut exprimer l'énergie de déformation de l'élément en fonction des déplacements de ses sommets, puis dériver cette expression pour obtenir la force élastique exercée sur chacun des sommets. On somme alors toutes les forces qui agissent sur le sommet pour obtenir la résultante en ce point qui sera ensuite intégrée pour obtenir le déplacement du point. Dans son principe, la méthode des masses-tenseurs est assez semblable à celle des masses-ressorts car, dans les deux cas, le système d'équations dynamiques est résolu localement par intégration temporelle. Cependant, les deux modèles sont physiquement très différents car les masses-ressorts sont une représentation discrète et dépendante de la topologie du maillage, tandis que la méthode des masses-tenseurs est basée sur une représentation continue de la matière qui est indépendante de la topologie.

Cet algorithme est malheureusement assez gourmand en temps de calcul. Pour l'améliorer, ils ont aussi proposé de combiner deux méthodes (EF et masses-tenseurs sont construits sur la même base) dans un seul système hybride, confinant l'utilisation des masses-tenseurs dans les zones de changement de topologie.

**Pour un matériau élastique linéaire,** l'énergie mesurant la déformation peut être définie par :

$$W = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\varepsilon))^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon^2) = \frac{\lambda}{2} (\text{div} \mathbf{U})^2 + \mu \|\nabla \mathbf{U}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\text{rot} \mathbf{U}\|^2$$

où  $\varepsilon$  est le tenseur des déformation de Green-Saint Venant. On peut alors calculer en chaque point  $i$  du maillage une force  $\mathbf{F}_i$ , dérivée de l'énergie élastique par rapport à la position du point  $\mathbf{P}_i$  :

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{P}_i}$$

On se place dans un schéma éléments finis sur un maillage tétraédrique. Dans un tétraèdre  $\tau_i$  défini par ses 4 sommets  $\mathbf{P}_{\tau_i(j)}^0, j = 0 \dots 3$  dans leur position d'origine, le vecteur déplacement d'un point  $\mathbf{x}$  donné est défini par :

$$\mathbf{U}_{\tau_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^3 \alpha_j^{\tau_i}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\tau_i(j)}^0 \mathbf{P}_{\tau_i(j)}$$

où les  $\alpha_j^{\tau_i}(\mathbf{x})$  sont les coordonnées barycentriques de  $\mathbf{x}$  à l'intérieur de  $\tau_i$ . Ces fonctions de forme sont linéaires et leur dérivée a une signification géométrique simple :

$$\frac{\partial \alpha_j^{\tau_i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{M}_j^{\tau_i}}{6V(\tau_i)}$$

avec  $\mathbf{M}_j^{\tau_i}$  le vecteur normal au triangle  $j$ , et  $V$  le volume du tétraèdre. Le tenseur des déformations  $\varepsilon(\mathbf{x})$  est constant dans le tétraèdre, puisqu'il dépend des dérivées des vecteurs déplacement. À l'intérieur du tétraèdre, la force prend la forme :

$$\mathbf{F}_{\tau_i(j)} = \sum_{k=0}^3 [K_{jk}^{\tau_i}] \mathbf{P}_{\tau_i(k)}^0 \mathbf{P}_{\tau_i(k)}$$

où les  $K$  sont les 6 matrices de raideurs définies telles que :

$$[K_{jk}^{\tau_i}] = \frac{1}{36V(\tau_i)} (\lambda_i M_k^{\tau_i} (M_j^{\tau_i})^t + \mu_i M_j^{\tau_i} (M_k^{\tau_i})^t + \mu_i M_k^{\tau_i} \cdot M_j^{\tau_i} Id_3)$$

Il est important de noter que la matrice des déformations  $K$  ne dépend que des caractéristiques du matériau dans le tétraèdre, et de sa géométrie dans son état d'équilibre.

**Le problème des grandes déformations** a été partiellement résolu en mettant en oeuvre l'élasticité non-linéaire (géométrique, et non physique) de St Venant-Kirchhoff [PDA03a], où l'on considère le tenseur des déformation complet :

$$\varepsilon = 2(C - I) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U}^T \nabla \mathbf{U})$$

et l'on peut écrire l'énergie de déformation :

$$W = W_{lineaire} + \frac{\lambda}{2} (\text{div} \mathbf{U}) \|\nabla \mathbf{U}\|^2 + \frac{\lambda}{8} \|\nabla \mathbf{U}\|^4 + \mu (\nabla \mathbf{U} : \nabla \mathbf{U}^t \nabla \mathbf{U}) + \frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{U}^t \nabla \mathbf{U}\|^2$$

**Comportements non linéaires.** Ce modèle peut être étendu à un certain nombre de lois hyper-élastiques, pour prendre en compte un comportement complètement non-linéaire en grandes déformations, et non plus seulement en grands déplacements. Ainsi, on pourra considérer une énergie de déformation telle que celle de Mooney-Rivlin :

$$W = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) + c_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$$

où les  $c_{ii}$  sont les coefficients caractérisants le matériau (et  $\mu = 2(c_{10} + c_{01})$  définit le cisaillement), et où  $I_1$  et  $I_2$  sont les premier et deuxième invariants. Ou encore, le modèle introduit par Yeoh :

$$W = c_{10}(I_1 - 3) + c_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{30}(I_1 - 3)^3$$

qui ne fait intervenir que le premier invariant  $I_1$ , et où le cisaillement vaut  $\mu = 2c_{10}$ . Nous avons d'ailleurs proposé une adaptation de ce modèle en masses-tenseurs. Et l'étude est en cours dans le cadre de la thèse de X. FAURE, pour l'utiliser pour simuler des déformations des tissus mous. En outre, ces modèles semblent être de bons candidats pour une implémentation parallèle.

## Schémas d'intégration temporelle

Pour être capable de simuler les déplacements et déformations, nous avons besoin de connaître les coordonnées  $\mathbf{x}$  des objets au cours du temps pour tous les sommets. Les champs de vecteurs  $\mathbf{x}(t)$  ne sont pas obtenus directement, mais implicitement comme solution d'une équation différentielle, la seconde équation de mouvement de Newton, qui est de la forme :

$$\ddot{\mathbf{x}} = F(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$$

où  $\ddot{\mathbf{x}}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  sont les seconde et première dérivées de  $\mathbf{x}$  selon le temps. Cette équation est souvent reformulée comme un système de 2 équations du premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

La résolution numérique de ce système d'*Équations aux Dérivées Ordinaires* permet d'obtenir les nouvelles positions de l'objet.

Le schéma d'intégration le plus simple est celui d'Euler *Explicite*, où les dérivées sont remplacées par les différences finies, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}(t) + \Delta t F(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t), t) \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{v}(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Les schémas d'intégration sont regardés selon 2 critères : la stabilité et la précision. En informatique graphique, la stabilité est sans aucun doute prépondérante. Le schéma précédent est dit *Explicite* car il fournit une solution explicite au pas suivant pour chacun des termes. Il est très facile à implémenter, mais il n'est stable que si le pas de temps est en-deçà d'un certain seuil. Par exemple, pour un système masses-ressorts  $\Delta t \leq 2\sqrt{\frac{M}{K}}$ , ce

qui peut imposer des pas de temps incroyablement petits si l'objet est très rigide.

Ce problème peut aussi être résolu par un schéma *Euler Implicite*, qui utilise les quantités à  $(t + \Delta t)$  de chaque côté de l'équation :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}(t) + \Delta t F(\mathbf{v}(t + \Delta t), \mathbf{x}(t + \Delta t), t) \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{v}(t + \Delta t)\end{aligned}\tag{1.7}$$

Ainsi, au lieu d'extrapoler une valeur constante sur tout le pas de temps pour le côté droit, ce dernier fait partie de la solution. On a maintenant un schéma inconditionnellement stable, même pour des pas de temps élevés. Mais cela au prix de la résolution d'un système d'équations pour chaque pas de temps ; linéaire si  $F(\cdot)$  l'est, et non-linéaire sinon. . . Dans le cas linéaire, la méthode du gradient conjugué est particulièrement bien adaptée à la résolution de matrices creuses.

Dans le cas implicite, le schéma devient :

1. Évaluer  $F(t)$  ;
2. Évaluer  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$  ;
3. Construire le système d'équations linéaires creux ;
4. Résoudre ce système pour obtenir  $\Delta \mathbf{v}$  ;
5. et enfin, mettre à jour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$ .

Il existe un grand nombre de méthodes d'intégration. Parmi les méthodes explicites, on compte Euler explicite, Störmer-Verlet/leapfrog, Runge-Kutta, midpoint explicite. . . Et pour les méthodes implicites : Euler implicite, Rosenbrock, midpoint implicite, etc. Il existe également des méthodes d'intégration d'ordre supérieur se servant de plusieurs évaluations afin de calculer des solutions d'ordre supérieur plus précises dans le cas où le pas de temps serait réduit (Runge-Kutta). Et il existe, de la même façon, des méthodes d'intégration d'ordre inférieur qui réduisent le nombre d'évaluations afin de calculer de simples extrapolations d'ordre inférieur, rapides à calculer mais imprécises. Pour plus de détails on se reportera à la thèse de doctorat de F. ZARA ([Zar03]), surtout pour les formulations précises des matrices  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$  qui représentent les variations des forces d'élasticité et de viscosité par rapport à la position et à la vitesse des masses ou des particules, selon la modélisation, et dont le calcul est nécessaire pour les méthodes implicites. On y trouvera aussi les conditions de stabilité de chacune des méthodes.

En conclusion, et en fonction de cette multitude de méthodes d'intégrations numériques, plusieurs critères peuvent être considérés afin d'effectuer un choix pour l'utilisation de telle ou telle méthode (d'après [Zar03]) :

- la taille du problème, c'est-à-dire le nombre d'entités utilisées afin de décrire le système mécanique ;
- la précision souhaitée, reflétant la tolérance numérique autorisée entre la solution calculée et l'évolution théorique du système estimée par rapport au modèle mécanique ;
- le contexte de la simulation, c'est-à-dire si le souhait est d'obtenir une simulation très précise en tenant compte d'un maximum de facteurs mécaniques ou plutôt d'obtenir une simulation plausible ;

- la rigidité du problème engendrée par les interactions entre les entités et la taille des intervalles de temps choisis, pouvant entraîner des problèmes d’instabilité ou de mauvaises précisions numériques ;
- le temps mis pour calculer une itération de la simulation et le nombre de dérivations mécaniques (calcul des forces à partir de la position et de la vitesse) nécessaires à la méthode pour chaque itération ;
- la convergence de la méthode sachant qu’une méthode d’intégration numérique converge si, quand le pas de temps tend vers zéro, les solutions numériques se confondent avec les solutions analytiques ;
- la stabilité du schéma numérique analysée à partir du test de Dahlquist.

## Comparaison des différents modèles

En Informatique Graphique appliquée à la modélisation des organes, les deux méthodes numériques les plus couramment utilisées sont celles des éléments finis et des masses-ressorts. Le choix du modèle est crucial, et dépend souvent des caractéristiques des matériaux que l’on souhaite animer, mais pas seulement, car certains comportements (élastiques ou plastiques par exemple) ne sont pas dépendants du modèle sous-jacent.

La méthode masse-ressort est séduisante pour sa facilité d’implémentation. Elle permet, en outre, la résolution rapide, rendant possible le couplage avec un module haptique. Elle permet également de prendre facilement en compte l’anisotropie et l’hétérogénéité du matériau, en adaptant les coefficients des modèles à la géométrie à simuler. Par contre, la simulation est largement dépendante de la résolution ainsi que de la géométrie sous-jacente. Le système n’est pas forcément convergent, c’est-à-dire que lorsque l’on raffine, la solution calculée ne converge pas vers la solution réelle. En pratique, on choisit aussi souvent les paramètres de raideur de façon arbitraire, et sans réelle liaison avec les caractéristiques du matériau. De plus, il y a souvent couplage entre les différents types de ressort, ainsi les ressorts diagonaux sensés répondre au cisaillement participent aussi à la résistance à l’élongation. De ce fait, les systèmes masses-ressorts sont largement indiqués dans les applications où la réactivité plus que la précision est de mise. Dans leur modélisation classique, ils ne sont pas forcément adaptés aux applications médicales, où l’on a besoin de représenter fidèlement des comportements bio-mécaniques. Comme on le verra par la suite, séduits par la simplicité de ce modèle et donc par son aptitude à être utilisé en per-opératoire, mais frustrés de ne pas pouvoir fournir de résultats suffisamment précis pour guider efficacement les médecins, nous nous sommes attachés à répondre à quelques unes des problématiques soulevées dans ce paragraphe.

La méthode éléments finis (FEM) permet de résoudre le problème mécanique continu, avec comme principal avantage de fournir des résultats avec une grande précision. Cependant, dans le cas de simulation d’opérations chirurgicales complexes, le « temps-réel » reste peu accessible (il existe cependant quelques travaux notables dans ce domaine). Comme nous l’avons présenté, l’organe subit pendant une opération des changements de topologie, c’est le cas pendant la découpe ; ce problème majeur pour la méthode éléments finis a été résolu par la méthode de masses-tenseurs, qui peut être vue comme une restriction locale de la méthode des éléments finis. Ainsi, une combinaison des différentes modélisations peut, dans certains cas, présenter un certain nombre d’intérêts, en tirant parti des avantages de chacun. On pourra en particulier utiliser les éléments finis pour calculer pré-



cisément les déplacements globaux, couplés à un autre modèle (par exemple masse-ressort ou masse-tenseur) qui se chargerait des collisions et des déformations locales.

# Chapitre 2

## Modélisation biomécanique du système respiratoire

Nous menons actuellement plusieurs travaux de recherche dans le domaine en pleine expansion de la modélisation et simulation d'objets volumiques déformables. Le champ d'application des modèles de surface ou de volume d'objets 3D en imagerie médicale est très vaste : cela peut concerner l'acquisition de données à partir d'un patient virtuel, l'analyse d'image guidée par des modèles, le suivi spatio-temporel des organes et de leur évolution, le couplage des modèles avec des systèmes de chirurgie assistée par ordinateur. Il est donc primordial de disposer de modèles performants pour représenter les données 3D. Or, il n'existe pas vraiment de méthode générale et pratique pour la représentation informatisée de ces données. J'ai donc été amené à étudier la représentation de la forme des organes humains et la simulation de leur comportement, en espérant amener des solutions innovantes, en m'attachant à démontrer le bien fondé applicatif de nos résultats. Je poursuis aujourd'hui ces travaux en proposant d'étendre les techniques de modélisation 3D existantes pour permettre la prise en compte des déformations des organes et la mise à jour rapide de leur modèle. La modélisation géométrique, et plus précisément la reconstruction et la simulation 3D basée sur la physique, est l'un des axes de recherche important de l'équipe SAARA-LIRIS à laquelle j'appartiens.

Dans ce chapitre, je présenterai nos activités liées à la modélisation bio-mécanique du système respiratoire. J'y ai regroupé diverses contributions, en m'attachant à retracer l'évolution dans la construction du modèle, à travers différentes représentations. Ainsi, la première section est consacrée à la description de la problématique, et les enjeux au niveau médical que cela implique (§ 2.1). Dans les sections suivantes, je montrerai comment nous avons pu proposer un certain nombre de solutions. En commençant par une première approche (§ 2.2), plutôt cinématique combinant des surfaces implicites et des systèmes de particules. Vient ensuite une étude plus théorique sur la détermination des paramètres physiques pour prendre en compte les caractéristiques des tissus pour un système de particules, et obtenir une simulation plus proche du comportement physiologique des organes (§ 2.3). Cependant, ces modèles restent limités, et l'on s'intéresse ensuite à une formulation basée sur les masses-ressorts (§ 2.4). On établit une correspondance entre les caractéristiques des matériaux (sous la forme module de Young et coefficient de Poisson) et les paramètres de raideur des ressorts. Et cela a été introduit dans le cas 2D avant d'être

étendu au 3D. Dans cette section, nous mettons un accent tout particulier sur la validation des modèles, à travers différentes expérimentations reproduisant les manipulations classiquement faites pour caractériser physiquement un matériau (flexion, indentation, etc.). Enfin, quelque soit le type de modélisation choisi (par exemple, particules ou masses-ressorts), le modèle seul ne suffit généralement pas pour prédire les mouvements sur une longue période, et l'on a besoin de données auxiliaires pour guider la simulation. C'est une proposition de protocole d'acquisition multi-modale qui est présentée au § 2.5.

## 2.1 Problématique de la simulation 3D : application au traitement par rayons ionisants

Avec plus de 900 000 nouveaux cas chaque année chez les hommes et 330 000 chez les femmes, le cancer du poumon est actuellement l'un des cancers les plus répandus dans le monde. La majorité des patients atteints de ce cancer subiront un traitement par radiothérapie conventionnelle. Celui-ci consiste à utiliser des radiations (rayonnement X) pour détruire les cellules cancéreuses en bloquant leur capacité à se multiplier, tout en épargnant les tissus sains périphériques. Pour cela, on utilise des collimateurs multi-feuilles, qui permettent un contrôle précis du rayon sur la forme ionisée. Dans cette technique, la clé du problème est de choisir le nombre adéquat de rayons X, et leurs différents angles de tir, ainsi que leur intensité.

L'hadronthérapie est une nouvelle technologie de traitement qui, au lieu des rayons X, utilise des faisceaux d'ions légers. Ces faisceaux ont, en effet, un profil de dépôt d'énergie en fonction de la matière traversée qui permet de limiter les tissus touchés aux alentours de la tumeur avec un pic de dépôt d'énergie dépendant des ions (H ou C) et de leur vitesse (le pic de Bragg [KHD+83]).

La précision balistique des ions ne peut être pleinement mise à profit que dans la mesure où un contrôle précis et fiable du positionnement des zones cibles et des zones à risques est réalisable, afin de délivrer la dose conformément aux prescriptions du radiothérapeute, en limitant au maximum les marges d'incertitude. L'incertitude due à la différence entre la configuration anatomique de référence du patient (sur laquelle est conçue le plan de traitement) et la réalité lors d'une séance de traitement est probablement l'un des points faibles majeurs de la chaîne de traitement. Un décalage d'installation du patient ou une modification anatomique imprévue, peuvent entraîner un sous-dosage de la zone à irradier et un surdosage des zones voisines. Cela est déjà délicat en radiothérapie conventionnelle, mais est rendu considérablement plus critique en hadronthérapie, du fait de la précision balistique et de l'efficacité attendue. D'autre part, les traitements actuels nécessitent la connaissance précise de la position et de la forme des cibles et des organes, dont on suppose l'immobilité. Il existe cependant de nombreuses sources de mobilité (gravité, vaisseaux...), dont la plus importante est la respiration. Ainsi, les mouvements respiratoires limitent l'acquisition d'images, la création du plan de traitement, et la réalisation des séances de traitement. Ils entraînent des déplacements, des déformations et des modifications de densité. Ceci représente une source supplémentaire d'erreur. Là aussi, ce risque est déjà présent en radiothérapie et est accentué en hadronthérapie.

Cependant, dans toutes les procédures existantes, le patient est supposé immobile et rigide. Pourtant, les formes intérieures et extérieures sont toutes deux déformables,

et sujettes à des forces internes et externes, ces dernières étant plus particulièrement causées par des mouvements rythmiques, comme la respiration, ou à des déplacements, même légers, du patient sur la table d'opération. Ces mouvements non désirés peuvent malheureusement conduire à une exposition insuffisante des organes cancéreux, ou d'une irradiation non désirée, voire dangereuse, des tissus sains. L'utilisation d'appareillages physiques permet quelque peu de limiter ces effets négatifs. Cependant, la contention pour prévenir les mouvements du patient, ou l'utilisation de systèmes laser ou de stéréovision pour suivre les mouvements externes du patient, ont montré leurs limites, malgré quelques développements probants réalisés ces dernières années.

Une solution alternative à ce problème est de créer des modèles géométriques de la forme (externe) du patient, et des volumes (internes) à traiter, puis de corréliser ces deux systèmes dans un même référentiel. L'animation de ces modèles en considérant les mouvements externes et internes du patient (détectés, par exemple, par des capteurs temps réel), couplé à une bonne compréhension de l'anatomie humaine et des degrés de liberté entre les organes, permet de fournir une information pertinente pour l'estimation de l'erreur réalisée pendant le traitement.

Malheureusement, le mouvement respiratoire est complexe et sa prédiction n'est pas une tâche simple. En particulier, la respiration est commandée par l'action indépendante des muscles de la cage thoracique et des muscles du diaphragme. Autrement dit, la respiration ne peut pas être décrite rigoureusement par un seul paramètre (comme la quantité d'air expiré/inspiré, par exemple) et le mouvement observé semble plutôt chaotique. Afin de prendre en compte cette variabilité du mouvement respiratoire, un modèle biomécanique des poumons et son environnement (la plèvre, la cage thoracique, les muscles, la peau ainsi que le diaphragme) a été développé. On cherche alors à piloter le modèle par des paramètres mesurés de manière externe (capteurs 3D, caméras, spiromètre, ...). La majorité des travaux effectués dans ce thème ne sont pas spécifiques à l'hadronthérapie, mais concernent également la radiothérapie classique.

Le choix d'un modèle géométrique approprié est donc critique. Ce dernier doit au moins respecter les deux conditions suivantes :

- prise en compte de formes complexes ;
- simulation possible des altérations de forme basées sur des paramètres physiques ou physiologiques.

## 2.2 Un modèle hybride pour modéliser l'appareil respiratoire

Les surfaces implicites et les systèmes de particules basés sur les lois physiques sont deux des candidats sérieux pour une telle simulation. Les premières permettent de modéliser des formes très complexes à un coût de calcul assez réduit. La prise en compte de petites déformations reste relativement aisée. Ainsi, pour la reconstruction implicite, nous avons introduit une méthode basée sur une surface construite à partir d'un squelette (Fig. 2.2) Les objets peuvent former des boucles, ou encore avoir plusieurs branches. Pour éviter d'avoir à utiliser une fonction de champ lissée, nous avons utilisé une fonction de champ uniforme associée à un squelette pondéré. Aussi, au lieu de calculer le squelette à partir de l'ensemble de points 3D, nous avons déduit celui-ci automatiquement à partir

des sections 2D (issues par exemple de l'imagerie scanner tomographique).

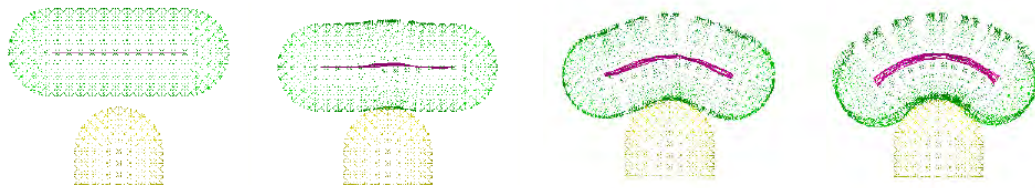


FIGURE 2.1 – Exemple de déformation de surface 3D implicite tombant sur un objet rigide.

Les seconds, les systèmes de particule, sont une technique efficace pour modéliser des comportements plastiques, élastiques, visco-élastiques, ainsi que des fractures. Il est aussi possible d'introduire des contraintes géométriques variées, comme la conservation du volume, pour reproduire encore plus précisément le comportement des tissus cancéreux et des organes sains. Les systèmes de particules ont ainsi servi à modéliser les organes dont la structure n'est pas fixe. Le modèle est très simple, et très intuitif, puisqu'il n'est composé que de particules qui sont dirigées par des forces d'interaction spatiale. Cependant, leur animation requiert de lourds calculs, que nous avons réduits en proposant un système multi-couches permettant de gérer les fractures (Fig. 2.2). Lors de la découpe, il peut

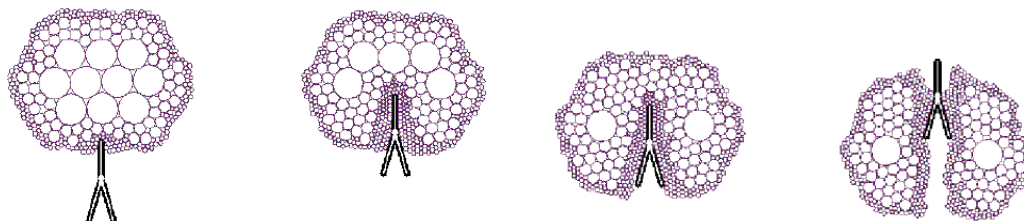


FIGURE 2.2 – Exemple de déformation d'un système de particule multi-couches tombant sur un objet rigide, avec conservation de la structuration.

arriver que l'outil rentre en collision avec les particules d'une couche inférieure. Pour éviter ce problème, la structure est adaptée au cours de la simulation, c'est-à-dire que certaines des particules (masse  $m$ , rayon  $r$ ) d'une couche  $N$  sont subdivisées dynamiquement et remplacées par un ensemble de  $n$  particules ( $m'$ ,  $r'$ ) de la couche  $N + 1$ , en prenant soin de respecter la masse et la dynamique du système global (moment  $MV$  et énergie cinétique  $\frac{1}{2}MV^2$ ) :

$$r' = \frac{r}{n^{\frac{1}{D}}}, \text{ et } m' = \frac{m}{n}$$

avec  $D$  la dimension (2D ou 3D).

Cependant, cela nécessite toujours un temps de calcul important. L'idée est d'utiliser les deux représentations dans une approche hybride : les systèmes de particule peuvent être utilisés pour modéliser les organes qui sont sujets à des déformations importantes, et

les surfaces implicites pour le reste. Cela nous a permis de simuler les interactions entre les organes de manière convaincante. Tous ces algorithmes ont été intégrés dans un logiciel de simulation en 3D. Dans nos expérimentations, les paramètres physiques qui permettent de définir le comportement des organes ont été définis de manière intuitive, estimées en fonction de certaines valeurs de la littérature pour les tissus, notamment le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

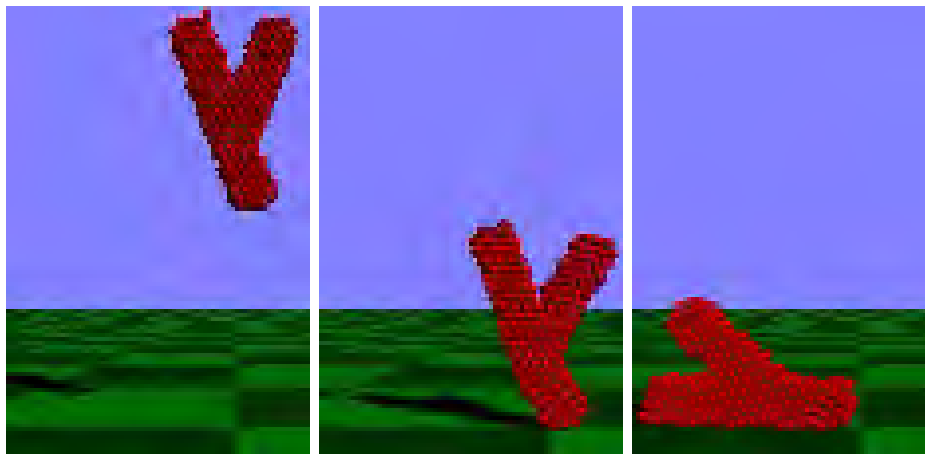


FIGURE 2.3 – Exemple de déformation du modèle hybride, sans mélange indésirable,.

Fort d'une première simulation, nous cherchons maintenant à représenter et animer de manière réaliste des formes anatomiques en interaction. Une difficulté importante dans ce contexte est la détermination des paramètres physiques des divers organes et leur traduction dans notre modèle. Nous avons pu relier quelques valeurs entre-elles, comme nous avons pu le voir dans le paragraphe suivant (§ 2.3).

L'article présenté dans la page suivante fait la synthèse de cette collaboration de toute l'équipe *Modélisation*, sous l'impulsion de B. SHARIAT, avec la participation pendant leur doctorat respectif de S. PONTIER (de 1997 à 2000), puis de M. AMRANI (de 1999 à 2003) [ABJS04]. Cette thématique est la suite directe de mes travaux de thèse.

## Tracking of target motion using physically based modelling of organs

M. Amrani, M. Beuve, F. Jallet, B. Shariat  
{mamrani,mbeuve,fjallet,bshariat}@liris.univ-lyon1.fr  
LIRIS, CNRS FRE 2672  
Université Lyon 1 - 8 bd Niels Bohr  
69622 VILLEURBANNE Cedex - France

### Abstract

In this paper, we describe a general methodology for the realistic reconstruction and animation of anatomic organs. In fact, in the scope of conformal radiotherapy and hadron therapy applications, we want to simulate the motion and the shape alteration of the internal anatomical objects and to input this knowledge to treatment planning.

For the reconstruction, particle systems are used: firstly, surface shape of the considered organ is computed from a set of CT scan sections. Next, the volume defined by this surface is filled with particles. The coherency of the object is maintained due to the use of the classical Lennard-Jones inter particles force.

This work permits to study the impact of the organs movement on the treatment of prostate and lung cancer. Our particle system has been suitably integrated in a radiation dose evaluation software, developed within an European BIOMED2 project and is currently supported by the French ETOILE project.

**Key words:** Organs modelling, physical simulation, radio and hadron therapy

### 1 Introduction

It is possible at present to deliver lethal dose up to 70 to 80 Gy, but there is a risk for healthy tissues. Thus, security margins have to be strictly defined in order to take into account movements during irradiation, such as breathing for example. Unfortunately, the amplitude of the movement is not uniform in the whole parenchyma, and is not predictable yet. Thus, currently, an up to 2 cm margin is applied to some lesions in an isotropic way, raising considerably the volume to be irradiated at high rate. This inevitably limits the dose that can be delivered to the tumour.

The systematic use of the 3D dosimetric scan allows to refine and diminish the "uncertainty" parameters and then to determine more precisely the dose distribution in the tumour and its neighbouring healthy tissues. It also permits to compute the volume of an organ or a lesion included in a given irradiation volume more precisely. However, the gain obtained by a more precise definition of the target volume will not prevent the irradiation of the healthy tissues. Indeed, the portion of the irradiated healthy tissue is related to the mobility of the concerned organ, and consequences can be more or less serious, depending on the organ to be treated (acceptable in the pelvis area, important in case of a pulmonary cancer, especially for precarious ventilation). Moreover, the amplitude of the movement of the tumour depends on its location according to the organ. The irradiation of healthy tissues may cause severe complications. For example, in the case of the lung tumour, some studies show that there is a direct relationship between the irradiation of healthy volumes at 30 Gy and the degradation of breathing functions.

The goal of our work is to reduce significantly the irradiation of healthy tissues. This necessitates to use an "adaptive" treatment planning. This means that we introduce knowledge on the patterns of the patient's movement during the previous irradiation session into the next treatment planning. For this, it is required to record the necessary motion parameters for each treatment session, provided by multimodal sensors. These parameters will then be input to the patient's geometrical and physiological models from which a dynamic dosimetric calculation is performed. This helps the adaptation of the treatment planning for the next session. Such a study can equally help the gated radio and hadron therapy. Indeed, in the case of lung tumours, one can determine the moment in the breathing cycle for which the ratio of the irradiation of "cancerous tissue/ healthy tissue" is optimal, for a high dose therapy.

To achieve this goal, the following tasks should be carried out:

- (1) Multi-modality delineation of target volumes as well as their neighbouring volumes
- (2) Extraction of patient's organs physiological data
- (3) Physically based modelling of concerned organs
- (4) Simulation of the patient's deformable model
- (5) New dosimetric computations

### 2 State of the art

The work reported in this paper concerns the tasks 3 and 4. Few works have been presented in the literature permitting the global achievement of these tasks.

Some approaches permit the reconstruction of complex shapes and the computation of some deformations, mostly based on superquadric or more generally on implicit surfaces. These purely geometric methods can be used for computing visually acceptable deformations. Nevertheless, they are not sufficient for the simulation of the organs behaviour, which needs to be physically realistic. In the real world, objects movements and deformations obey to physical laws. Physicists have widely studied these laws, and many mathematical formalisms have been proposed. Thus, and with the continuous increasing of computers power, some models based on these equations have been developed.

Many are based on the famous finite element approach, which consists in solving the physical constraints in smaller domains. In practice, this is achieved by meshing the modelled object, and then solving the equations on each mesh node. However, the size of the mesh could be large, and this approach generally requires important computing time. Although some approaches have been proposed [1,2] that significantly reduce the computing time needed for the finite element approach, they only allow the simulation of small deformations. The idea of using a mesh, or in a more general way a sampling of the object, is widely used to define physical models which will allow a large range of deformations. In the mass-spring model, the object mass is distributed on the mesh nodes. Then, the nodes are linked by springs. Extending this approach, Meseure and Chaillou [3], and later Amrani [4], successfully handled the simulation of dynamic behaviours of human organs.

Particle systems can be considered as a generalisation of the mass-spring approach. In this model, the neighbourhood relationship between particles, which was represented by a network of springs, is no more static, and thus, a particle can interact with all other particles. However, to reduce computing

time, the number of neighbours has to be small, and this can be achieved by reducing the action range of the interaction forces. Miller et Pearce [5] proposed a general interaction law between two particles, allowing them to simulate various behaviours from liquid to deformable solid. In [6], Lombardo and Puech extend this model to simulate muscles behaviours.

### 3 Particle systems and deformable object modelling

#### 3.1 Definitions

Particle systems consist of a set of solid spheres whose movement follows physical laws. For deformable objects modelling, this simple model has been improved by the introduction of internal forces between particles to preserve the cohesion of the object. Tonnesen [7] introduced a potential energy function (Lennard-Jones potential) in computer graphics applications. The corresponding forces have two terms: a short range repulsion to prevent particles to overlap; a long range attraction to ensure compactness and cohesion. Moreover, the potential energies are conservative, the particle system may oscillate. Thus damping forces are introduced to prevent system instability. The interaction of a particle system with its environment is represented by external forces (gravity, collisions, etc.).

Lennard-Jones potential is often used to model atoms interactions. Generally, this potential is given by the following equation:

$$\Phi(r) = \frac{A}{r^n} - \frac{B}{r^m} \quad (1)$$

where A and B are constants. If the equilibrium distance is set to  $r_0$  and the potential value at  $r_0$  to  $\Phi(r_0) = \epsilon$ , we can rewrite Lennard-Jones formula as

$$\Phi(r) = \frac{\epsilon}{m-n} \left( m \left( \frac{r_0}{r} \right)^n - n \left( \frac{r_0}{r} \right)^m \right) \quad (2)$$

which is the same as the previous one when taking

$$A = \frac{\epsilon m r_0^n}{m-n} \text{ and } B = \frac{\epsilon n r_0^m}{m-n}.$$

The derivative force from this potential is:

$$\vec{f}(r) = -\overrightarrow{grad}(\Phi(r)) \quad (3)$$

In eq. 2, it is clear that  $n$  controls the repulsive part of the potential ( $r < r_0$ ), when  $m$  deals with the other part. Thus, the deformability of the modelled object can be controlled (Fig. 1).

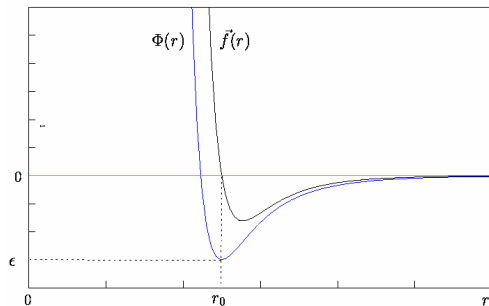


Fig. 1. Lennard-Jones potential and force

#### 3.2 Object reconstruction

Our goal is to obtain a sampling of a volume defined by a closed surface. This surface can be of any type and any topology. The principle of our method presented in [8] is to fill the inner volume with a set of particles. The reconstruction process can be divided in several steps. The first one is the initialisation of particles inside the boundaries. They will act as seeds to create new particles that will progressively fill the whole object. Particles evolve until a stable state which is a minimal energy configuration is reached. Thus, we easily obtain a regular spatial sampling which corresponds to a maximal filling. The algorithm 1 summarises our reconstruction method.

#### Algorithm 1

```

Initial particles creation
repeat for all particles
(1) collisions detection with the object boundaries
(2) internal and external forces computation
(3) computing velocities using physical law
(4) let particles evolve to a stable state
(5) create new particles around the existing ones
until object volume is filled up

```

If we want to increase the precision of the resulting model, we need to decrease the radius of the particles thus dramatically increasing the number of particles. To solve this problem, we have developed a multi-layer model. The key idea is to place small particles where details are required and big ones elsewhere:

- the centre is composed of particles of large radius. They act as the core of the object.
- the centre is surrounded by one or more layers with decreasing radius as we get closer to the boundaries.

The coherency of each layer is preserved by virtual separations between layers. Then, the reconstruction process can be repeated for each layer [8], as shown on figure 2.

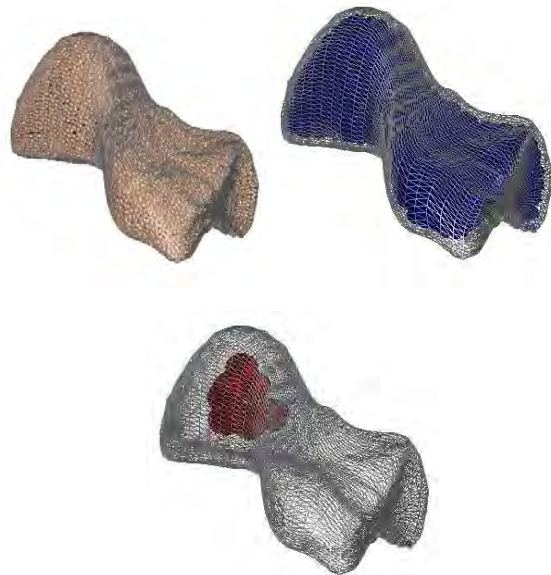


Fig. 2. Prostate reconstruction with a multi layers particle system



### 3.3 Animation and deformation of particle systems

The particles are subject to external and internal physical forces that induce their movement. Thus, these forces will determine the particles displacement, and, by extension, the shape alteration of the modelled object.

One of the important points that should be handled to obtain a more realistic behaviour is the control of the volume during the deformation. Since the particle system is a sampling of the initial object, it gives an immediate approximation of the volume. And thus, the volume is naturally preserved. In some other applications, we may be asked to change the volume. This is the case for example during simulation of some organs like lungs during breathing, or bladder. For a particle, if we change the radius from  $R$  to  $R'$ , its volume is modified consequently, and therefore the volume of the whole object changes. Of course, the same approach can be extended for either decreasing or increasing the volume.

## 4 Medical application

The developed tools have been used within the framework of cancer treatment by conformational radiotherapy in a close collaboration with medical partners from the Christie hospital of Manchester (UK) and the medical department of the university of Magdeburg (D). We used our model to produce simulations of two types of organs: the bladder-prostate-rectum and the lungs. The following sections show some examples of our results. Ongoing work is held within the ETOILE<sup>1</sup> project.

### 4.1 Bladder-prostate-rectum simulation

As we can see on the modelling (Fig. 3), bladder, prostate and rectum are in contact. Figure 4 shows three steps of the simulation of the bladder, prostate, rectum interactions. In this simulation, the volume of the top bladder increases by a factor of 3 during its filling. The prostate is consequently pushed down onto the rectum whose movements are also constrained by the surrounding bones.

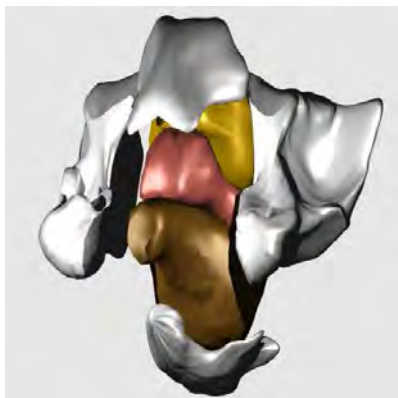


Fig. 3. Bladder (yellow)-prostate(red)-rectum (brown) modelling within the bony pelvis as viewed from caudal

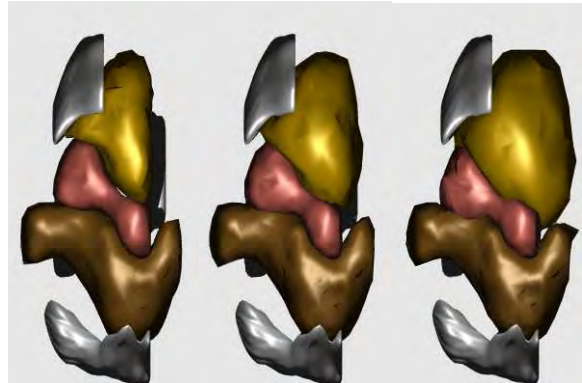


Fig. 4. Bladder, prostate, rectum interactions simulation as bladder volume increases.

### 4.2 Lungs simulation

Our model has also been used to simulate the deformable behaviour of the lungs during the breathing process. On figure 5, the lungs which are surrounded by the thorax, interact with the heart, the mediastinum, the spinal cord and the diaphragm. During breathing, the lungs are also constrained by the ribs, and other bones such as the scapula. These constraints have been integrated into our model by imposing the back and upper parts of the body shape to remain static. Figure 6 shows a simulation of the breathing process.



Fig. 5. Model of lungs, heart, spine, mediastinum and thorax

## 5 Conclusions

In this paper, we have presented a new modelling technique of deformable organs based on a multi layer particle system. These models are able to simulate different organs behaviours from solid to fluid state. Moreover, the use of particle systems will avoid the difficult problem calculating collision forces and contact surfaces between objects. Within an ongoing project, the proposed modelling technique is actually integrated in a global treatment system for clinical validation.

<sup>1</sup> Espace de Traitement Oncologique par Ions Légers, <http://ETOILE.univ-lyon1.fr>

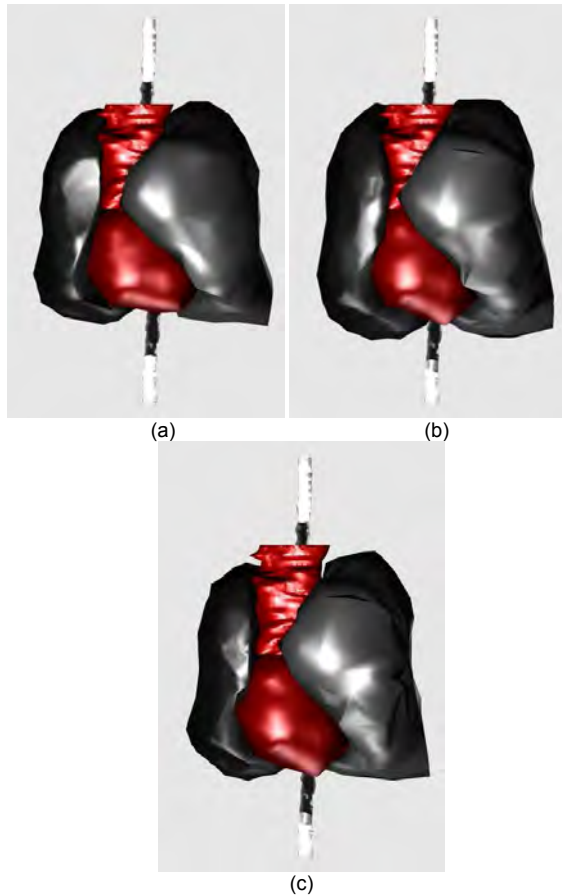


Fig. 6. Breathing simulation showing lung deformation between relaxation (a), inspiration (b) and expiration (c)

We are currently investigating obtaining individualised patient data from different modalities. The lung compliance can be defined as the measured lung volume variation rate according to the pressure variation. It gives information on stiffness and extensibility of the lung tissues. It is thus an essential parameter to be integrated in our model. So, it is possible to measure local elasticities with the help of imagery techniques. For this, four series of CT-Scan are necessary. The scan acquired in spontaneous ventilation corresponds to the present practice. The three other scans acquired at blocked positions according to a validated research protocol will permit to determine whether the irradiation with contention is more adapted compared to the one in spontaneous ventilation. This study can also permit to determinate more precisely the correlation between lungs filling and thorax deformation with other techniques like external sensors (camera) and to use this information to estimate the internal volume and pressure variation. The model can also be coupled with on-line imagery modalities. This will permit to provide warnings when the position of the targeted organ deviates from the expected one.

## References

- [1] M. Bro-Nielsen, S. Cotin, Real time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation, *Computer Graphics Forum* 15 (3) (1996) 57–66.
- [2] G. Debonne, M. Desbrun, M. Cani, A. H. Barr, Dynamic real-time deformations using space and time adaptive sampling, in: *Computer Graphics Proceedings, 2001, proceedings of ACM SIGGRAPH'01*.
- [3] P. Meseure, C. Chaillou, Deformable body simulation with adaptive subdivision and cuttings, in: *5th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualization WSCG'97, Plzen, CZ, 1997*, pp. 361–370.
- [4] M. Amrani, F. Jaillet, M. Melkemi, B. Shariat, Simulation of deformable organs with a hybrid approach, *Revue Internationale de CFAO et d'Informatique graphique* 16 (2001) 213–242.
- [5] G. Miller, A. Pearce, Globular dynamics: A connected particle system for animating viscous fluids, *Computers and Graphics* 13 (3) (1989) 305–309.
- [6] J. Lombardo, C. Puech, Oriented particles: A tool for shape memory objects modeling, in: *Graphics Interface'95, Quebec City (CAN), 1995*.
- [7] D. Tonnesen, Spatially coupled particle systems, in: *ACM SIGGRAPH'92 Courses Notes: Particles system modeling, animation and physically based techniques, 1992*, pp. 4.2–4.21.
- [8] F. Jaillet, B. Shariat, D. Vandorpe, Deformable object reconstruction with particle systems, *Computers & Graphics* 22 (2-3) (1998) 189–194.

## 2.3 Une formulation physique des systèmes de particules

Un objet déformable peut être caractérisé par différentes constantes d'élasticité. Une d'entre elles est le module de Young, qui peut être mesuré en étirant le matériau. Cette expérience consiste à appliquer une force  $\mathbf{F}$  selon d'un axe, et de mesurer l'élongation correspondante, ainsi que son rétrécissement. De plus, en petites déformations, le module de Young  $E$  définit l'élasticité comme le rapport entre la contrainte appliquée et la réponse obtenue. La figure 2.4 présente cette expérience, ainsi que les notations employées. Le module de Young s'écrit alors :

$$E = \frac{F/A}{\Delta h/h}. \quad (2.1)$$

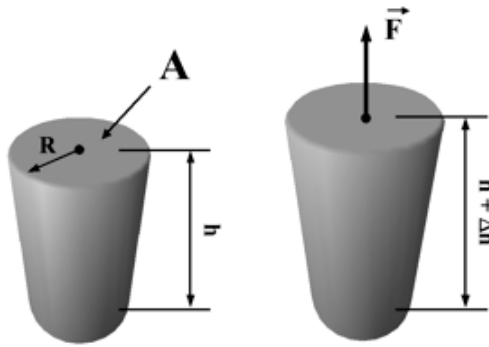


FIGURE 2.4 – Expérience d'étirement sur un objet déformable. Une force  $\mathbf{F}$  est appliquée sur le matériau de surface  $A$ , engendrant une extension  $\Delta h$  de la longueur initiale  $h$ .

Nous allons maintenant montrer comment il est possible de lier le module de Young  $E$  aux différents paramètres de la force de Lennard-Jones ( $a, b, m$  and  $n$ ). Nous présentons l'étude en commençant par le cas le plus simple, *ie.* pour un système composé de 2 particules ( $N = 2$ ). Ensuite, le cas ( $N = \infty$ ) est traité, pour finir avec une généralisation à un système à  $2 < N < \infty$  particules.

### Avec 2 particules

La force d'interaction entre 2 particules se déduit du potentiel de Lennard-Jones, qui peut se reformuler ainsi :

$$\begin{aligned} F_{LJ}(r) &= \frac{a \cdot m}{r^{m+1}} - \frac{b \cdot n}{r^{n+1}} \\ &= \frac{\left( \frac{\Phi_{LJ}(r_0) \cdot r_0^m}{1 - (m/n)} \right) \cdot m}{r^{m+1}} - \frac{\left( \frac{\Phi_{LJ}(r_0) \cdot r_0^n}{(n/m) - 1} \right) \cdot n}{r^{n+1}} \\ &= -\frac{m \cdot n}{m - n} \Phi_{LJ}(r_0) \left[ \frac{r_0^m}{r^{m+1}} - \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nous considérons que ces 2 particules sont intégrées dans un cylindre de hauteur  $h = r_0$  et de section  $A$ . Pour obtenir une meilleure approximation, on approche la section par un hexagone, et donc  $A \approx \frac{1}{2} \sqrt{3} r_0^2$ . Dans cette simulation, la modification relative de la hauteur  $\epsilon(h)$ , correspond exactement à la distance entre les particules :  $\epsilon(h) = \Delta h/h = \Delta h/r_0$ . De plus,  $r$  est la distance entre les centres des particules  $r = h + \Delta h = r_0(1 + \epsilon(h))$ . On en déduit la force :

$$F_{LJ}(r) = -\frac{m \cdot n}{m - n} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon(h))^{m+1}} - \frac{1}{(1 + \epsilon(h))^{n+1}} \right].$$

En reportant dans l'équation (2.1) :

$$E(\epsilon(h)) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \frac{m \cdot n}{m - n} \frac{1}{\epsilon(h)} \left[ \frac{1}{(\epsilon(h) + 1)^{m+1}} - \frac{1}{(\epsilon(h) + 1)^{n+1}} \right]. \quad (2.3)$$

Ce module de Young n'est pas constant mais dépend de la variation relative de la hauteur  $\epsilon(h)$ . Comme cette formulation n'est de toutes façons valable qu'en petites déformations, on peut regarder la limite quand  $\epsilon(h)$  tend vers 0 :

$$\lim_{\epsilon(h) \rightarrow 0} E(\epsilon(h)) = \lim_{\epsilon(h) \rightarrow 0} -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \frac{m \cdot n}{m - n} \frac{1}{\epsilon(h)} B(\epsilon(h))$$

$$\text{avec } B(\epsilon(h)) = \left[ \frac{1}{(\epsilon(h) + 1)^{m+1}} - \frac{1}{(\epsilon(h) + 1)^{n+1}} \right].$$

Par un développement en série limitée de  $B(\epsilon(h))$ , on obtient :

$$\begin{aligned} B(\epsilon(h)) &= [1 - (m + 1) \epsilon(h)] - [1 - (n + 1) \epsilon(h)] + o(\epsilon(h)) \\ &= -(m - n) \epsilon(h) + o(\epsilon(h)). \end{aligned}$$

On peut donc en déduire la limite pour  $\epsilon(h) \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\epsilon(h) \rightarrow 0} E(\epsilon(h)) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \cdot m \cdot n. \quad (2.4)$$

Sur la figure 2.5, on peut voir quelques simulations pour  $N = 2$ ,  $m = 12$  and  $n = 6$ . On montre le module de Young en fonction de  $r_0$  (à gauche) ou de  $\Phi_{LJ}(r_0)$  (à droite). On observe un comportement conforme à l'équation (2.4).

## Un système infini

Il est possible d'étendre ce résultat au cas d'un arrangement compact multi-couches de hauteur  $h$ , mais de largeur infinie, voir figure 2.6. Dans ce cas, les paires de particules ne sont plus forcément à une distance  $r_0$  l'une de l'autre, on introduit donc cela à travers le paramètre  $c$ . Et l'on peut réécrire l'équation (2.2) entre 2 particules :

$$F_{LJ}(r) = -\frac{m \cdot n}{m - n} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0} \left[ \frac{1}{c^{m+1}(1 + \epsilon(h))^{m+1}} - \frac{1}{c^{n+1}(1 + \epsilon(h))^{n+1}} \right]. \quad (2.5)$$

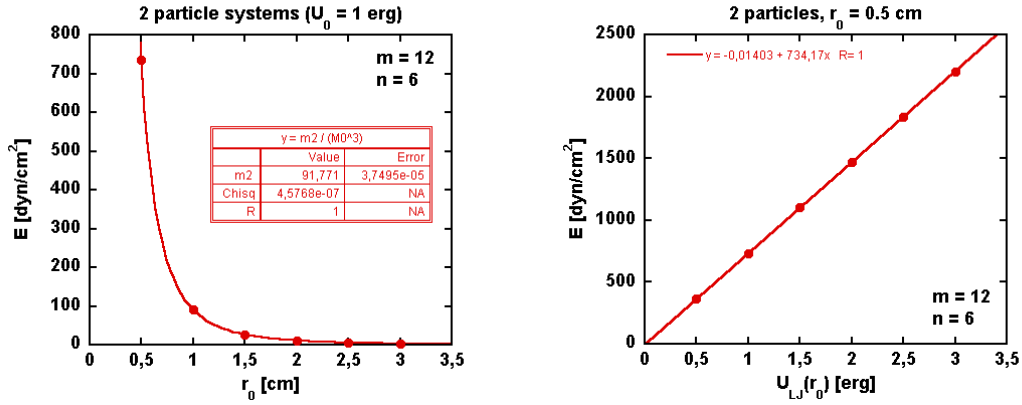


FIGURE 2.5 – Module de Young selon a)  $r_0$  avec  $\Phi_{LJ}(r_0) = 1$  ou b)  $\Phi_{LJ}(r_0)$  (et  $r_0 = 0.5$ ) pour un système à  $N = 2$  particules,  $m = 12$ ,  $n = 6$ .

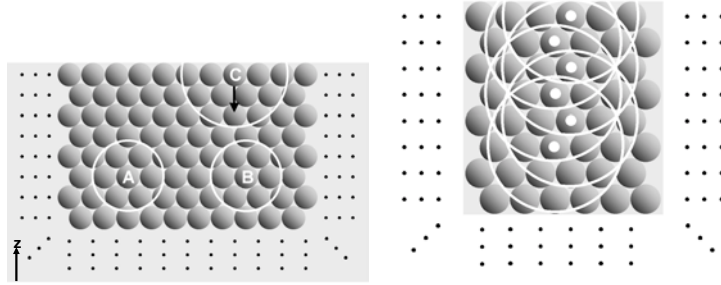


FIGURE 2.6 – Arrangement infini de type Hexaédral Face Centrée.

Comme dans le cas  $N = 2$ , on peut considérer la limite de cette force pour  $\epsilon(h) \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\epsilon(h) \rightarrow 0} F_{LJ}(r) = -\frac{m \cdot n}{m - n} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0} B'(\epsilon(h)),$$

$$\text{avec } B'(\epsilon(h)) = \left[ \frac{1}{c^{m+1}(\epsilon(h) + 1)^{m+1}} - \frac{1}{c^{n+1}(\epsilon(h) + 1)^{n+1}} \right].$$

De la même façon, en considérant le développement en série limitée de  $B'(\epsilon(h))$ , on arrive à :

$$\lim_{\epsilon(h) \rightarrow 0} F_{LJ}(r) = -\frac{m \cdot n}{m - n} \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0} \left[ \left[ \frac{1}{c^{m+1}} - \frac{1}{c^{n+1}} \right] - \epsilon(h) \left[ \frac{m+1}{c^{m+1}} - \frac{n+1}{c^{n+1}} \right] \right],$$

Enfin, en reportant  $E$ , on obtient :

$$E(\epsilon(h) \rightarrow 0) = \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \cdot m \cdot n \cdot f(m, n, r_0, \Phi_{LJ}(r_0)). \quad (2.6)$$

Et l'on montre que le module de Young est fonction des paramètres de la formulation de Lennard-Jones. L'expérience nous montre que  $f$  ne dépend pas de  $\Phi_{LJ}(r_0)$  (à gauche) ni de  $r_0$  (à droite), mais seulement de  $m$  et  $n$ . Ainsi, l'équation (2.6) devient :

$$E(\epsilon(h) \rightarrow 0) = \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \cdot m \cdot n \cdot f'(m, n) \quad (2.7)$$

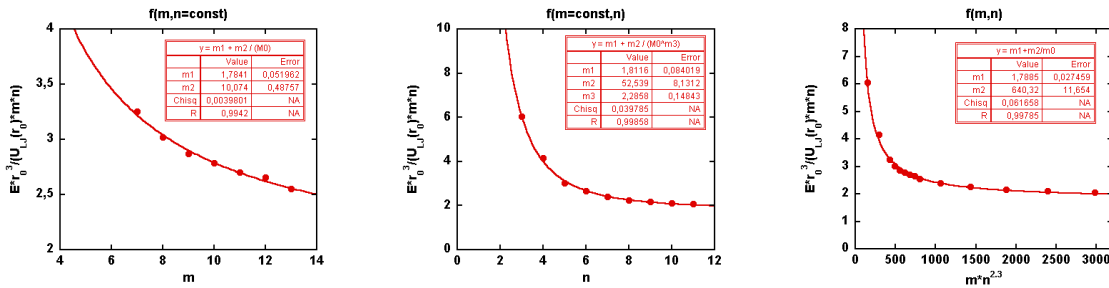


FIGURE 2.7 –  $f'(m, n)$  en fonction de a)  $m$  (eth  $n$  fixé), b)  $n$  (et  $m$  fixé) et c)  $m$  et  $n^{2.3}$ .

En faisant varier systématiquement tous les paramètres, il est possible de déterminer des valeurs de *fit* pour  $f'(m, n)$  d'après l'équation (2.7) (figure 2.7) :

$$f'(m, n) = (1.79 \pm 0.03) + \frac{640 \pm 12}{m \cdot n^{2.3 \pm 0.1}}. \quad (2.8)$$

Ce qui donne bien l'expression de  $E$  en fonction des paramètres  $m$  et  $n$  d'un système infini.

## Cas général

On considère maintenant un système de  $2 < N < \infty$  particules. La figure 2.8 présente le rapport  $E/E_{inf}$  en fonction du rapport  $R/r_0$ . On peut alors écrire :

$$E(\epsilon(h) \rightarrow 0) = \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \cdot m \cdot n \cdot f(m, n) \cdot g\left(\frac{R}{r_0}\right)$$

On suppose que la fonction  $g(R/r_0)$  que l'on vient d'introduire est du type fonction de Poisson. Et en *fittant* cette fonction  $g$  :

$$g\left(\frac{R}{r_0}\right) = 1 - \exp\left(k_1 \cdot \left(\frac{R}{r_0}\right)^{k_2}\right) \quad (2.9)$$

avec les données de simulation avec des cylindres selon une disposition amorphe, on obtient :

$$E(\epsilon(h) \rightarrow 0) = \frac{\Phi_{LJ}(r_0)}{r_0^3} \cdot m \cdot n \cdot f(m, n) \cdot g\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad (2.10)$$

$$f(m, n) = (1.79 \pm 0.03) + \frac{640 \pm 12}{m \cdot n^{2.3 \pm 0.1}}$$

$$g\left(\frac{R}{r_0}\right) = 1 - \exp\left((0.208 \pm 0.003) \cdot \left(\frac{R}{r_0}\right)\right)$$

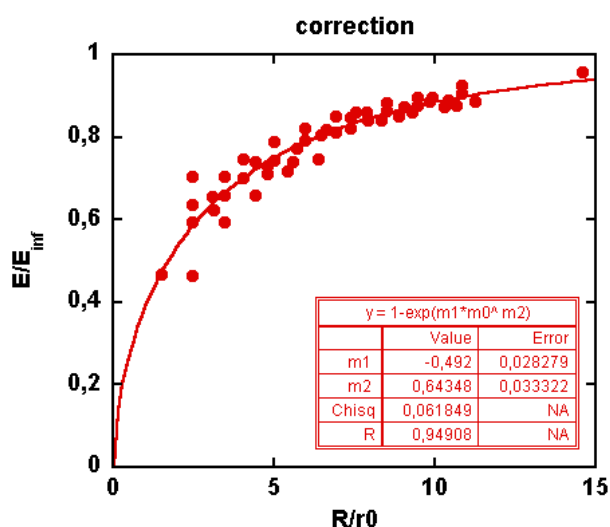


FIGURE 2.8 – Rapport entre le module de Young et sa limite, en fonction de  $R/r_0$  pour  $2 < N < \infty$  particules,  $m = 12$ ,  $n = 6$ .

## Contribution sur la détermination de $E$ pour les systèmes de particules

Nous avons ainsi réussi à déduire une relation (certes expérimentale, mais néanmoins assez précise) entre le module de Young et le potentiel de Lennard-Jones dans le cadre d'un système de particules. Cependant, et même si cela n'a pas été pointé dans les paragraphes précédents, le module de Young reste dépendant de la forme de l'objet quand le nombre de particules est trop réduit. Et donc, pour un objet irrégulier,  $E$  peut être artificiellement local, et décroître si les caractéristiques de forme sont trop petites comparées à la taille des particules.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du postdoctorat de C. MÜLLER, en interaction avec tout le groupe *Simulation* de l'équipe SAARA (B. SHARIAT, M. BEUVE, F. ZARA pour ne citer que les permanents). Et si les résultats semblent intéressants, il reste encore à intégrer ceci dans le modèle plus global de la simulation de la respiration, si cela s'avère pertinent, ou considérer d'autres objets déformables, dont le comportement serait plus favorable à ce type de modélisation. Et si j'ai souhaité l'inclure dans cette synthèse, c'est aussi pour montrer que la ligne directrice de mes travaux reste l'intégration des caractéristiques physiologiques dans la modélisation géométrique.

## 2.4 Modéliser les objets déformables avec des Masses-Ressorts

À la suite des premiers travaux dans le domaine du médical, où l'on cherche à reproduire des comportements physiologiques, il apparaît que le modèle hybride basé sur les

systèmes de particules ne permet pas la prise en compte précise des déformations externes du patient, ou des interactions internes entre les organes. Le besoin d'intégrer dans notre simulation des paramètres physiologiques, ainsi que des lois bio-mécaniques, se fait alors sentir. Ce que nous sommes bien en peine de réaliser avec les surfaces implicites. Par ailleurs, même si les systèmes de particules permettent ce genre de comportement, comme on l'a vu précédemment, ils ne sont pas capables de modéliser tous les organes avec la même efficacité.

On se trouve donc confronté à choisir un nouveau modèle qui réponde à tous ces critères. Et, de formation en Informatique Graphique, le système masses-ressorts (qui est un cas particulier des systèmes de particule) nous paraissait le candidat idéal, à l'époque ; surtout au regard des travaux existants, notamment ceux de Van Gelder qui semblaient très prometteurs [Van98a].

### Avec des quadrangles ?

Les modèles masses-ressorts sont dérivés de la théorie unidimensionnelle de l'élasticité (variation de la longueur), ils nécessitent une adaptation pour être reliés au cas bidimensionnel.

Comme évoqué précédemment, VanGelder [Van98a] a proposé une formulation pour la raideur des ressorts d'une membrane élastique. Il propose une généralisation de la raideur d'une arête  $c$  en fonction du Module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

$$k_c = \sum_{i=1}^n \frac{E}{1+\nu} \frac{|T_i|}{c^2} + \frac{E \nu}{1-\nu^2} \frac{a_i^2 + b_i^2 - c^2}{8 |T_i|}, \quad (2.11)$$

où ( $a_i$ ,  $b_i$  et  $c$ ) représentent les longueurs des arêtes des triangles voisins  $T_i$ , et  $|T_i|$  leur aire. Nous avons démontré que cette formulation, largement reprise dans la littérature, ne permettait pas de reproduire le comportement correct d'une membrane (sauf pour  $\nu = 0$ !). Ce résultat n'a pas manqué d'être remarqué par la communauté [Del08].

À partir de ce constat, nous proposons une nouvelle technique, basée sur des quadrangles qui intègre parfaitement les paramètres physiques classiques (Module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ). Nous montrons que les seules forces internes aux ressorts ne suffisent pas, et nous en déduisons que, pour des raisons évidentes de stabilité à l'équilibre et de symétrie, il apparaît que l'élément le plus simple permettant de satisfaire toutes les contraintes est celui présenté sur la figure 2.9.

L'étape suivante est la détermination de la masse et des coefficients de raideur des ressorts. Nous nous basons pour cela sur une étude théorique très complète à partir de la formulation Lagrangienne du système à résoudre, ce qui présente l'originalité de notre approche. En nous appuyant sur des expériences simples de tension, torsion, flexion, etc., nous proposons des valeurs pour les ressorts diagonaux :

$$k_d = \frac{E (l_0^2 + h_0^2)}{4 l_0 h_0 (1 + \nu)}$$

et latéraux :

$$k_i = \frac{E (j^2 (3 \nu + 2) - i^2)}{4 l_0 h_0 (1 + \nu)}, \text{ avec } (i, j) \in \{l_0, h_0\}^2$$



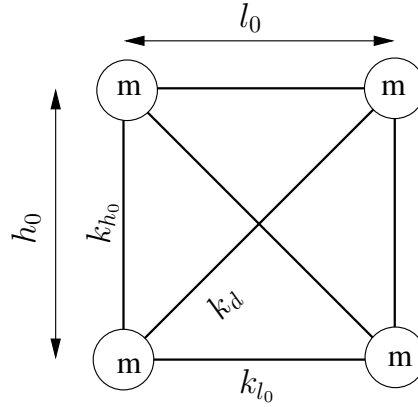


FIGURE 2.9 – Élément 2D de base : un quadrangle composé de 4 masses  $m$  et 3 paires de ressorts  $k_{l_0}$ ,  $k_{h_0}$  et  $k_d$ .

On remarque que la formulation est symétrique pour les ressorts verticaux et horizontaux, et surtout qu'elle dépend bien de  $E$  et  $\nu$ .

Pourtant, cette solution seule n'est pas satisfaisante, car la compressibilité est très mal prise en compte. On reprend donc la même étude, mais cette fois en intégrant des forces orthogonales de rappel (qui satisfont le principe d'action/réaction [Fey64]), sans lesquelles le modèle serait loin d'être correct :

$$F_{\perp i} = \frac{j F_i (1 - \nu)}{8i}, \text{ où } (i, j) \in \{l_0, h_0\}^2.$$

Pour aller plus loin, nous montrons aussi comment assembler ces briques élémentaires pour raffiner le maillage géométrique, tout en conservant le même comportement pour l'objet global. Cette fois, le modèle réagit bien à toutes les altérations qu'il subit, et surtout, il n'est pas restreint à des valeurs de  $\nu$  proches de  $1/3$ , comme dans la plupart des autres approches existantes. Nous avons effectué un certain nombre de mesures pour le valider. On trouvera, figure 2.10, le test de la barre sous l'action de la gravité, qui permet de mettre en valeur le comportement du modèle, puisqu'il permet de vérifier à la fois la bonne répartition de la masse et la réponse en « grands déplacements » (qui est un problème identifié pour les éléments finis lorsque l'on considère une loi linéaire).

L'article présenté page 42, issu du travail de thèse de V. Baudet, présente de façon plus détaillée ces résultats forts en 2D.

## Extension aux objets 3D hexaédriques

Le travail présenté dans le paragraphe précédent en 2D, a bien sûr été étendu en 3D. Nous avons employé plus ou moins la même technique, mais comme chacun ne le sait que trop bien, le passage du bi- au tridimensionnel n'est jamais trivial. En effet, si le cas du Module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  peuvent être définis aisément dans le cas d'une barre  $l_0 \times h_0 \times k_0$  au repos :

$$\nu = \frac{2\delta/l_0}{\eta/h_0}, \quad E = \frac{F/l_0}{\eta/h_0}. \quad (2.12)$$

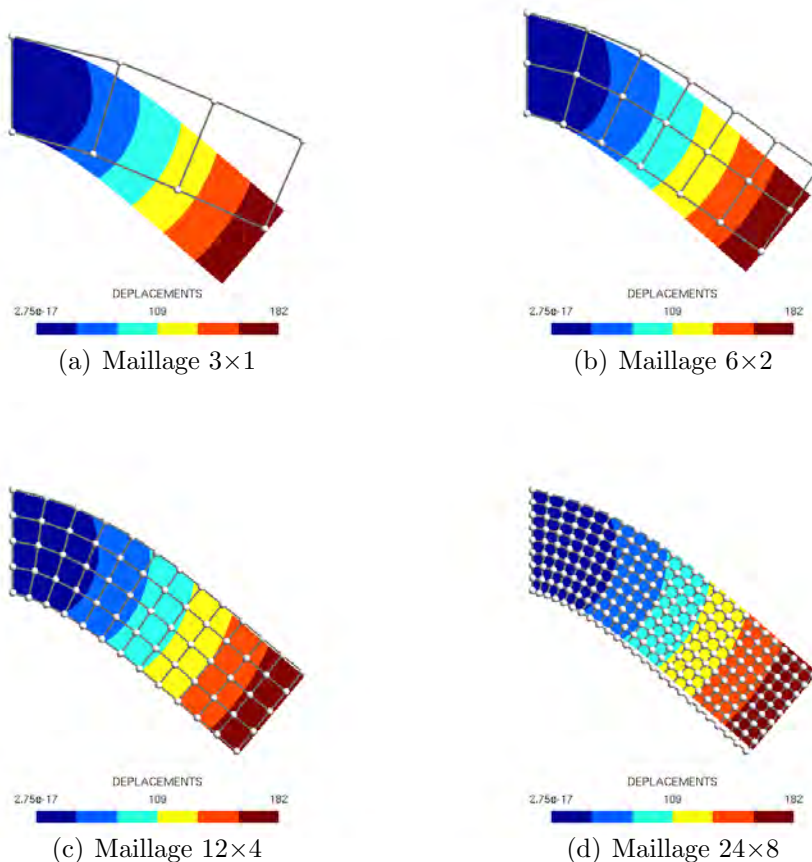


FIGURE 2.10 – Superposition de la solution *référence* (MEF, en dégradé de couleurs) avec notre solution à différentes résolutions de de maillages).

En 3D, il est aussi nécessaire de vérifier que le cisaillement est bien respecté, avec une réponse à un effort latéral, ou angulaire :

$$G = \frac{\tan(\theta) \times F}{l_0} \simeq \frac{\theta \times F}{l_0} \text{ pour } \theta \rightarrow 0.$$

Pour un matériau élastique, isotropique et homogène, il est lié aux deux précédents paramètres par l'équation suivante :  $E = 2G(1 + \nu)$ .

On se retrouve donc avec une dimension supplémentaire, et une contrainte complémentaire à respecter. Pour déterminer les coefficients des ressorts, on suit le schéma [Bau06] :

1. pour chaque expérience (traction, torsion, flexion, etc.), nous écrivons les équations de Lagrange (somme des énergies potentielles du système) ;
2. nous appliquons le principe de l'énergie minimum pour arriver aux équations de Newton ;
3. nous remplaçons par la définition de chaque caractéristique physique, pour construire un ensemble d'équations qui lient les paramètres physiques aux coefficients des ressorts ;

4. enfin, nous résolvons le système.

Cela nous permet assez rapidement de définir la configuration optimale requise pour pouvoir reproduire correctement un comportement se basant sur les lois physiques. En effet, pour un hexaèdre, si l'on introduit toutes les diagonales internes ainsi que celles des faces, cela rigidifie trop l'élément. Et au contraire, si on se contente des arêtes, l'élément sera en équilibre instable. On en déduit alors assez intuitivement que des ressorts sur les arêtes ainsi que sur les diagonales internes sont suffisants, et nous le démontrons par la théorie.

Lors de la définition du système, nous nous arrangeons pour obtenir une solution symétrique, et rendre ainsi l'élément invariant aux permutations entre les axes. Par composition de ces éléments de base, on obtient un objet 3D avec un comportement homogène dans toutes les directions, en accord avec ses caractéristiques physiques.

La copie de l'article proposé dans les pages suivantes permettra de mieux se rendre compte de l'apport de ce travail à travers les résultats obtenus en 2D et surtout en 3D. Il a été présenté dans une conférence relevée : WSCG'2009 (<http://wscg.zcu.cz/>, [BBJ<sup>+</sup>09]). On y trouvera notamment, en annexe, la preuve de la non-existence d'une solution générale (pour toute valeur de  $\nu$ ), sans la force de rappel que nous avons introduite. C'est la même approche qui a été réutilisée pour déterminer les coefficients des différents types de ressorts (arêtes ou diagonaux).

Il est à noter que Natsupakpong [Nc10] a réalisé un travail similaire de détermination des paramètres d'un système masse-ressort, par une optimisation qui minimise la norme de la matrice des erreurs entre la matrice de raideur du modèle masse-ressort et de celle du même objet en éléments finis. Il a aussi comparé sa technique à celle de Lloyd [LSH07] ainsi qu'à la nôtre, et il montre en particulier que nos résultats sont tout aussi bons sur le domaine de définition (quadrangle ou hexaèdre) grâce à l'ajout de la force transversale.

# Integrating Tensile Parameters in Hexahedral Mass-Spring System for Simulation

V. Baudet and M. Beuve and F. Jaillet and B. Shariat and F. Zara  
LIRIS-SAARA, UMR CNRS 5205, University of Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France

## Abstract

Besides finite element method, mass-spring systems are widely used in Computer Graphics. It is indubitably the simplest and most intuitive deformable model. This discrete model allows to perform interactive deformations with ease and to handle complex interactions. Thus, it is perfectly adapted to generate visually plausible animations. However, a drawback of this simple formulation is the relative difficulty to control efficiently physically realistic behaviours. Indeed, none of the existing models has succeeded in dealing with this satisfyingly. We demonstrate that this restriction cannot be overpassed with the classical mass-spring model, and we propose a new general 3D formulation that reconstructs the geometrical model as an assembly of elementary hexahedral "bricks". Each brick (or element) is then transformed into a mass-spring system. Edges are replaced by springs that connect masses representing the vertices. The key point of our approach is the determination of the stiffness springs to reproduce the correct mechanical properties (Young's modulus, Poisson's ratio) of the reconstructed object. We validate our methodology by performing some numerical experiments. Finally, we evaluate the accuracy of our approach, by comparing our results with the deformation obtained by finite element method.

**Keywords:** Discrete Modelling, Physical Simulation, Mass-Spring System, Rheological Parameters.

## 1 INTRODUCTION

Finite elements methods (FEM) are generally used to accurately simulate the behaviour of 3D deformable objects. They require a rigorous description of the boundary conditions. The amplitudes of the applied strains and stresses must be well defined in advance to choose either a small - with Cauchy's description - or a large deformation context - with St Venant Kirchoff's description. Indeed, the accuracy of each context is optimized within its domain of deformation.

Mass-spring systems (MSS) have largely been used in animation, because of their simple implementation and their possible applications for a large panel of deformations. They consist in describing a surface or a volume with a mesh in which the global mass is uniformly distributed over the mesh nodes. The tensile behaviour of the object is simulated by the action of springs, connecting the mesh nodes. Then, Newton's laws govern the dynamics of the model, and the system can be solved by solving Ordinary Differential Equations (ODEs) via numerical integration over time. In computer graphics, MSS based animations are generally proposed to deal with interactive applications and to allow unpredictable interactions. They are adapted to virtual reality environments where many un-

predicted collisions may occur and objects can undergo deformations and/or mesh topology changes. Medical or surgery simulators present another example of their possible applications. Nevertheless these models generally fail to represent accurately the behaviour of real objects, characterized by Young's modulus and Poisson's ratio (parameterization problem).

In this paper, our aim is not a comparative study of MSS and FEM models. The goal is to propose a new solution to enhance the MSS, making them more compatible with the requirements of physical realism. Section 2 presents a state of the art of mass-spring systems and particularly their parameterization. Moreover, in this section, we present published solutions allowing the determination of springs constant to obtain a realistic behaviour of the simulated object. Section 3 presents our approach to calculate stiffness constants of springs according to tensile parameters of the simulated object. Section 4 presents some experimental results. Finally, some concluding remarks and perspectives are given in section 5. Then, Appendix A provides a more detailed explanation of some results presented in section 3.2.

## 2 RELATED WORK

Mass-spring systems have been used to model textiles [KEH04, LJF<sup>+</sup>91, Pro95], long animals such as snakes, or soft organic tissues, such as muscles, face or abdomen, with sometimes the possibility to simulate tissues cut [MLM<sup>+</sup>05, MC97, NT98, Pal03]. Moreover, these systems have been used to describe a wide range of different elastic behaviours such as anisotropy [Bou03], heterogeneity [TW90], non linearity [Bou00] and also incompressibility [PBP96].

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee.

However, where FEMs are built upon elasticity theory, mass-spring models are generally far to be accurate. Indeed, springs stiffness constants are generally empirically set and consequently, it is difficult to reproduce, with these models, the true behaviour of a given material. Thus, if the MSS have allowed convincing animations for visualisation purposes, their drawbacks refrain the generalization of their use when greater resolution is required, like for mechanical or medical simulators. An extensive review can be found in [NMK<sup>+</sup>06].

The graphics community has proposed solutions based on simulated annealing algorithms [DKT95, LPC95] to estimate spring stiffness constants to mimic correctly material properties. Usually, these solutions consist in applying random values to different springs constants and in comparing the behaviour of the obtained model with some mechanical experiments in which results are either well known analytically or can be obtained numerically. Then, the stiffness constants of the springs that induce the greatest error are corrected to minimize the discrepancies. More recently, Bianchi *et al.* [BSSH04] proposed a similar approach based on genetic algorithms using reference deformations simulated with finite element methods. However, the efficiency of these approaches depends on the number of springs and is based on numerous mechanical tests leading to a quite expensive computation. Moreover, the process should be repeated after any mesh alteration and the lack of a reference solution is an obstacle to the generalization of the method to other cases.

Instead of a try-and-error process, a formal solution to parameterize the springs should save computer resources. In this context, two approaches were explored. The Mass-Tensor approach [CDA99, PDA03] aims at simplifying finite element method theory by a discretization of the constitutive equations on each element. Despite of its interest, this approach requires pre-computations and the storage of an extensive amount of information for each mesh component (vertex, edge, face, element).

The second approach has been proposed by Van Gelder [Van98] and has been referenced in [Bou03, BO02, Deb00, MBT03, Pal03, WV97]. In this approach, Van Gelder proposes a new formulation for triangular meshes, allowing the calculation of springs stiffness constant according to elastic parameters of the object to simulate (Young's modulus  $E$ , and Poisson's ratio  $\nu$ ). This approach combines the advantages of an accurate mechanical parameterization with a hyper-elastic model, enabling either small or large deformations. However, numerical simulations completed by an Lagrangian analysis exhibited the incompatibility of the proposal with the physical reality [BBJ<sup>+</sup>07, Bau06]. Indeed, the Van Gelder's approach is restricted to  $\nu = 0$ . An extension of

Van Gelder's method has been recently presented in [LSH07] for tetrahedra, hexahedra and some other common shapes, but still remains limited to  $\nu = 0,3$  that prevents their use when accurate material properties are required. Finally Delingette [Del08] proposed a formal connection between springs parameters and continuum mechanics for the membranes. He succeeded to simulate realistically the behaviour of a membrane for the specific case of the Poisson's ratio  $\nu = 0,3$  with regular MSS. The extension of this approach to 3D is not yet available.

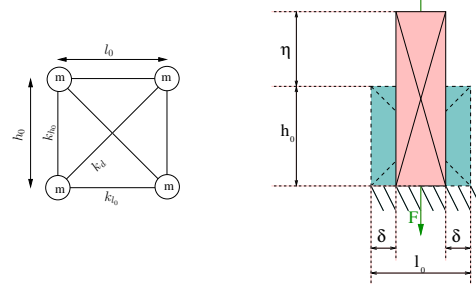
### 3 OUR PARAMETERIZATION APPROACH

Our approach is based on hexahedral mesh, as currently used with the FEM. To better demonstrate the basis of our solution, we begin with the parameterization of a 2D rectangular mass-spring systems (MSS). Indeed, as in FEM, any complexe object can be obtained by the assembly of these 2D elements [Bau06]. Then, we extend our solution to 3D elements.

#### 3.1 Case of a 2D element

At rest, the dimensions of a given 2D rectangular element are  $l_0 \times h_0$ . This element is composed of four edge springs with two diagonal edge springs to integrate the role of the Poisson's ratio. This configuration implies the same stiffness constant for the both diagonal springs ( $k_d$ ) and an equal stiffness constant for springs laying on two parallel edges ( $k_{l_0}$  and  $k_{h_0}$ ) (see Fig. 1). With such boundary conditions, the elastic parameters (Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$ ) of the bar are defined by:

$$\nu = \frac{2\delta/l_0}{\eta/h_0}, \quad E = \frac{F/l_0}{\eta/h_0}. \quad (1)$$

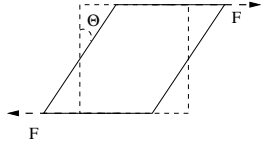


**Figure 1:** (Left) 2D rectangular element with three pairs of strings:  $k_{l_0}$ ,  $k_{h_0}$  and  $k_d$ . (Right) The bar is elongated by a force  $\vec{F}$ , generating a stretch  $\eta$  and a compression of  $2\delta$  at equilibrium.

In addition to the Young's modulus and the Poisson's ratio, the model should simulate correctly the reaction of the object to shearing strains (correct shear modulus).

In 2D, the shearing modulus is measured by applying two opposed forces  $F$  resulting in shear stress  $F/l_0$

on two opposite edges of the rectangular element. The material response to shearing stress is a lateral deviation with an angle  $\theta$  (see Fig. 2).



**Figure 2:** Experimentation to measure the 2D shear modulus: a rectangular element is subject to 2 opposed forces, generating a deviation  $\theta$ .

Shear modulus is defined as:

$$G = \frac{\tan(\theta) \times F}{l_0} \simeq \frac{\theta \times F}{l_0} \text{ when } \theta \rightarrow 0.$$

For linear elastic, isotropic and homogeneous materials, this coefficient is linked to the Young's modulus and the Poisson's ratio by  $E = 2G(1 + \nu)$ .

To determinate the spring coefficients, we followed the following steps [Bau06]:

1. For each experiment, we define the Lagrangian (sum of potential energies).
2. We apply the principle of least action to get the Newton equations.
3. We apply the definition of the measured mechanical characteristics to build a set of equations linking the spring coefficients to the mechanical characteristics.
4. Then, we solve the whole system.

Before solving the system, one notes that only the diagonal springs are stressed in a shearing experiment. Thus, the Lagrangian equation defining this characteristic depends only on  $k_d$ . This means that the diagonal springs are totally correlated to the shear modulus and that their stiffness constant can be calculated independently of the two others spring coefficients with the following relation:

$$k_d = \frac{E(l_0^2 + h_0^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)}.$$

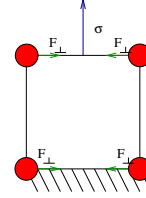
Note that, for a square mesh element, we obtain:

$$k_d = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G.$$

To find the two others parameters  $k_{l_0}$  and  $k_{h_0}$ , we do two elongation experimentations in lateral and longitudinal direction. Two equations result from each elongation experiment. Thus we obtain four equations. This over-constrained system admits one solution for  $\nu = 1/3$ , as stated by Lloyd *et al.* [LSH07] and Delingette [Del08]. But, this result is not satisfactory

because we wish to simulate the behaviour of any real material. To solve this problem, two degrees of freedom should be added.

We note that the Poisson's ratio defines the thinning at a given elongation, *i. e.* it determines the forces orthogonal to the elongation direction. Thus, we introduced for each direction a new variable that represents this orthogonal force. The force orthogonal to  $h_0$  (resp.  $l_0$ ) is noted  $F_{\perp h_0}$  (resp.  $F_{\perp l_0}$ ) (see Fig. 3).



**Figure 3:** Correction forces.

Note that this kind of correction is equivalent to the reciprocity principle used in finite elements methods [Fey64]. The addition of these 2 new variables leads to a system of 4 equations with 4 unknowns. The solution of the new system is (with  $(i, j) \in \{l_0, h_0\}^2$  with  $i \neq j$ ):

$$k_i = \frac{E(j^2(3\nu + 2) - i^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)}, \quad F_{\perp i} = \frac{jF_i(1 - 3\nu)}{8i}.$$

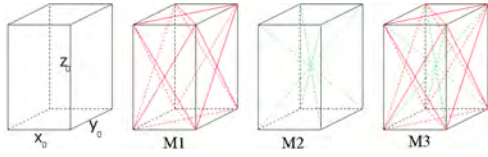
As said before, the symmetry involves that the 6 springs of each element are only defined by three spring coefficients and the elongation/compression correction forces.

### 3.2 Generalisation to 3D elements

Our 3D model is the generalisation of our 2D approach, by the use of parallelepiped elements. Let's consider this element with rest dimensions  $x_0 \times y_0 \times z_0$ . As in 2D, to ensure homogeneous behaviour, springs laying on parallel edges need to have the same stiffness constant. Thus, we have to determine only 3 stiffness coefficients for these edges:  $k_{x_0}$ ,  $k_{y_0}$  and  $k_{z_0}$ . In addition, some diagonal springs are necessary to reproduce the thinning induced by the elongation. Fig.4 displays three possible configurations for these diagonal links:

- diagonal springs located on all the faces (M1),
- only the inner diagonals (M2),
- the combination of both inner and face diagonals (M3).

Prior to the above configuration choice, let's present our springs parameterization approach. As in 2D, we propose a methodology within the Lagrangian framework, and according to the following procedure. For each experiment that defines an elastic characteristic:



**Figure 4:** Three possible configurations for the 3D element composition.

1. We build the Lagrangian as the sum of the potential of springs due to elongation as well as the potential of external forces, since kinetic term is null.
2. We establish a Taylor's expansion of the Lagrangian to the second order in deformations and apply the principle of least action. It reads linear equations.
3. We obtain a set of equations, since the mechanical characteristics are input parameters. We solve this system to get stiffness coefficients.

To solve the system, the number of unknowns has to be equal to the number of equations (constraints). Three equations result from each elongation experiment (one for the Young's modulus and one for the Poisson's ratio along each direction orthogonal to the elongation). Thus, we obtain 9 equations for all the elongation directions. Moreover, 6 more equations have to be added to take into account the shear modulus (6 experiments).

Three degrees of freedom stem from the parallel edge ( $k_{x_0}, k_{y_0}, k_{z_0}$ ), but the total number of freedom degrees depends on the diagonal spring configuration. Note that, for small shearing ( $\theta \approx 0$ ), only diagonal springs are stressed. Thus, the Lagrangian equation defining this characteristic depends only on the stiffness constants  $k_{d_i}$  of the different diagonals. This means that the diagonal springs constant can be determined independently of the other stiffness coefficients.

We summarize the number of degrees of freedom and the number of equations in Table 1 according to the possible configurations of the system. We observe that all the geometrical configurations bring to an over-constraint system. Nevertheless, the configuration (M2) is less constrained than the others. Thus, we chose this configuration which corresponds to the model with only the inner diagonals in which the 4 diagonal springs have the same stiffness constant noted  $k_d$ .

	M1	M2	M3
Nb of unknown for shearing	3	1	4
Nb of unknown for elongation	3+(3)	3+(1)	3+(4)
<b>Total nb of unknown stiffness cst.</b>	6	4	7
Nb of equations for elongation	9	9	9
Nb of equations for shearing	6	3	6
<b>Total number of equations</b>	15	12	15

**Table 1:** Number of equations and unknowns according to the chosen geometry.

As mentioned above, the inner diagonals fully define the shearing modulus. The problem is that there is only 1 diagonal spring variable for 3 shearing equations (see Table 1). Each equation, corresponding to one particular direction  $i$  ( $i \in \{x_0, y_0, z_0\}$ ), leads to a different solution:

$$k_{d_i} = \frac{E i \sum_{j \in \{x_0, y_0, z_0\}} j^2}{8(1+\nu) \prod_{l \in \{x_0, y_0, z_0\}, l \neq i} l}.$$

However an unique solution can be obtained for a cubic element (*i. e.* with  $x_0 = y_0 = z_0$ ). In this case  $k_d$  is well defined proportionally to  $G$ , with:

$$k_d = \frac{3Ex_0}{8(1+\nu)}. \quad (2)$$

Thus, we constrain the mesh element to a cube. The non-diagonal edge springs are identical and their spring stiffness constant is noted  $k_x$ . This stiffness coefficient has to satisfy two relations ( $E$  and  $\nu$ ). One solution can be found for the Poisson's ratio  $\nu = 0.25$  but this is not a versatile solution, thus unsatisfying (a complete demonstration will be found in Appendix A).

Since the number of equations is greater than the number of degrees of freedom, we introduce as in 2D, correction forces. Thus, two new forces induced by the elongation are added. For the sake of symmetry, the amplitude of the forces is identical in both directions. This amplitude  $F_{\perp}$  is the new degree of freedom (see Fig. 3).

This new additional variable leads to a system of 2 equations with 2 unknowns. After resolution, we obtain the following relations for  $i \in \{x_0, y_0, z_0\}$ :

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{Ex(4\nu+1)}{8(1+\nu)}, \\ F_{\perp i} &= -\frac{F_i(4\nu-1)}{16}. \end{aligned} \quad (3)$$

Since all the stiffness coefficients and the added compressive forces are now determined for a mesh element, we can tackle the simulation of any object composed of mesh elements. Then, the simulation of an object results from the simulation of the deformation of each single element that constitutes the object. For this, we need to:

1. Compute all the forces applied to an element. These forces can be (i) internal, including forces due to springs and correction forces, or (ii) external, like gravity or reaction forces due to neighborhood.
2. Calculate accelerations and velocities according to an integration scheme (explicit or implicit Euler scheme, Verlet method, *etc.*).
3. Displace each mesh node consequently.

Moreover, to compute the correction forces applied to a mesh element face, we need to compute the elongation force. This elongation force is the component of the sum of all applied forces to a face, in the direction of face normal vector.

The next section will describe numerical experiments.

#### 4 EVALUATION OF THE 3D MODEL

We propose now to qualify the mechanical properties of our system. For this, we have carried out several tests.

##### Deflection experiment

The deflection experience (construction or structural element bends under a load) is recommended to validate mechanical models. It constitutes a relevant test to evaluate (a) the mass repartition, and (b) the behaviour in case of large deformations (inducing large rotations, especially close to the fixation area).

This test consists in observing the deformation of a beam anchored at one end to a support. At equilibrium, under gravity loads, the top of the beam is under tension while the bottom is under compression, leaving the middle line of the beam relatively stress-free. The length of the zero stress line remains unchanged (see Fig. 5).

In case of a null Poisson's ratio, the load induced deviation of the neutral axis is given by:

$$y(x) = \frac{\rho g}{24 EI} (6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4) \quad (4)$$

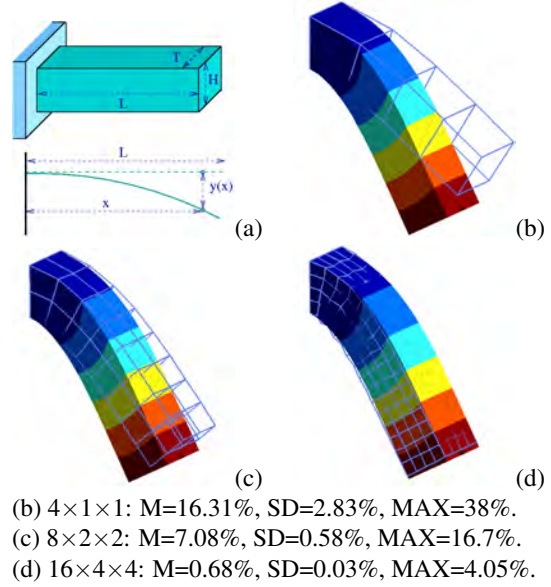
for a parallelepiped beam of inertia moment  $I = TH^3/12$ , and with linear density  $\rho = M/L$ .

We notice that results are dependent of the sampling resolution, as for any other numerical method, however the fiber axis profile keeps close to the profile given by equation (4). Figure 5 displays some results for a cantilever beam of dimensions  $400 \times 100 \times 100$  mm, with Young's modulus equals to 1000 Pa, Poisson's ratio to 0.3 and a mass of  $0.0125 \text{ Kg.m}^{-3}$ . By looking at the displacement errors at each mesh node, we observe that the error is decreasing when the sampling is improved: the maximum error in the sampling  $4 \times 1 \times 1$  is about 45% while it is about 5% compared to a FEM reference result, for a resolution of  $16 \times 4 \times 4$ , proving again the convergent behavior of our technique.

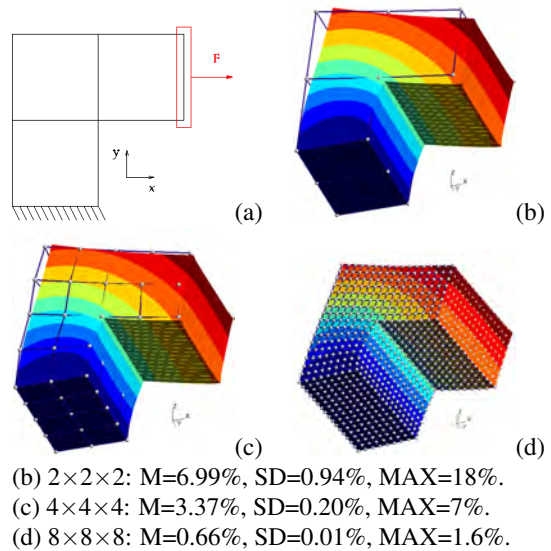
##### Shearing experiment: Illustration on a non-symmetric composition

For the shearing experiment, we have chosen a L-like object fixed at its base. We apply a constant force to the edges orthogonal to the base. Figure 6 shows our results superimposed to the FEM solution, with a map of error in displacement. The object dimensions are  $4000 \times 4000 \times 4000$ mm. The mechanical characteristics

are: Young's modulus of 1kPa, Poisson's ratio of 0.3 and an applied force of 0.3GN. In this experiment, we have neglected the mass. Again we clearly observe that our model behaves as expected: better mesh resolution leads to better results. Moreover, the dissymmetry of the geometry does not influence the accuracy of the results.



**Figure 5:** Deflection experiment: (a) Cantilever neutral axis deviation, (b-d) the reference FEM solution (in color gradation) with superimposition of various simulations performed for different sampling resolutions (wire mesh).

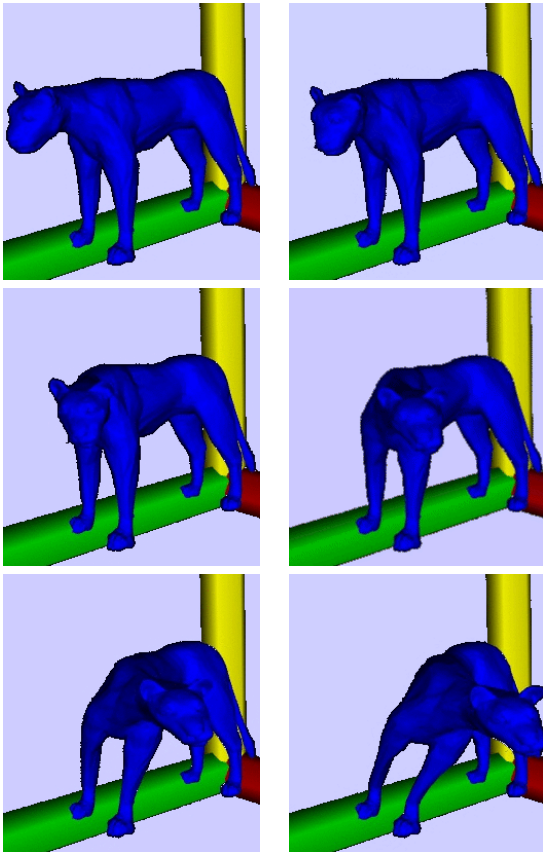


**Figure 6:** Experiment on a non-symmetric object: (a) load scheme, (b-d) the reference FEM solution (in color gradation) with superimposition of various simulations performed for different mesh resolutions.



### 3D deformable object simulation

An example of application is depicted on Fig. 7. By dragging points, we applied some external forces on an initial hexahedral meshing of a puma, leading to produce the head lateral movement. Note that the initial choice of a parallelepiped shape is absolutely not a constraint in most applications. This choice has been motivated by the fact that it is considered by the numerical community as stable and more precise for the same number of elements than a tetrahedral mesh element. This is to be counterbalanced by the fact that it requires generally more elements to fit a non simple geometry. Anyway, for better visualisation or collision detection purposes, it is easy to fit a triangular skin on our hexahedral model, as shown on Fig. 7.



**Figure 7:** A complete 3D application: simulation of the head lateral movement at different steps.

## 5 CONCLUSION AND FUTURE WORK

We proposed a mass-spring model that ensures fast and physically accurate simulation of linear elastic, isotropic and homogeneous material. It consists in meshing any object by a set of cubic mass-spring elements. By construction, our model is well characterized by the Young's modulus and Poisson's ratio. The

spring coefficients have just to be initialized according to simple analytic expressions. The precision of our model have been given, by comparing our results with those obtained by a finite element method, chosen as reference.

In the future, we are looking to apply the same techniques to other geometrical elements, for example tetrahedron or any polyhedron. This would increase the geometrical reconstruction possibilities and would offer more tools for simulating complex shapes, although in the actual state, the hexahedral shape is not a constraint in many applications ranging from mechanics to medicine. If desired, a triangulation of the surface can be performed with ease and at reduced computational cost.

Mesh optimization or local mesh adaptation would probably improve the efficiency of the model. For example, we can modify the resolution in the vicinity of highly deformed zones, reducing large rotations of elements undergoing heavy load.

We exhibited that our model can support reasonably large deformations. The accuracy increases with the mesh resolution. This is a major improvement relatively to early techniques, as it is generally dependent to the mesh resolution and topology. However, it may be interesting to investigate a procedure to update the spring coefficients and corrective forces when the deformations become too large. In this case, the elastic behaviour will be lost (the initial shape will not be recovered), but this may allow to handle strong topology alteration, even melting.

## APPENDIX A

### Demonstration: nonexistence of a 3D general solution

Being a cubic element with edge of length  $x_0$ . Consequently, face diagonals are of length  $d_{face} = \sqrt{2} x_0$ , and cube diagonals  $d_{cube} = \sqrt{3} x_0$ . Spring stiffness are equal along the edges ( $K_x = K_y = K_z$ ), as well for faces: ( $K_{xy} = K_{xz} = K_{yz}$ , denoted  $K_{xx}$ ).

By symmetry in the cube, all 6 shearings are equivalent and can be resumed into a single equation. A shearing stress due to a sliding  $\eta$  leads to the deformation of the 4 cube diagonals as well as the 4 diagonals of the 2 lateral faces, respectively  $\Delta_{d_{cube}}$  and  $\Delta_{d_{face}}$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{d_{cube}} &= \sqrt{(x+\eta)^2 + 2x^2} - \sqrt{3}x \sim \frac{\sqrt{3}}{3}\eta \\ \Delta_{d_{face}} &= \sqrt{(x+\eta)^2 + x^2} - \sqrt{2}x \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\end{aligned}$$

The static lagrangian linked to shearing is reckoned in the following way:

$$L = F_{cis}\eta - \frac{4K_d}{2} \frac{\eta^2}{3} - \frac{4K_{xx}}{2} \frac{\eta^2}{2}$$

After resolution, they find the equation of shearing in  $K_{xx}$  and  $K_d$ :

$$\frac{4K_d + 6K_{xx}}{3x} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

We can consequently incorporate the compressibility law. For this, we apply an uniform pressure to the cube, which generates an uniform distortion  $\eta$ . This deformation leads as well to the (identical) deformation of all the diagonals:

$$\begin{aligned} \Delta_{d_{cube}} &= \sqrt{3(x+\eta)^2} - \sqrt{3}x \sim \sqrt{3}\eta \\ \Delta_{d_{face}} &= \sqrt{2(x+\eta)^2} - \sqrt{2}x \sim \sqrt{2}\eta \end{aligned}$$

Pressures being applied at each face are equal and this implicates the same surface force  $F_{face}$ . The lagrangian is as follows:

$$L = 3F_{face}\eta - \frac{12K_x}{2}\eta^2 - \frac{12K_{xx}}{2}2\eta^2 - \frac{4K_d}{2}3\eta^2$$

After resolution, compressibility equation is:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} \frac{F_{face}/(x+\eta)^2}{((x+\eta)^3 - x^3)/x^3} \sim \frac{F_{face}}{3x\eta} \\ &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned}$$

Hence,

$$\frac{4K_x + 8K_{xx} + 4K_d}{3x} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6)$$

We can now deal with equations governing a tensile stress  $\eta$ ; by symmetry other directions are compressed of the same value,  $\delta$ . So, two faces ( $face_2$ ) are shrunked by keeping their square shape, while the other 4 are stretched ( $face_1$ ). Diagonals are deformed in the following way:

$$\begin{aligned} \Delta_{d_{cube}} &= \sqrt{(x+\eta)^2 + 2(x-2\delta)^2} - \sqrt{3}x \sim \frac{\sqrt{3}}{3}\eta - \frac{4\sqrt{3}}{3}\delta \\ \Delta_{d_{face_1}} &= \sqrt{(x+\eta)^2 + (x-2\delta)^2} - \sqrt{2}x \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\eta - \sqrt{2}\delta \\ \Delta_{d_{face_2}} &= \sqrt{2(x-2\delta)^2} - \sqrt{2}x \sim -2\sqrt{2}\delta \end{aligned}$$

The lagrangian associated to the tensile experiment:

$$\begin{aligned} L &= F\eta - 2K_x\eta^2 - 16K_x\delta^2 - 16K_{xx}\delta^2 \\ &\quad - 4K_{xx} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\eta - \sqrt{2}\delta \right)^2 - 2K_d \left( \frac{\sqrt{3}}{3}\eta - \frac{4\sqrt{3}}{3}\delta \right)^2 \end{aligned}$$

After resolution, Young modulus and Poisson ratio definitions lead to:

$$\begin{aligned} E &= \frac{12K_dK_{xx} + 24K_{xx}^2 + 24K_x^2 + 60K_xK_{xx} + 24K_xK_d}{x(6K_x + 9K_{xx} + 4K_d)} \\ \nu &= \frac{2K_d + 3K_{xx}}{6K_x + 9K_{xx} + 4K_d} \quad (7) \end{aligned}$$

These equations (eq. (5), (6) and (7)) cannot be solved (except for  $\nu = 0.25$ ), what establish a strong result, since it implicates that it is unfortunately not possible to reproduce an elastic homogeneous behavior only with this simplistic model. As in 2D corrective forces should be introduced.

## REFERENCES

- [Bau06] Vincent Baudet. *Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables*. PhD thesis, Université Lyon 1, 2006.
- [BBJ<sup>+</sup>07] Vincent Baudet, Michaël Beuve, Fabrice Jaillet, Behzad Shariat, and Florence Zara. A new mass-spring system integrating elasticity parameters in 2d. Technical Report RR-LIRIS-2007-003, February 2007. <http://liris.cnrs.fr/publis/?id=2683>.
- [BO02] Cynthia Bruyns and Mark Ottensmeyer. Measurements of soft-tissue mechanical properties to support development of a physically based virtual anima model. In *MIC-CAI 2002*, pages 282–289, 2002.
- [Bou00] François Boux de Casson. *Simulation dynamique de corps biologiques et changements de topologie interactifs*. PhD thesis, Université de Savoie, 2000.
- [Bou03] David Bourguignon. *Interactive Animation and Modeling by Drawing - Pedagogical Applications in Medicine*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [BSSH04] Gérald Bianchi, Barbara Solenthaler, Gábor Székely, and Matthias Harders. Simultaneous topology and stiffness identification for mass-spring models based on FEM reference deformations. In Springer-Verlag, editor, *MICCAI 2004*, pages 293–301, Berlin, 2004.
- [CDA99] Stéphane Cotin, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Efficient linear elastic models of soft tissues for real-time surgery simulation. *Proceedings of the Medicine Meets Virtual Reality (MMVR 7)*, 62:100–101, 1999.
- [Deb00] Gilles Debunne. *Animation multirésolution d'objets déformables en temps réel, Application à la simulation chirurgicale*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [Del08] Herve Delingette. Triangular springs for modeling non-linear membranes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(2):329–341, 2008.
- [DKT95] O. Deussen, L. Kobbelt, and P. Tucke. Using simulated annealing to obtain good nodal approximations of deformable objects. In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the Sixth Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 30–43, Berlin, 1995.
- [Fey64] R. Feynman. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2. Addison Wesley, 1964. chapter 38.
- [KEH04] Michael Keckeisen, Olaf Eitzmuß, and Michael Hauth. Physical models and numerical solvers for cloth animations. In *Simulation of Clothes for Real-time Applications*, volume Tutorial 1, pages 17–34. INRIA and the Eurographics Association, 2004.
- [LJF<sup>+</sup>91] A. Luciani, S. Jimenez, J. L. Florens, C. Cadoz, and O. Raoult. Computational physics: A modeler-simulator for animated physical objects. In *Proceedings of Eurographics 91*, pages 425,436, Amsterdam, 1991. Eurographics.
- [LPC95] Jean Louchet, Xavier Provot, and David Crochemore. Evolutionary identification of cloth animation models. In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the Sixth Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 44–54, Berlin, 1995.

- [LSH07] B.A. Lloyd, G. Székely, and M. Harders. Identification of spring parameters for deformable object simulation. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 13(5):1081–1094, Sept-Oct 2007.
- [MBT03] Anderson Maciel, Ronan Boulic, and Daniel Thalmann. *Deformable Tissue Parameterized by Properties of Real Biological Tissue*, volume 2673 of *Lecture Notes in CS: Surgery Simulation and Soft Tissue Modeling*, pages 74–87. Springer, 2003.
- [MC97] Philippe Meseure and Christophe Chaillou. Deformable body simulation with adaptative subdivision and cuttings. In *5th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualisation WSCG'97*, pages 361–370, 1997.
- [MLM<sup>+</sup>05] U. Meier, O López, C. Monserrat, M. C. Juan, and M. Alcañiz. Real-time deformable models for surgery simulation : a survey. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 77(3):183–197, 2005.
- [NMK<sup>+</sup>06] A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman, and M. Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4):809–836(28), December 2006.
- [NT98] Luciana Porcher Nedel and Daniel Thalmann. Real-time muscles deformations using mass-spring systems. *Computer Graphics International*, pages 156–165, 1998.
- [Pal03] Céline Paloc. *Adaptative Deformable Model (allowing Topological Modifications) for Surgical Simulation*. PhD thesis, University of London, 2003.
- [PBP96] Emmanuel Promayon, Pierre Baconnier, and Claude Puech. Physically based deformation constrained in displacements and volume. In *Proceedings of Eurographics'96*, Oxford, 1996. BlackWell Publishers.
- [PDA03] Guillaume Picinbono, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical Model*, 2003.
- [Pro95] Xavier Provot. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In *Proceedings of Graphics Interface 95*, pages 147,154, Toronto, 1995. Canadian Human-Computer Communications Society.
- [TW90] D. Terzopoulos and K. Waters. Physically-based facial modelling, analysis, and animation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 1:73–80, 1990.
- [Van98] Allen Van Gelder. Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes. *Journal of Graphics Tools*, 3(2):21–42, 1998.
- [WV97] Jane Wilhelms and Allen Van Gelder. Anatomically based modelling. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'97 Proceedings)*, pages 173–180, 1997.

## 2.5 Acquisition multimodale de données physiologiques

Comme nous l'avons vu tout au long de ce chapitre, le traitement par radio- ou hadron-thérapie nécessite, à tout moment, la connaissance de la position précise de la tumeur. Or, des déplacements de plusieurs centimètres ont pu être observés pour des tumeurs pulmonaires situées dans les zones périphériques. Ce déplacement pourrait être compensé par une augmentation des marges de traitement, mais qui se ferait au détriment de l'exposition de tissus sains. Par ailleurs, la mise en place d'un système de contrôle de mouvement implique souvent une augmentation du temps de traitement et de manipulation du patient. Ainsi, l'utilisation d'une modélisation numérique semble, là encore, plus prometteuse pour effectuer ce suivi. Pour autant, une simple animation de la déformation des organes considérés n'est pas suffisante ; il est alors nécessaire d'obtenir une déformation réaliste, tenant compte des caractéristiques physiologiques et biologiques des organes.

Dans ce sens, dans le cadre du traitement de tumeurs pulmonaires, des travaux ont conduit à la réalisation d'un modèle bio-mécanique du système respiratoire, notamment dans le cadre de la thèse de J. Saadé [SDV<sup>+</sup>10], qui fait suite aux travaux de Pierre-Frédéric Villard (2006), puis Anne-Laure Didier (2008). Bien que le caractère périodique du mouvement respiratoire puisse constituer un atout, la difficulté de cette étude tient à la non reproductibilité des cycles respiratoires pour un même patient [OM02, SSS<sup>+</sup>06]. En effet, les mouvements respiratoires sont la résultante complexe de plusieurs phénomènes, parmi lesquels le mouvement de la cage thoracique et du diaphragme. Au final, le modèle bio-mécanique proposé permet de déduire le mouvement interne des poumons (et donc d'inférer celui de la tumeur) à partir d'observations externes. Il devient alors nécessaire d'acquérir des informations, forcément multi-modales, qui viendraient en appui et permettraient de guider plus précisément la simulation. Ces données sont telles que le mouvement de la peau du patient, permettant de déterminer la position des côtes par exemple, ou encore le mouvement de l'abdomen, permettant de déduire le mouvement du diaphragme.

### Suivi externe de la respiration

Tout l'enjeu de notre travail réside dans la mise en place d'une chaîne de traitement complète, permettant l'obtention de ces paramètres. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés uniquement au suivi continu de la peau, avec une extension possible dans le cadre du suivi du mouvement du diaphragme. Au cœur de cette chaîne de traitement *non invasif* pour le patient, les principales contraintes concernent le temps réel autant que la précision, puisque l'acuité du suivi de la tumeur est directement corrélée à la précision du système d'acquisition.

En 2004, Murphy [Mur04] constate que, dans un traitement idéalisé, le système de traitement en radio- ou hadron-thérapie devrait adapter en continu le faisceau d'irradiation à la position de la tumeur. Dans ce sens, les efforts fournis depuis plusieurs années ont permis de mieux connaître la nature des mouvements de la tumeur et des organes. Mais si des avancées importantes ont été réalisées, de nombreux points restent à améliorer. Notons que toutes les approches proposées nécessitent une acquisition de la position de la

cible plus rapide que son mouvement. Cela est en général réalisé par de l'imagerie radio. Lorsque le mouvement est rapide et périodique, cette technique peut être suppléée par la mesure de signaux annexes corrélés avec le mouvement (par exemple de la cage thoracique dans le cas de la respiration). Le nombre d'acquisitions peut alors être réduit, ainsi que la dose reçue par le patient. Murphy a ainsi répertorié les principaux axes dans le domaine du suivi des organes en mouvement et les systèmes d'acquisition employés, ainsi que leur intérêt.

Les systèmes de surveillance et du suivi du corps humain ont donc fait l'objet de nombreuses applications dans le domaine du traitement du cancer [SID<sup>+</sup>08]. Cependant, il ressort que la plupart des techniques existantes restent trop invasives et ne sont pas adaptées pour une utilisation en salle de traitement. Dans notre cas, il n'est ainsi pas envisageable d'utiliser des techniques d'imagerie interne en per-opératoire, même si elles ont montré leur utilité pour la compréhension des phénomènes [SSS<sup>+</sup>06]. De plus, dans la plupart des cas, l'acquisition seule ne suffit pas, et l'utilisation d'un système de prédiction des mouvements est essentiel pour inférer une courbe du cycle respiratoire en fonction des paramètres observés, qu'ils soient internes ou externes.

Ainsi, pour réaliser le suivi externe de la peau du patient, nous partons d'un maillage 3D de référence du thorax obtenu à partir de l'imagerie médicale pré-opératoire. Après une phase de recalage sur le patient, ce maillage est ensuite déformé afin qu'il corresponde à l'état courant de la peau pendant l'opération. Deux caméras sont pour cela positionnées à 90 degrés l'une de l'autre : une caméra au-dessus du patient pour suivre les déformations latérales, et une autre sur le côté qui permet de suivre l'amplitude de la respiration (entre le dos et le haut de la cage thoracique de chaque section transversale). La déformation du maillage 3D se base sur les contours du thorax extraits des images des deux caméras. Grâce à cette technique, nous arrivons à déformer en 3D le maillage du thorax à partir d'informations croisées en 2D. Nous profitons pour cela de données favorables, notamment la relative régularité du thorax. L'acquisition de la variation du volume d'air inspiré (par l'emploi d'un spiromètre) a été utilisée pour la validation du processus complet. La figure. 2.11 présente les étapes du procédé que nous proposons.

Notre méthode respecte l'ensemble des contraintes que nous nous sommes fixées, puisque le système d'acquisition est simple, peu coûteux et que nous obtenons une précision de l'ordre du millimètre (conforme à la précision d'acquisition de l'imagerie médicale, mais aussi des caméras). L'amélioration de cette précision passe alors par l'amélioration des données d'entrée et donc de la précision du matériel, et non pas forcément de celle du processus. Notre algorithme permet ainsi la déformation d'un maillage 10000 points à une fréquence d'environ 6 Hz (une déformation toutes les 180 ms). La Fig. 2.12 présente les résultats obtenus, par comparaison d'un maillage déformé par notre technique avec un autre maillage cible issu de la même patiente, mais pour un autre moment du cycle respiratoire. La détection de mouvements plus fins ( $< 1 \text{ mm}$ ) nécessite alors l'utilisation de caméras de meilleure résolution. Par ailleurs, nous pouvons observer des écarts importants (autour de 4 mm) qui se retrouvent logiquement au niveau de la zone opposée à la caméra latérale, c'est-à-dire dans la zone moins bien couverte par les caméras. Cela peut être compensé par l'ajout d'une caméra opposée, ce qui n'est pas toujours possible selon la disposition de la salle de traitement.

Par ailleurs, nous avons également comparé la variation du volume calculé issu des maillages déformés avec celle du volume mesuré par le spiromètre (Fig. 2.13). Nous ob-

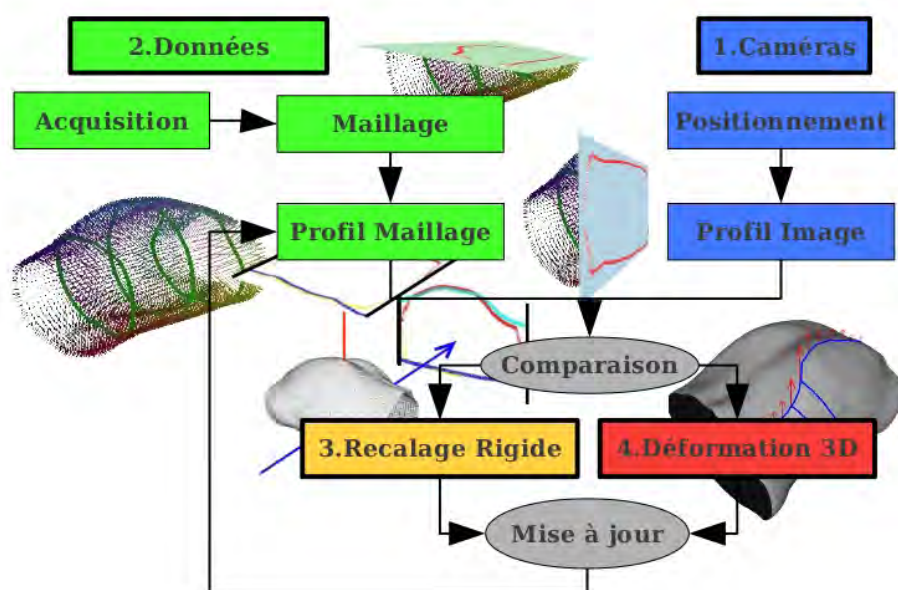


FIGURE 2.11 – De l’acquisition à la déformation.

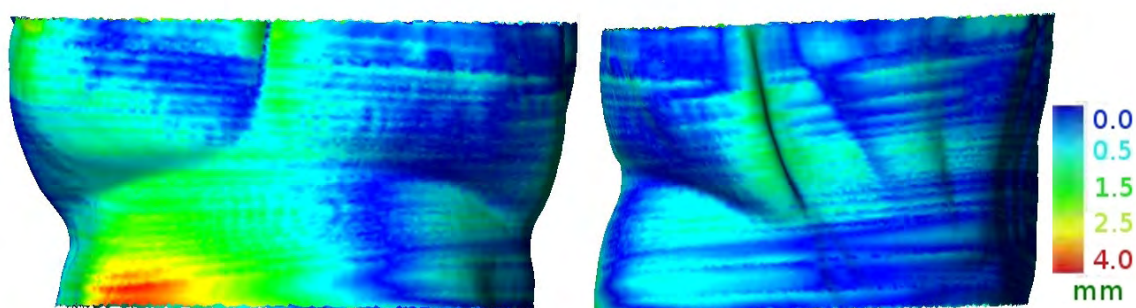


FIGURE 2.12 – Distance de Hausdorff entre le maillage de référence déformé (initialement issu de l’expiration forcée) et le maillage cible (issu de l’inspiration forcée).

servons une différence entre l’amplitude calculée et celle mesurée, avec un rapport entre ces deux valeurs de 1.15. Cette valeur est proche de la valeur théorique de 1.11 obtenue lors d’une étude sur la variation du volume d’air entrant dans les poumons (variation qui est due au changement de température et de pression). Nos résultats restent donc en adéquation avec ceux observés par ailleurs [LPEN+05].

Nous avons également pu observer, de manière qualitative, les relations entre le volume d’air inspiré et des sections prises au niveau de la poitrine. Nous nous intéressons actuellement à la corrélation entre les différents signaux observés [CBE+07]. L’acquisition des données est basée sur l’emploi d’un Pléthysmographe Respiratoire à Induction pour le périmètre de sections transversales (au milieu du thorax et au milieu de l’abdomen) et d’un spiromètre pour le volume d’air inspiré par le patient. Trop invasive, cette technique n’est pas envisageable en salle de traitement. Par contre, elle pourra sans doute nous servir

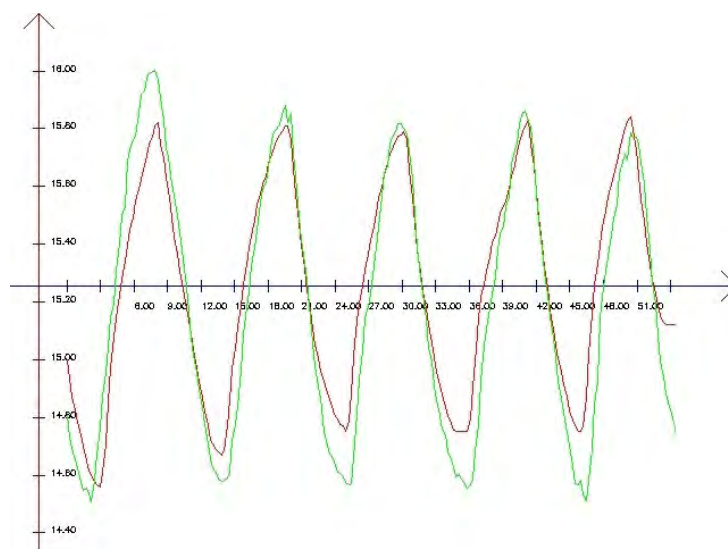


FIGURE 2.13 – Volume calculé (vert) et le volume issu du spiromètre (rouge) : ratio 1.15.

en phase de validation croisée.

Forts de ces résultats, nous sommes donc en mesure de suivre en continu les déformations externes du thorax, et nous obtenons un maillage géométrique 3D de la surface du patient, évoluant au cours du cycle respiratoire. Ce même modèle peut maintenant être utilisé dans de nombreuses applications, éventuellement en complément d'autres systèmes de suivi, imagerie interne ou plus invasif que notre proposition. En effet, disposer d'une information mise à jour pendant le traitement, par exemple *via* un retour visuel 3D en réalité augmentée, peut apporter un plus. En 2008, une étude a montré que la qualité du traitement était significativement améliorée lors de l'emploi par le médecin d'un outil visuel. Cela peut aussi servir de guide pour mettre à jour les images pré-opératoires, en les déformant dans un premier temps uniquement de manière géométrique, et proposer au médecin une vue se plaçant dans son référentiel de routine [HMT<sup>+</sup>08].

Ce travail a été initié au travers du stage de Master2 Recherche de X. FAURE et vient d'être accepté pour être présenté à ORASIS'2011 (<http://orasis2011.inrialpes.fr/>, [FJZM11]).

## Suivi du mouvement diaphragmatique et pilotage du modèle

Le diaphragme est le muscle le plus important de la respiration. Il sépare le thorax de l'abdomen, et est formé d'une zone musculaire périphérique et d'une partie centrale constituée de tendons dont toutes les fibres se rejoignent au centre phrénique. Pendant la phase d'inspiration, les fibres musculaires se contractent, entraînant le tendon central vers le bas et produisant une dépression à l'intérieur des poumons. Quand le diaphragme se relâche et revient à sa position initiale, les poumons se contractent et l'air est expulsé (Fig 2.14).

Comme on l'a vu précédemment, les modèles disponibles au LIRIS permettant de reproduire le mécanisme de la respiration sont basés sur les lois bio-mécaniques et sur des données anatomiques, mais ne prennent malheureusement pas en compte les variables respiratoires du phénomène comme données d'entrée du modèle : volume et flux de l'air,

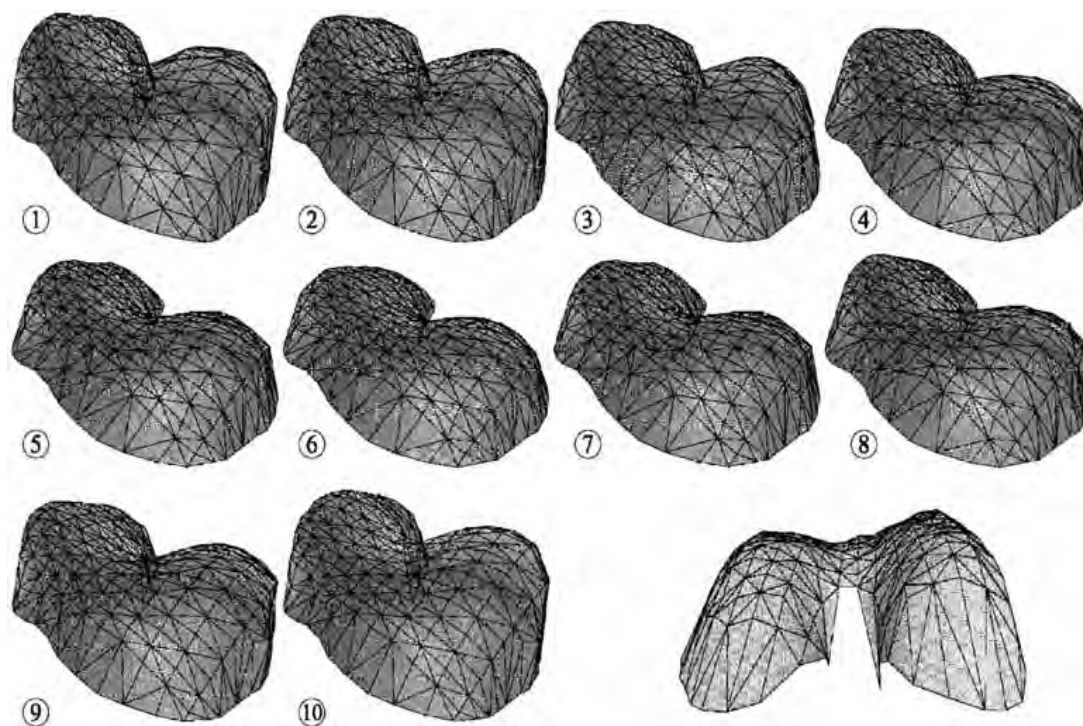


FIGURE 2.14 – Reconstruction de différentes positions du diaphragme au cours d’un cycle respiratoire, d’après [CPB+05]

activité électrique des muscles, caractéristiques des voies aériennes ou encore élasticité pulmonaire. Ainsi, nous développons des activités dans la continuité du travail décrit au paragraphe précédent, concernant la déformation d’un modèle géométrique (obtenu par scanner ou IRM) à l’aide d’informations issues d’acquisitions externes (caméras, spiromètre, gilet de mesure). L’objectif final étant, bien sûr, de déduire les mouvements internes de la tumeur en fonction des mouvements externes (respiration, etc.) du patient, cette première étude de faisabilité va se poursuivre par le travail de thèse de L. CAUSA. On cherche alors à incorporer des variables respiratoires mesurables, pour corrélérer cette information à la mécanique respiratoire. On espère ainsi pouvoir guider et piloter le modèle bio-mécanique.

Un premier protocole est en cours de mise en place, et l’on recense tout d’abord les entités auxquelles on aurait besoin d’accéder :

- Déformation du diaphragme, en se basant sur l’étude de l’activité électrique de ce muscle, mesurée grâce à un électromyographe (EMG), éventuellement par une stimulation électrique ou magnétique du nerf phrénique ;
- Déformation du diaphragme, par imagerie US mode B, voire mode M ;
- Flux d’air pendant le cycle respiratoire, mesurée à l’aide d’un spiromètre ou d’un pléthysmographe ;
- Variation de pression pendant le cycle respiratoire : mesuré par manomètre ou ballon de pression ;
- Caractéristiques des voies aériennes et du poumon (résistance et élasticité pulmonaire, compliance) : estimées à partir de courbes Pression/Volume du patient.

De plus, de formation Électrique, spécialisé en Ingénierie Bio-médicale, les connais-



sances de L. CAUSA sont très complémentaires des nôtres, et il est en train d'identifier et d'étendre des techniques en traitement du signal pour estimer et corrélérer les différents signaux respiratoires. L'idée est d'être capable d'inférer certains types de données plus difficiles à acquérir en temps réel pendant un traitement ionisant, et utiles au médecin car il y est plus habitué, ou encore plus simples à intégrer dans une modélisation numérique du diaphragme. Ensuite, on cherchera à identifier des paramètres ou des motifs à partir de ces signaux, en utilisant des techniques qui ont déjà été éprouvées dans d'autres applications connexes développées à l'université du Chili. Cela concerne entre autres : la décomposition modale empirique (EMD) la transformée de Hilbert-Huang (HHT), la transformée de Fourier (FFT), la logique floue, etc.

Une piste intéressante est d'utiliser de l'imagerie RM rapide couplée avec un spiromètre. Nous profitons d'une collaboration avec E. PROMAYON du TIMC-IMAG sur cette thématique. Des travaux antérieurs ont permis de valider la faisabilité d'une reconstruction 3D du diaphragme pendant le cycle respiratoire, en utilisant des séquences d'images par résonance magnétique de type EPI (Echo-Planar Imaging) [CPB<sup>+</sup>05]. Ces acquisitions ont été effectuées à 270 ms/image (au lieu de 5s/image, mais ceci au détriment de la qualité : à résolution 256x256), sur un patient sain en respiration spontanée et forcée à 0.1Hz. Un enregistrement continu a permis une resynchronisation a posteriori sur différentes phases du cycle pour une reconstruction d'une succession de surfaces diaphragmatiques. Les déplacements, l'aire et le volume ont pu ainsi être quantifiés. Cela a aussi permis l'évaluation de la dynamique du diaphragme, et cela a été testé sur un modèle diaphragme-abdomen. Disposer de ce type de données est une grande chance, et il serait maintenant intéressant de compléter cette étude avec un modèle plus complet, incluant aussi la cage thoracique et la tumeur.

En parallèle, nous avons initié des contacts avec le laboratoire CREATIS voisin, avec une équipe spécialiste en imagerie US pour faire une étude de faisabilité pour l'acquisition d'images US. Nous avons fait une première manipulation, pour tester la synchronisation entre l'échographe et notre procédé de suivi externe présenté au paragraphe précédent.

## 2.6 À propos de cette thématique

Ces travaux ont été initiés dans le cadre des projets Arrow, Adémo et MARC en ce qui concerne les applications en radiothérapie conformationnelle [AJMS01, AJP<sup>+</sup>00, AJS00, JSV98a, JSV98b, JSV01, ABJS04].

Actuellement, ils s'insèrent dans le Programme Régional de Recherche en Hadronthérapie (PRRH) qui est le programme scientifique universitaire adossé au centre ETOILE [ETO02], piloté par Lyon1, pour un budget de 3M euros. Ce projet concerne la construction à Lyon d'un centre de traitement du cancer à l'aide de la technique innovante qu'est l'hadronthérapie. Le centre ETOILE, dont l'implantation est prévue sur le site du Bioparc Lyon et qui accueillera ses premiers patients en 2014, sera le premier centre français de traitement par ions carbone des tumeurs radio-résistantes (radiothérapie conventionnelle) et inopérables. Ces types de tumeurs touchent chaque année entre 3500 et 6000 malades. Ce centre ETOILE sera unique en France, et seules quelques unités identiques existent ou sont en cours de construction en Europe (5) et Asie (7). C'est bien évidemment un des projets phare du LIRIS. Parallèlement aux actions liées au PRRH

ETOILE, l'équipe SAARA contribue dans les actions Européennes d'importance autour de l'Hadronthérapie (réseau ENLIGHT++). On peut ainsi citer, depuis 2009 le projet quadriennal Européen ULICE (dont l'équipe médicale d'ETOILE est à l'origine), sur la mise en commun de protocoles, spécifications et terminologies des grands centres Européens d'Hadronthérapie déjà ouverts (Heidelberg) ou à venir (MedAustron, CNAO, ETOILE, Marbourg, ...). On notera, enfin, notre implication dans le projet quinquennal Européen ENVISION puisqu'il concerne particulièrement notre thématique (imagerie, instrumentation, tumeurs mobiles).

J'ai encadré V. Baudet, d'abord en DEA, puis en thèse à partir de 2002, en codirection avec B. Shariat. Le travail de V. BAUDET a été soutenu par le groupe départemental du Rhône de la *Ligue Contre le Cancer*. Nous avons travaillé activement sur le thème de la modélisation et la mise à jour de modèles déformables, avec des applications sur le traitement du cancer de la prostate [BJS02b, BJS03b], ainsi que sur la simulation de l'activité respiratoire et le suivi de la tumeur, dans le cadre du projet MARC [BJS<sup>+</sup>03c, BVB<sup>+</sup>03a, VBS<sup>+</sup>04a, BBJ<sup>+</sup>09]. Enfin, le sujet de Master2 d'E. FLÉCHON (2011) vise à approfondir ces notions. On peut aussi compter L. CAUSA qui poursuit sa thèse en cotutelle avec le groupe d'Ingénierie Biomédicale de l'Université du Chili sur un sujet connexe, l'extraction de paramètres physiologiques afin de les intégrer dynamiquement dans un modèle du diaphragme, en vue de piloter ces modèles bio-mécaniques. Une collaboration locale existe aussi depuis longtemps avec le Centre Léon Bérard, et l'équipe du Pr. Carrie.

Une coopération avec le North Western Medical Physics (NWMP) du Christie Hospital de Manchester (GB), a été initiée dans ce sens, notamment avec l'équipe de C. MOORE. L'objectif de ce projet est d'améliorer le positionnement du patient, et donc le traitement par irradiation du cancer, et de faciliter la transition entre les technologies nouvelles et la pratique clinique. Le but est d'obtenir un contrôle du traitement en temps réel et de développer des outils de planification du traitement.

Cette thématique est toujours très active, et même si les développements ne sont pas allés aussi loin que l'on pouvait l'espérer en terme d'application à la modélisation de la respiration, d'autres travaux ont été menés en parallèle. On retrouve toujours ce besoin d'intégration des paramètres physiques. La difficulté, dans le cas du médical, est justement de déterminer les caractéristiques physiologiques des tissus. Ce qui débouche maintenant sur le nouveau travail de doctorat de L. CAUSA concernant la modélisation du diaphragme. De formation en traitement des signaux biomédicaux, il devrait apporter beaucoup dans les simulations graphiques pilotées par des données extérieures.

Il s'agit, dans ce cas, de l'étude de la modélisation de la déformation du diaphragme et de traitement des signaux respiratoires, appliqué à un modèle de thorax. Modéliser l'effet de la déformation du diaphragme sur la respiration permettra de prédire le mouvement de tumeurs pulmonaires pendant le processus d'irradiation, ce qui devrait améliorer la dosimétrie, et diminuer les effets défavorables du traitement radio-biologique. Le traitement des signaux respiratoires permettra la validation du modèle de poumon obtenu. De plus, les techniques de traitement seront appliquées aux signaux polysomnographiques (qui interviennent pendant le sommeil). L'objectif principal est d'établir les caractéristiques des signaux utiles (images, électromyogramme, etc.) pour le monitoring d'une modélisation de diaphragme/poumon (issu de travaux de l'équipe SAARA), et de définir les trans-

formations nécessaires sur ces signaux pour qu'ils puissent être intégrés numériquement dans la simulation. En termes généraux, le travail consistera à identifier les signaux de toutes sortes qui sont utilisés en routine comme en laboratoire, pour la caractérisation du diaphragme. À partir de cette information, il s'agira d'établir quels signaux sont les plus pertinents, et auxquels d'entre eux on aura accès pendant l'intervention. Comme étape finale, les signaux transformés seront intégrés comme entrée du modèle mécanique et physiologique du thorax et de la respiration.

# Chapitre 3

## Modélisation des tissus mous, application en neuro-chirurgie

Le domaine de la chirurgie assistée par ordinateur est en pleine expansion. Il suffit pour s'en rendre compte de regarder les récents développements dans des domaines aussi variés que la neurochirurgie, l'orthopédie, la chirurgie ORL ou maxillo-faciale, etc. Cependant, à y regarder de plus près, ces domaines ne sont pas un hasard : on se trouve dans le cas favorable où les organes considérés sont rigides, articulés. Et au mieux, quand ils sont mous, ils sont confinés dans un cadre qui restreint leur champ de déformation (boîte crânienne, par exemple). Cependant, de récents travaux ont commencé à étudier et à prendre en compte les déformations des tissus mous du vivant, que cela soit dû à des sollicitations externes (outils) ou internes (physiologiques).

On a ainsi vu apparaître deux domaines d'application dans lesquels l'intégration des déformations des tissus mous a joué un rôle important. D'un côté, on trouve les simulateurs chirurgicaux, qui sont principalement destinés à l'apprentissage du geste médical, et qui tentent donc d'apporter des réponses comportementales et sensorielles avec une contrainte de temps réel. Au contraire, l'élaboration de modèles bio-mécaniques est plutôt destinée à l'aide au diagnostic et au planning des opérations chirurgicales, et de ce fait nécessitent des comportements réalistes et une précision dans la prédiction des mouvements et déformations des tissus. Pourtant, si ces deux domaines avaient des objectifs différents, et ont donc suivi des approches divergentes, ils tendent actuellement à se rejoindre sur bien des points : recherche de réalisme dans les simulateurs, et de temps réel dans les modèles.

### **Vers des modèles déformables en per-opératoire ?**

L'absence d'outils de simulation utilisables en per-opératoire s'explique simplement par la complexité calculatoire. En effet, la prédiction fiable des déformations subies par une structure anatomique donnée, en réponse à des sollicitations externes, nécessite le recours à des méthodes de modélisation précises et coûteuses en terme de temps de calcul. Une des méthodes les plus couramment utilisées repose sur une discrétisation (méthode des Éléments Finis) des équations de la mécanique des milieux continus qui décrivent l'élasticité des tissus. Cette modélisation continue garantit un contrôle de l'erreur par rapport aux matériaux réels (ce que les modèles discrets du type masses-ressorts, sont bien en mal de fournir dans leur formulation classique, voir chapitre 2), mais en contrepartie

est extrêmement coûteuse en temps de calcul d'une part, et d'autre part ne permet pas de prendre en compte facilement les interactions entre les structures. Ainsi, si les modèles discrets permettent une visualisation temps réel des déformations d'une structure, les codes éléments finis nécessitent couramment plusieurs minutes de calcul pour une élasticité linéaire, voire plusieurs heures lorsque des hypothèses de non linéarité sont requises. On comprend bien ici que le chirurgien n'acceptera pas des outils de simulation dont les temps de calcul risquent de rallonger la durée de l'intervention, même s'il s'agit de quelques minutes supplémentaires. De la même manière, leur proposer des outils qui ne produiraient qu'une reproduction approchée des comportements réels ne serait pas exploitable. On assiste alors à un rapprochement des deux domaines d'application précités (simulateurs et modèles), jusque-là disjoints .

Ainsi, une des pistes serait de réduire le coût de calcul des modèles continus en utilisant des méthodes de pré-calcul, voire d'apprentissage pour « rejouer » les relations, linéaires ou non, entre sollicitations externes et déformations de la structure. Pour ma part, je souhaitais explorer de nouvelles pistes qui me semblent intéressantes pour mieux contrôler l'erreur commise par les modèles discrets, notamment si l'on désire construire un modèle géométrique générique et introduire des informations extérieures, plus spécialement physiologiques, pour personnaliser la simulation à chaque patient. Il me paraît aussi ici très intéressant d'explorer des voies communes et de profiter de la complémentarité avec les membres des équipes avec qui je collabore, pour proposer des modèles combinant continu et discret, éventuellement à différentes résolutions, et où les compétences présentes au DIM de Concepción dans le domaine de l'analyse numérique me paraissent incontournables.

Ainsi, dans ce chapitre, je présente les contributions apportées en Informatique Graphique autour d'une approche applicative, dans le domaine de la prise en compte du *Brainshift*. Dans une première section (§ 3.1), je décrirai ce phénomène, ainsi que les enjeux et les problématiques que cela pose en termes médicaux pendant une opération de neuro-chirurgie, et je donnerai quelques pistes à suivre pour une meilleure compréhension et ferai des propositions sur l'apport de l'informatique pour guider le médecin aussi bien dans sa phase d'établissement du diagnostic et du mode opératoire, que pendant l'opération. Ensuite, on mettra en évidence le besoin d'une modélisation précise et rapide, et surtout l'intérêt d'intégrer les structures internes (jusque-là négligées) pour proposer une simulation utilisable en per-opératoire (§ 3.2). Cette solution s'appuie sur une modélisation *Simplexe*, qui présente l'avantage d'unifier sous un même modèle les phases de segmentation de l'image, et la phase de construction du maillage géométrique sur les données extraites. Pour autant, certaines opérations sont beaucoup plus simples à effectuer sur des triangulations que sur les maillages *Simplexes*, nous avons donc proposé un algorithme efficace et optimale pour passer d'une représentation à l'autre (3.3). Enfin, fort d'un maillage adapté, et dans lequel les structures internes collent elles aussi à la physiologie spécifique de chaque patient, le besoin s'est ensuite fait sentir d'avoir une méthode de résolution rapide en 3D, permettant de prendre un compte des structures comme les membranes et surtout les ventricules dans lesquels s'écoule lentement le liquide cébrospinal. Nous avons donc proposé une nouvelle formulation (§ 3.4), pour la simulation des interactions fluide/solide. Cette formulation acoustique a fait l'objet d'une implémentation efficace, avec une résolution par parties par la méthode des Éléments finis. Et nous avons aussi proposé un estimateur résiduel d'erreur *a posteriori* pour permettre l'adapta-

tion du maillage et réduire le nombre de degrés de liberté du système tout en conservant la qualité de la solution.

### 3.1 Étude et modélisation du *Brainshift* en neurochirurgie

Les opérations de neurochirurgie entraînent des déformations du cerveau, dues principalement à ce que l'on appelle le *brainshift*. Ce terme correspond aux déplacements subis par le cerveau et les déformations qui apparaissent dès que le chirurgien ouvre la boîte crânienne ou lorsqu'il y a résèque des tissus tels que les tumeurs. Ces déformations font que les images préopératoires, sur lesquelles peut se faire une planification chirurgicale, ne correspondent plus à la forme du cerveau auquel le chirurgien est confronté et donc aux images prises pendant l'opération pour guidage et contrôle. Il est alors indispensable de recalibrer les images 3D préopératoires et les images 3D per-opératoires. Deux approches ont été proposées pour répondre à cette problématique. La première consiste à estimer, par comparaison de l'imagerie per-opératoire et de l'imagerie préopératoire, les transformations (rigides ou élastiques) correspondant aux déformations et déplacement du cerveau. La seconde approche vise à modéliser la bio-mécanique des tissus mous cérébraux et à utiliser ce modèle pour tenter de prédire les déformations résultant de l'ouverture de la boîte crânienne ou de la résection de tissus. C'est ce type d'approche que nous tentons d'aborder, en incorporant les comportements basés sur la physique et la mécanique, ainsi que la caractérisation selon différents critères physiologiques, cellulaires ou encore structuraux de ces tissus, caractérisation que l'on peut déduire de différentes modalités d'imagerie (l'IRM de diffusion étant certainement le plus prometteur).

Dans cette étude, nous nous intéressons à la modélisation bio-mécanique des tissus mous cérébraux, dans le cadre des opérations de neurochirurgie guidée par l'image. La simulation numérique des déformations permet de prendre en compte les déformations subies en per-opératoire par les structures cérébrales, (phénomène du *brainshift*), et qui affecte notamment le cortex, la tumeur et les ventricules. Le caractère peu prévisible de ces déformations dues à un nombre de facteurs importants (gravité, perte de LCS<sup>1</sup>, entre autres...), rend essentiel de disposer d'une simulation per-opératoire de qualité. Dans les modèles bio-mécaniques qui existent pour compenser le phénomène du *brainshift*, le cerveau est généralement considéré comme un tissu uniforme. Cependant, comme suggéré dans [MHM<sup>+</sup>98, WFG<sup>+</sup>00], ne pas prendre en compte les ventricules ou le *falx cerebri* (qui est une membrane rigide séparant les deux hémisphères) conduit à une prédiction incorrecte des déplacements des tissus pendant l'opération, notamment la transmission des déformations d'un hémisphère à l'autre, qui normalement est atténuée par la membrane. La forme de cette membrane est très importante, puisqu'elle sert aussi d'indicateur de récupération post-opératoire des tissus : déformée par la tumeur, elle reprend sa forme initialement plane lorsque la tumeur a été enlevée avec succès. Elle est par ailleurs assez facilement identifiable en imagerie US (le problème avec cette modalité étant de « passer » la barrière de la boîte crânienne). Parmi les travaux qui considèrent les struc-

---

1. Liquide Cérébro-Spinal (LCS) ou Liquide Céphalo-Rachidien (LCR) dans lequel baignent le cerveau et la moëlle épinière, et qui circule dans les 4 ventricules

tures internes, on peut citer [HRS02a] pour les ventricules, et [AWM05] qui est le seul à prendre en compte les ventricules et les membranes internes, mais avec un modèle d'élasticité non linéaire difficile à paramétrer et à utiliser en per-opérateur. Plus récemment, Garg [GDC<sup>+</sup>10] a publié une étude préliminaire (reprenant une première publication de la même équipe [MPK<sup>+</sup>99]) sur l'amélioration de la modélisation sub-surfacique du cerveau, ce qui par ailleurs prouve que cette piste est toujours d'actualité. Il montre ainsi comment l'intégration du *falx cerebri* lors de la simulation de déformations cérébrales permet d'obtenir des résultats corroborant les conclusions de Maurer [MHM<sup>+</sup>98]. Cependant, si le modèle utilisé, qui prend en compte le caractère biphasique des tissus, paraît séduisant, la segmentation des structures internes reste manuelle et nécessite l'intervention d'un expert.

Notre travail a été initié au sein des projets de coopération ECOS-Chili et STIC-AmSud sous le titre générique de « Neurochirurgie assistée par ordinateur : modélisation bio-mécanique des tissus mous cérébraux et développement d'un logiciel de neuro-navigation en per-opérateur ». L'objectif technologique de ce projet scientifique est d'étudier et de développer des systèmes permettant de répondre à plusieurs problématiques médicales, diagnostiques et thérapeutiques. Le travail de thèse de F. GALDAMES se situe dans cette thématique.

## 3.2 Un modèle adapté au patient, intégrant les structures cérébrales internes

La première étape consiste en la génération d'un maillage volumique adapté à notre problème. À partir d'images IRM préopératoires du cerveau, nous obtenons une première segmentation des images en adaptant une méthode basée sur des histogrammes, des opérateurs morphologiques et des informations de connexité [SYL02]. Les différentes intensités des tissus sont modélisées par courbes Gaussiennes pour calculer les seuils de la segmentation. La méthode est totalement automatique et rapide (env. 1 minute) et a montré d'excellents résultats pour l'ensemble des données dont nous disposons (Fig. 3.1). Ensuite, nous avons raffiné la segmentation en utilisant un modèle déformable de type maillage *Simplexe* [Del94]. Pour le construire, nous nous sommes basés sur un modèle développé au *Mc Connell Brain Imaging Center*, au Canada. Il s'agit d'un modèle diffus (chaque point a un degré d'appartenance aux différents types de tissus cérébraux) de l'anatomie cérébrale utilisé pour construire des images synthétiques de résonance magnétique [BIC], <http://mouldy.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>.

Ce sont ces différentes étapes du processus d'obtention d'un modèle du cerveau adapté à la morphologie du patient que nous allons présenter dans les paragraphes qui suivent. Nous commençons par montrer l'intérêt d'un maillage générique et comment nous en construisons un à partir d'images de synthèse et en nous aidant des maillages *Simplexes*. Ensuite, nous adaptons ce maillage à la géométrie du patient, en considérant d'abord le cortex pour un recalage global, puis en prenant soin d'inclure les structures internes (ventricules et membranes, entre autres.)

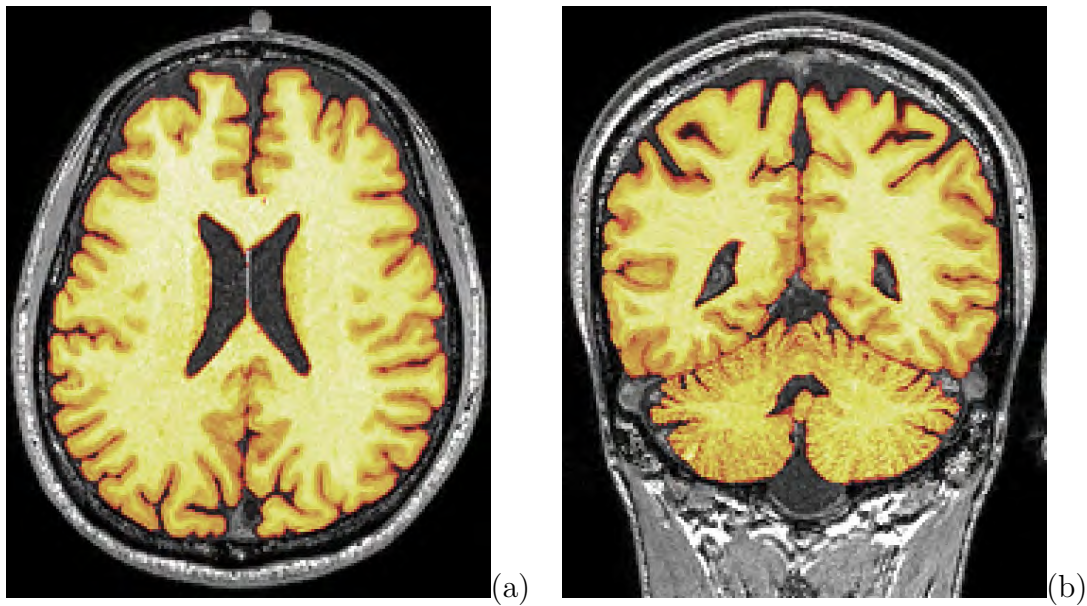


FIGURE 3.1 – Segmentation du cortex et cervelet sur une image RM : vues (a) axiale et (b) coronale

### Les maillages *Simplexes* comme outil pour la déformation d'un maillage générique

Disposer d'un modèle générique peut apporter beaucoup dans le processus de construction d'un maillage adapté au patient [CPLH99, NFP10], et cette genericité est un point essentiel dans le cadre du *Brainshift*, application ciblée dans ce travail. Cela permet de garantir que chacune des composantes requises (ventricules, hémisphères, etc.) est présente dans le modèle. En effet, il arrive que certaines structures soient difficiles à détecter, notamment lors de la présence de tumeurs qui vont souvent déformer fortement les tissus voisins (en particulier les ventricules, qui se réduisent au minimum). L'utilisation de maillages génériques permet d'allier gain de temps, puisque le maillage est déjà construit, et robustesse de modélisation, les relations entre les structures étant prédéfinies (Fig. 3.2).

Un maillage *Simplexe*  $M$  est défini par un ensemble de points  $P_i$  ainsi qu'une fonction décrivant la connectivité. Chaque sommet d'un maillage  $k$ -*simplexe* est relié à exactement  $k + 1$  voisins [Del97]. Ainsi, un maillage  $1$ -*simplexe* est un simple contour déformable composé d'une ligne polygonale. Un maillage  $2$ -*simplexe* est une surface déformable pour laquelle chaque sommet est connecté à 3 voisins exactement. Grâce à cette connectivité spécifique, un maillage  $2$ -*simplexe* peut être vu comme le dual topologique (mais non géométrique) d'une triangulation. Le principal avantage des *Simplexes* réside dans leur formulation géométrique simple, où l'angle simplexe permet de contrôler la courbure. La figure 3.3 présente les notations utilisées pour décrire un  $2$ -*Simplexe*.

Par conséquent, les maillages *Simplexes* peuvent décrire une grande variété de formes, sans aucune restriction topologique. Et cela en fait un outil puissant pour la représentation géométrique des structures anatomiques, adapté pour la visualisation, les mesures quantitatives, la planification de traitement chirurgical, la simulation, etc.

Et surtout, ces modèles nous permettent d'extraire des modèles génériques du cortex



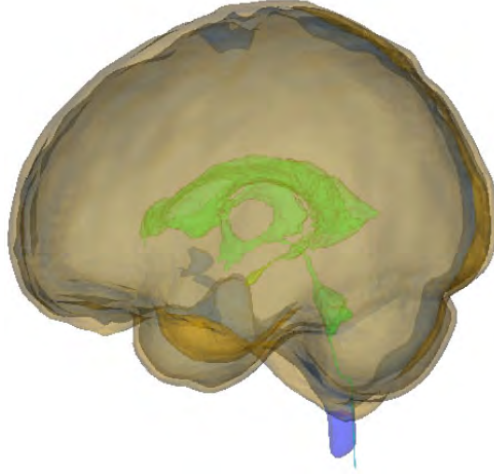


FIGURE 3.2 – Vue générale de notre modèle générique incluant les différentes structures externes et internes du cerveau.

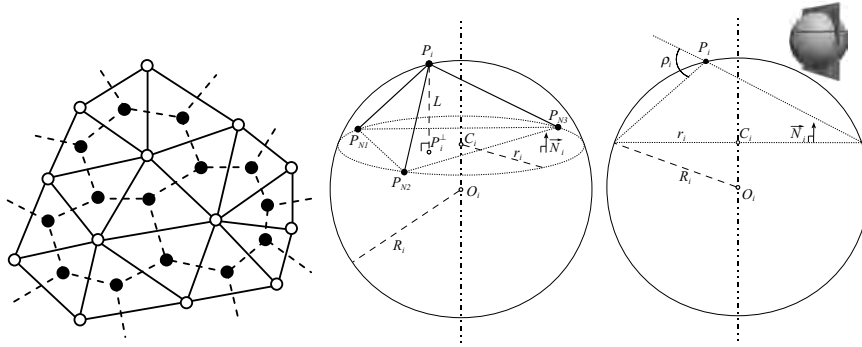


FIGURE 3.3 – La dualité Triangulation/*Simplexe*, ainsi que les notations et les diverses relations géométriques les reliant.

et des ventricules, en utilisant une méthode de recalage par minimisation de la distance quadratique entre le modèle *Simplexe* et la surface du volume segmenté. Le maillage est donc d'abord positionné globalement, puis déformé localement pour s'adapter à la géométrie du cerveau extrait des images (Fig. 3.5(c)). Dans un maillage *Simplexe*, la position de chaque point est exprimée en fonction de ses voisins et de paramètres de forme (Fig. 3.3). Les déformations sont alors très facilement réalisées, à l'aide d'entités géométriques discrètes. La dynamique du modèle est contrôlée par les lois de la physique Newtonienne :

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{P}_i}{\delta t^2} = -\gamma \frac{\delta \mathbf{P}_i}{\delta t} + \lambda \mathbf{F}_{int} + \kappa \mathbf{F}_{ext} \quad (3.1)$$

où  $m$  est la masse du point (= 1 généralement),  $\mathbf{P}_i$  la position,  $\gamma$  l'amortissement,  $\mathbf{F}_{int}$  les forces extraites du maillages pour obtenir une forme lisse, et  $\mathbf{F}_{ext}$  les forces extraites de l'image, pour pousser le maillage vers les frontières.

Dans l'équation 3.1, la définition précise des forces externes est primordiale, puisque ce sont elles qui permettent de guider le maillage vers les frontières naturelles. Elles sont calculées selon le profil normal en chaque sommet, de façon comparable au modèle *Active Shape* [CCTG95, WKL<sup>+</sup>01]. Cependant, dans notre cas, nous utilisons un modèle

déformable, et nous évitons d'avoir à recourir à une phase préliminaire d'apprentissage.

Une fonction  $G$ , représentant à la fois le maillage et l'image, est définie telle que  $G(x, i) = n_i \cdot \nabla I(x)$ , où  $I(x)$  est la valeur de gris de l'image au point  $x$ ,  $n_i$  le vecteur normal au point  $p_i$ , et  $\nabla$  l'opérateur gradient. Pour limiter l'amplitude de  $G$  pour qu'elle reste de l'ordre de  $g_{max}$ , on définit  $G_{limit}$  :

$$G_{limit}(x, i) = G(x, i) \cdot \frac{g_{max}(g_{max} + \|\nabla I(x)\|)}{g_{max}^2 + \|\nabla I(x)\|^2}.$$

On a ensuite besoin de critères de rejet pour  $G_{limit}$ . Les fonctions  $Q_k$  jouent ce rôle, sur les intervalles d'acceptation  $[min_k, max_k]$ .

$$F(x) = \begin{cases} \pm G_{limit}, & \text{if } Q_k \in [min_k, max_k] \text{ pour tout } Q_k \\ 0, & \text{if } Q_k \notin [min_k, max_k] \text{ pour quelques } Q_k \end{cases}.$$

Les fonctions  $Q_k$  et l'intervalle associé peuvent être différents selon les tissus. Si  $p_j$  est un point du maillage, le profil de recherche un point frontière potentiel sera :

$$x_{i,j} = p_i + j\delta n_i.$$

où  $\delta$  est une distance d'échantillonnage (généralement  $\delta = 1$ ) et  $n_i$  est la normale au point  $p_i$ . La figure 3.4 montre les profils de recherche pour un maillage donné. Le point cible sera :

$$x_i^{target} = p_i + \arg_{j=-l, \dots, l} \max [F_i(x_{i,j}) - Dj^2\delta^2] \delta n_i.$$

où  $2l$  est le nombre de points du profil de recherche, et  $D$  est le poids du terme de pénalité de distance permettant de privilégier les points les plus proches. Ainsi, la force externe appliquée en chaque point est définie par :

$$F_{ext}(P_i) = n_i \left( \frac{\nabla I(x^{target})}{\|\nabla I(x^{target})\|} (x_i^{target} - p_i) \right). \quad (3.2)$$

Le contrôle de la déformation aux frontières d'un maillage *Simplexe* ouvert n'est pas le même que pour les points intérieurs [Del97]. Dans ce cas, la normale aux points frontières  $p_i$  est définie spécifiquement, pour engendrer une déformation adaptée :

$$\begin{aligned} n_i &= T_i \times n_{N_i} \\ T_i &= \frac{p_{i-1} - p_{i+1}}{\|p_{i-1} - p_{i+1}\|}. \end{aligned}$$

où  $n_{N_i}$  est la normale au point voisin de  $p_i$  n'appartenant pas lui-aussi à la frontière, et  $p_{i-1}$ ,  $p_{i+1}$  sont les points précédant et suivant  $p_i$  le long de cette frontière. de cette manière, la normale à la frontière suit la courbure de la surface, ce qui permet de chercher correctement les points cibles pour la déformation du maillage (Fig. 3.4).

Cette technique nous permet donc de déformer un maillage pour le faire aller sur une frontière de l'image, nous allons voir comment nous nous en servons dans le paragraphe suivant.

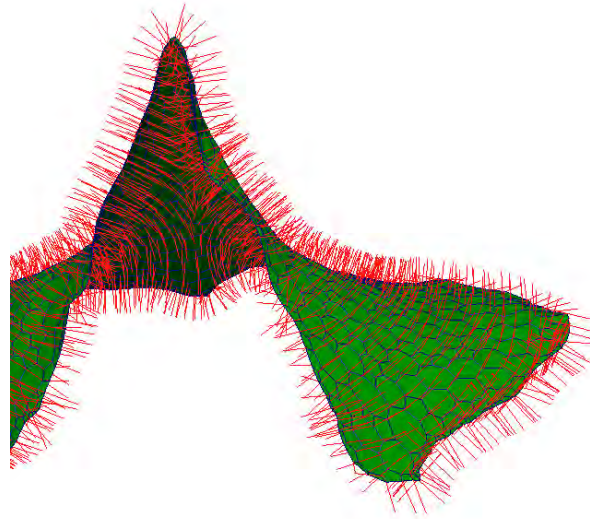


FIGURE 3.4 – Profils de recherche sur un maillage *Simplexe*, mettant en évidence le cas particulier des normales aux frontières.

## Adaptation à l'image RM du patient

La première étape consiste à éliminer tous les tissus à l'exception du parenchyme cérébral. Cela permet de connaître la position du cerveau et d'effectuer un premier ajustement du maillage. On utilise une technique identique à celle décrite par Shan [SYL02], en tenant compte du fait que l'on cherche la plus grande partie connexe. Cette étape n'est pas décrite ici, mais il faut savoir que l'on se base sur l'utilisation des histogrammes, des seuillages et des opérateurs morphologiques.

Ensuite, on effectue un ajustement global par des transformations géométriques. Le maillage est mis à l'échelle et translaté pour faire coïncider les boîtes englobantes sur le maillage et l'image segmentée. Pour trouver les paramètres optimaux, on utilise une méthode de type Levenberg-Marquardt pour la minimisation de la distance. Cette transformation est appliquée à tout le modèle. Sur la figure 3.5(a), on peut voir le résultat de la transformation affine sur le cortex. De la même manière, on ajuste les maillages des ventricules. À l'issue de ces opérations, on obtient une position suffisamment correcte pour effectuer une adaptation par modèle déformable, comme décrit précédemment. On trouvera une image du résultat sur le cortex figure 3.5(b).

Ces maillages simples sont ainsi tout à fait adaptés à un processus de segmentation, et peuvent ensuite être très facilement transformés en maillages triangulaires (leur dual topologique). On pourra se référer au paragraphe 3.3 où nous présentons une méthode optimisée pour effectuer cette conversion dans les deux sens. La conversion en une triangulation peut être utile en vue d'une visualisation, ou bien encore en vue de la génération d'un maillage à l'aide d'un mailleur volumique (TetGen <http://tetgen.berlios.de/>, par exemple). Nous obtenons ainsi un maillage tétraédrique compatible avec les méthodes de résolution par EF, distinguant le cortex, les ventricules, ainsi que la tumeur. Et nous en verrons un exemple dans les paragraphes suivants sur une simulation intégrant les membranes, ainsi qu'une utilisation plus complète dans la section 3.4.

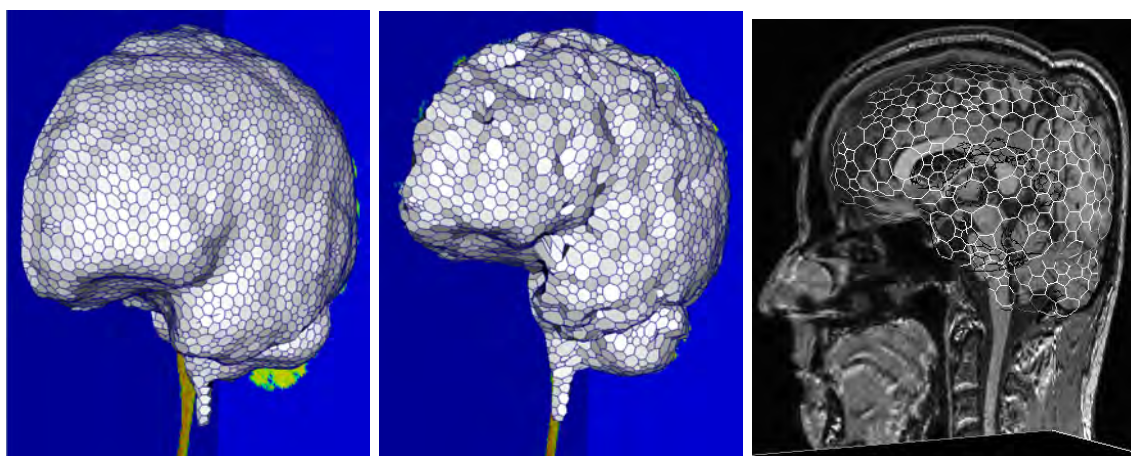


FIGURE 3.5 – (a) Cortex après l’adaptation par transformation affine globale (b) Après l’adaptation par un modèle déformable. (c) Superposition sur une coupe de l’image IRM du patient

### Intégration des structures internes

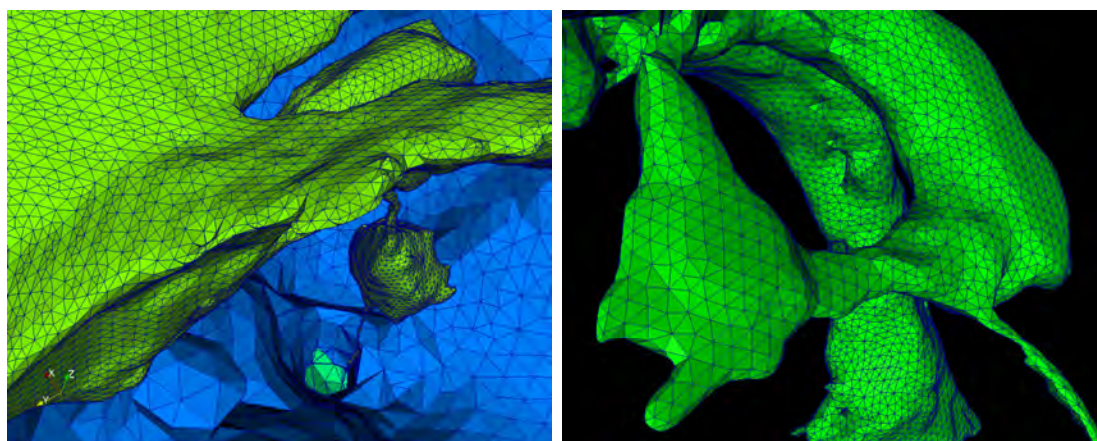


FIGURE 3.6 – (a) À l’intérieur du cortex (b) Détail de la qualité du maillage pour le ventricule et la finesse du canal

Pour unir les différents éléments du modèle du cerveau, nous avons besoin de réaliser l’intersection de deux surfaces. Il existe des travaux dans ce domaine, qui s’appliquent par exemple à deux surfaces paramétriques [CGdF00], ou à deux maillages volumiques paramétriques [ABM06], mais qui restent difficilement adaptables à des maillages. Parmi les techniques qui traitent directement de l’intersection de maillages triangulaires, on peut citer Lo *et al.* [HL04, SHL05]. Il s’agit d’un algorithme basé sur la recherche de proche en proche des triangles de l’intersection. Cependant, les points d’intersection sur les différents maillages ne sont pas optimisés, ce qui produit des triangles de mauvaise qualité.

Nous avons donc créé notre propre algorithme, finalement assez similaire à celui de Lo, pour l’union des différents maillages. Nous avons choisi de l’appliquer sur le maillage triangulaire, puisque ce processus est plus simple à effectuer sur celui-ci que sur un simplexe (Fig. 3.7). Cet algorithme est utilisé pour la jonction entre les structures (par exemple

cortex et ventricules, ou encore cortex et canal (Fig. 3.6 ci-dessus)).

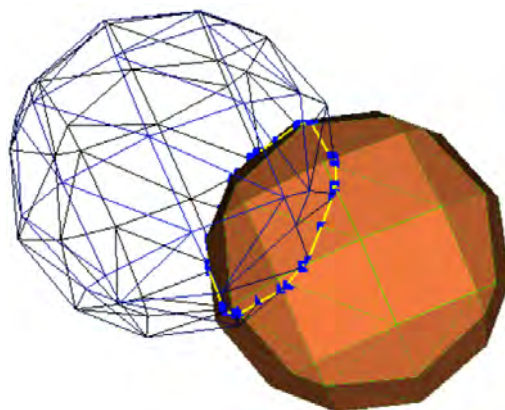


FIGURE 3.7 – Illustration de l'algorithme de détermination des points d'intersection de deux maillages sphériques

De plus, cet algorithme a été étendu dans un cas particulier, lorsque les maillages sont disposés perpendiculairement entre eux, et qui peut être vu comme une sorte de régularisation sur critères anatomiques. Ce type d'union est très utile pour unir les structures du *falx cerebri* et *tentorium cerebelli*, lesquelles, pendant le processus de déformation, glissent perpendiculairement au cortex. Dans ce cadre, une boîte d'outils génériques a été développée, permettant la manipulation morphologique de maillages, utilisable dans des applications plus générales. Par ailleurs, à notre connaissance, il n'existe pas de travaux sur l'intersection de maillages simples, ce qui pourrait constituer une piste de recherche annexe que l'on pourrait inclure dans le développement du modèle.

Les premiers résultats de la construction automatique des différentes structures cérébrales sont visibles sur la figure suivante (Fig. 3.8). Si leur intégration au modèle générique a déjà été effectuée à l'aide des techniques d'union et de transformation détaillées précédemment, il reste maintenant à adapter l'ensemble de ces structures internes à la géométrie du patient. Cela ne pose pas de problème pour les parties facilement identifiables sur l'image initiale (ventricules). Par contre, pour les structures plus petites, ou plus ou moins bien définies, cela s'avère plus ardu. Le travail en cours sur cette thématique est donc, non plus seulement la prise en compte des informations de l'image, mais de tirer parti du modèle générique, et des informations précieuses qu'il contient pour assurer le positionnement correct de toutes les structures dans le maillage.

### Validation de la segmentation des membranes.

Une fois que nous avons obtenu les différentes structures composant le cerveau, et construit ainsi notre modèle adapté au patient grâce à des techniques de déformation du modèle géométrique générique, il nous reste à confronter ce processus à la dure réalité de l'image médicale du patient.

Il y a actuellement un intérêt grandissant pour les procédés assistés par ordinateur, notamment en analyse des images médicales de toutes sortes. Le besoin se fait donc sentir de valider ces techniques. Malheureusement, les images médicales réelles (que l'on pourrait

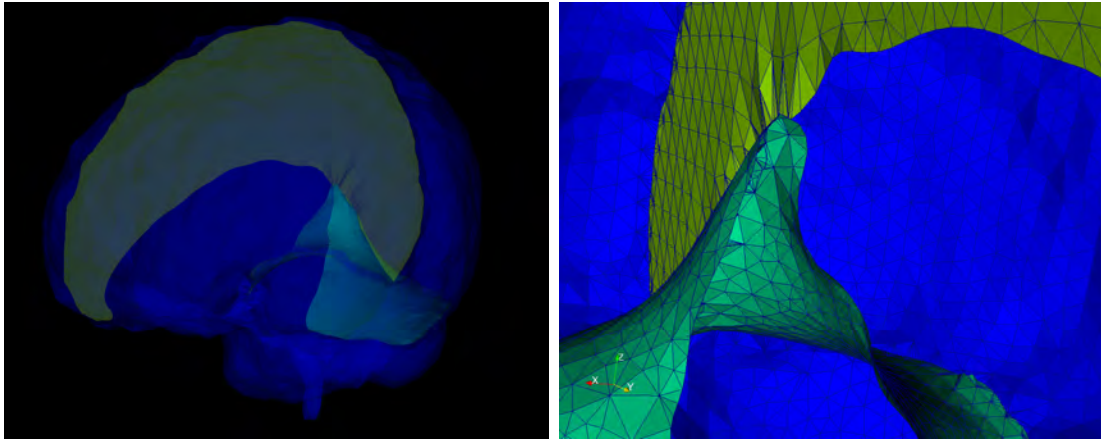


FIGURE 3.8 – (a) Vue générale des structures internes, en coupe, (b) Détail de la jonction entre le cortex, le *falx cerebri* et le *tentorium cerebelli*

qualifier de *Gold Standard* sont souvent très difficiles à obtenir. Et si l'on n'a pas la chance de pouvoir travailler en collaboration étroite avec une équipe médicale en mesure de nous fournir à la demande les images dont on a besoin (pas forcément par manque de volonté, mais souvent parce que cela nécessite des protocoles spécifiques), il existe quelques bases *Test* de données d'imagerie médicale, incluant parfois les structures segmentées. On citera parmi les plus complètes :

**The Internet Brain Segmentation Repository (IBSR) :** qui fournit des résultats de segmentations guidées par des experts, sur des images cérébrales en Résonance Magnétique. Leur but est d'encourager l'évaluation et le développement des méthodes de segmentation. Elles sont disponibles ici : <http://www.cma.mgh.harvard.edu/ibsr/>

**BrainWeb : Simulated Brain Database :** ces pages proposent une solution pour la validation d'une modélisation. *Brainweb* contient un ensemble de données IRM réalistes, produites par un simulateur d'IRM. Ces données sont à destination de la communauté de neuro-image pour évaluer les performances des méthodes d'analyses (<http://mouldy.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>).

**Segmentation Validation Engine :** ce site présente des ressources pour tester et évaluer les algorithmes de segmentation (<http://sve.loni.ucla.edu/>). Ils proposent des données en téléchargement, et il est aussi possible d'y soumettre des résultats. Leur serveur calcule alors automatiquement une série de métriques d'erreur pour comparaison.

Ainsi, comme on le voit, l'accès à ce genre d'information est finalement assez restreint. C'est pourquoi, à moindre échelle, nous avons mis nos résultats à disposition de la communauté de chercheurs du domaine, de la part desquels la demande est forte. On les retrouvera sur le site web dédié au projet STIC-AmSud PLOMO que nous avons mis en place avec l'aide de F. GALDAMES (<http://liris.cnrs.fr/plomo>). Cela comprend une description succincte des techniques utilisées, une galerie de photos et surtout la possibilité de télécharger les maillages sous différents formats parmi les plus classiques.

Pour en revenir à notre étude, nous utilisons les images issues de *ISBR*. On y trouve 18 images de Résonance Magnétique, segmentées. Ces données incluent plusieurs structures pour les deux hémisphères.

Pour estimer l'erreur faite lors du positionnement des membranes dans l'étape précédente, on mesure la distance de chaque sommet du maillage *Simplexe* déformé à la frontière entre les structures (lignes rouges, figure 3.9). Pour chaque sommet, cette distance est cherchée selon un profil normal à la surface, de manière identique à celle employée pour la segmentation. Pour calculer l'erreur globale, nous avons pondéré la distance de

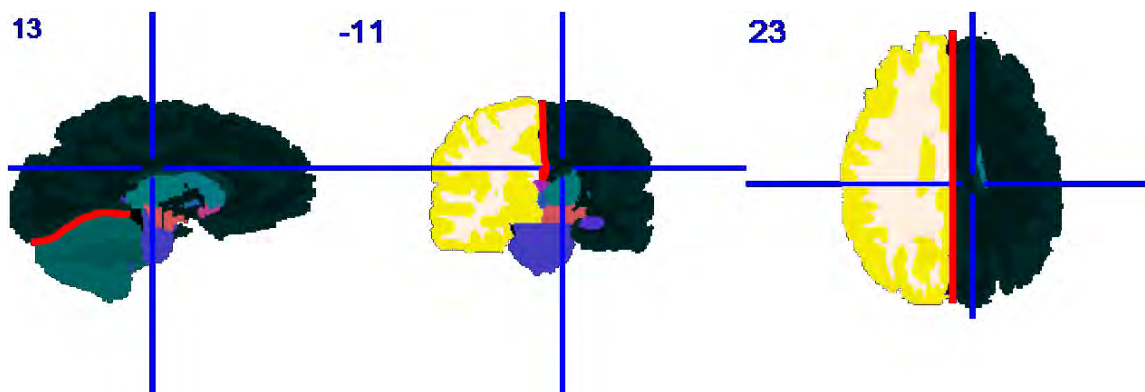


FIGURE 3.9 – Segmentation issue de la base *IBSR*, les lignes rouges représentant la position du *falx cerebri* et du *tentorium cerebelli*.

chaque sommet par l'aire du triangle qu'il représente sur la surface. Pour cela, nous utilisons la triangulation, car dans cette représentation duale, chaque triangle correspond à un point simplexe. La figure 3.10 illustre les résultats obtenus, avec pour cet exemple une erreur globale pondérée sur la segmentation du *tentorium* de 3,08 mm. Des travaux sont en cours pour étendre ces tests à d'autres bases disponibles sur le web (*IBSR*, *Brainweb* où encore *SVE*).

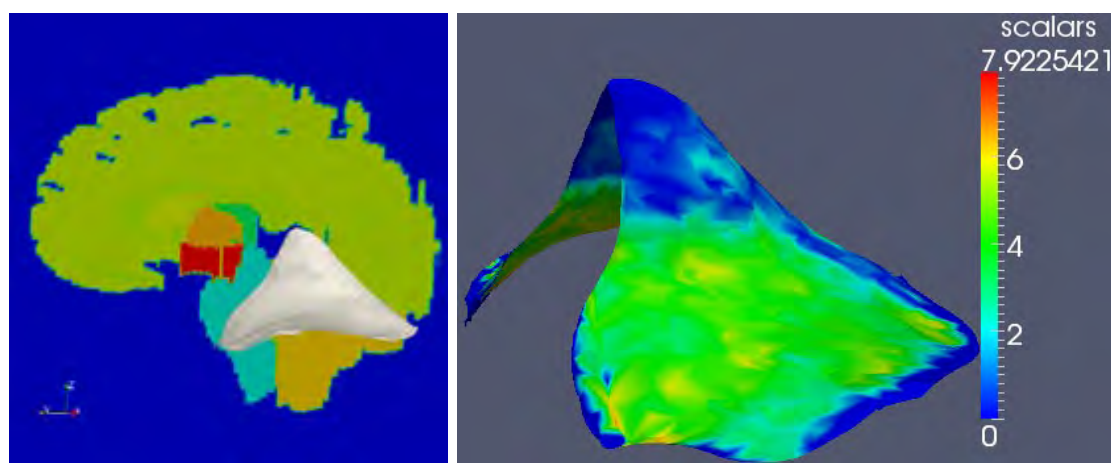


FIGURE 3.10 – (a) Vue 3D des structures internes segmentées (*IBSR*), dont *falx cerebri* et *tentorium cerebelli* (b) Maillage Simplexe du *tentorium cerebelli*, échelle de couleur selon l'erreur (moyenne 3,08 mm)

## Influence des membranes dans la simulation.

Comme nous l'avons vu en introduction de ce chapitre, l'intégration des structures internes est un gros plus lors de la simulation des déformations subies par les tissus cérébraux, que cela soit pour la prise en compte du phénomène du *Brainshift* comme dans notre application, ou encore lors de la simulation du grossissement des tumeurs cérébrales.

Pour cette dernière application, plusieurs modèles ont été proposés, dès les années 1990. Plus récemment, Clatz *et al.* [CSB<sup>+</sup>05] ont développé un modèle réaliste d'expansion des tumeurs cérébrales (intégrant l'effet de la masse et l'infiltration entre les structures), qui utilise un système numérique simple. Il s'agit d'un procédé de réaction/diffusion modulé par un champ de tenseur de diffusion pour simuler l'infiltration des cellules tumorales et des œdèmes. Cette technique a été utilisée pour permettre la génération de nouveaux *Gold Standard* pathologiques, en appliquant le modèle précédent à une image bien définie d'un cerveau sain, leur « vérité terrain » [PBG09]. Une extension a ensuite été proposée, pour améliorer la qualité des déformations locales.

Pour notre part, nous nous sommes inspirés des paramètres physiologiques de ces études pour déterminer les caractéristiques des différents tissus (même si nous nous limitons dans cette première étude aux seuls parenchyme et membranes internes). Ainsi, la figure 3.11 présente une simulation réalisée dans *Abaqus*® (module Standard, modélisation Statique) sur un maillage tétraédrique du cortex. La charge appliquée consistait en une accélération de la gravité de  $0.98 \text{ m/s}^2$  appliquée à tout le modèle, et nous avons contraint toute la partie droite (en bleu, en bas sur l'image). Les déformations sont de l'ordre du centimètre.

La figure 3.12 montre l'influence des membranes internes, dans les mêmes conditions de simulation. Celles-ci sont prises en compte dans le modèle en tant que surfaces intégrées, et modélisées par des triangles. Et l'on voit clairement que la déformation de la partie gauche est contrainte par la présence de la membrane entre les deux hémisphères.

Les valeurs utilisées sont les suivantes :

**Parenchyme :** Module de Young =  $200000 \text{ Pa}$ , coefficient de Poisson = 0,30 et densité =  $1000 \text{ kg/m}^3$

**Membranes :** Module de Young =  $694 \text{ Pa}$ , coefficient de Poisson = 0,30, densité =  $1000 \text{ kg/m}^3$ , épaisseur =  $0.5 \text{ mm}$

Ces résultats tout récents de la simulation ouvrent des portes vers une meilleure compréhension du comportement mécanique structures cérébrales, pour tenter à plus long terme de prédire les déformations des tissus, et d'intégrer ces prédictions dans les procédures utilisées en routine en per-opératoire. Il reste cependant nécessaire de complexifier le modèle, en intégrant plus de structures, au minimum les ventricules. Et ensuite, pourquoi ne pas différencier la matière blanche et grise selon leur intensité dans l'image. Couplé à un modèle physique adapté, cela permettrait des simulations beaucoup plus réalistes. On pense tout naturellement aux déformations induites par une crâniotomie au cours d'un acte de neuro-chirurgie. Pour l'instant, notre segmentation ne permet pas de différencier la matière blanche et grise, il s'agit de tout un domaine de recherche, et nous sommes plus intéressés aux structures internes qui nous semblaient négligées dans les simulations existantes.



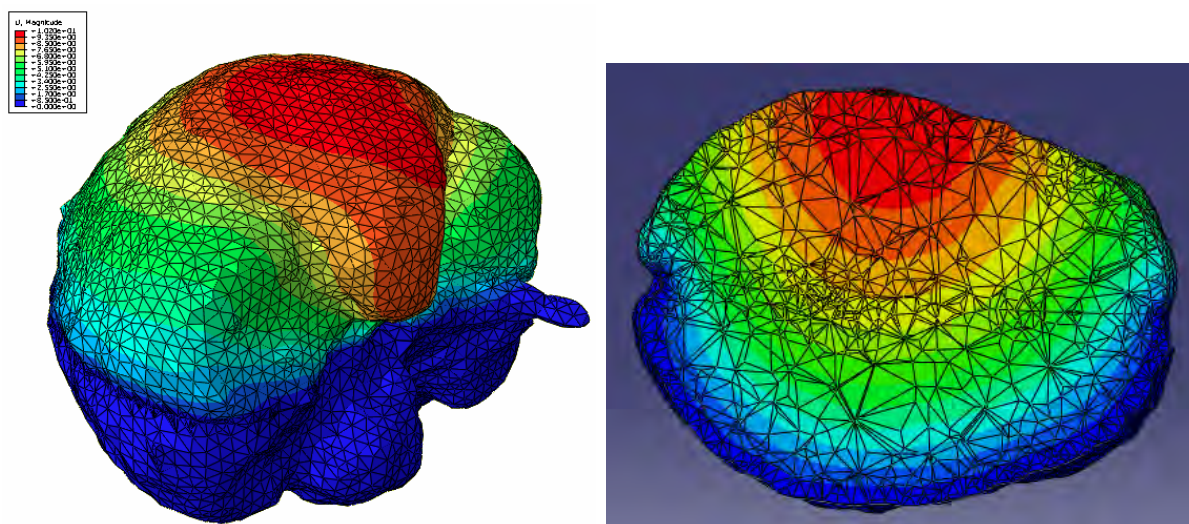


FIGURE 3.11 – Simulation de la déformation des tissus cérébraux sous l'action de la gravité, cortex sans structures internes (a) vue 3D (b) coupe axiale

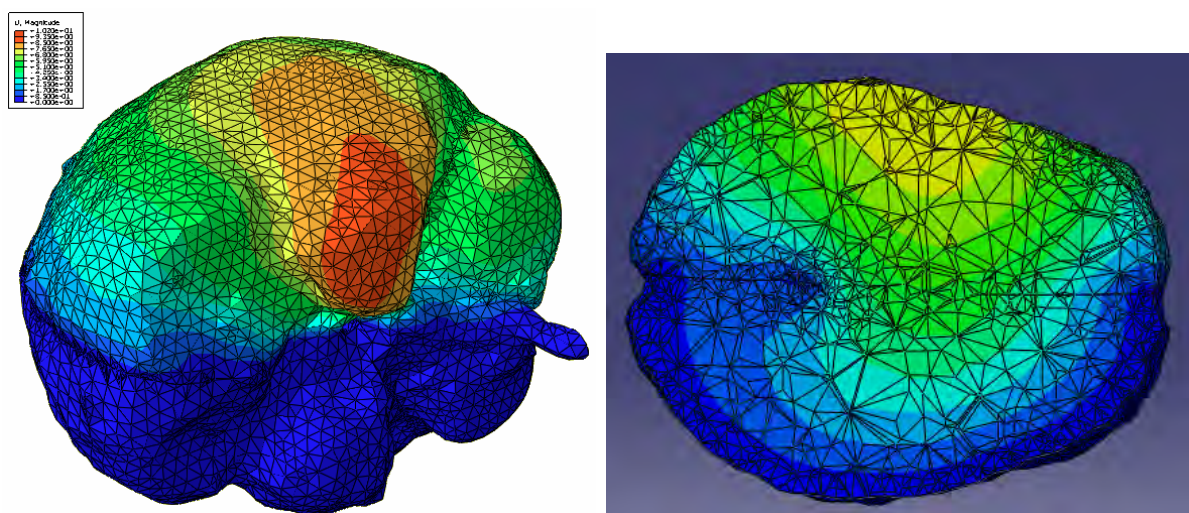


FIGURE 3.12 – Simulation de la déformation des tissus cérébraux sous l'action de la gravité, influence de l'insertion des membranes : *falx cerebri* et le *tentorium cerebelli* (a) vue 3D (b) coupe axiale

D'un autre côté, on pense se servir de notre modèle physiologique et bio-mécanique pour simuler la croissance de tumeurs. Pas forcément de façon aussi réaliste que dans [CSB<sup>+</sup>05] ou ils prennent en compte les valeurs d'intensité des tissus dans l'image, mais plutôt de façon géométrique, en appliquant des forces de pressions sur une structure simulant la tumeur par exemple. Cela permettrait, à notre tour, de disposer d'images *Gold Standard* utilisables pour simuler l'opération « inverse », c'est-à-dire la résection des tumeurs pendant un acte de neuro-chirurgie tenant compte des altérations dues au *Brainshift* ; et dans une prochaine étape, pallier, par une prédiction suffisamment précise, le manque de données actualisées pendant l'opération.

### 3.3 Conversion entre 2-*Simplexe* et triangulation

Comme nous venons de le voir dans les paragraphes précédents, les maillages *Simplexes* peuvent rendre de grands services. Cependant, pour de nombreuses applications, les *Simplexes* ne sont pas forcément les plus adaptés. Par exemple, il existe différentes techniques pour générer les tétraèdres ou hexaèdres internes à une surface [Owe98a], mais en général, celles-ci requièrent en entrée une représentation qui définisse clairement la géométrie, avec des faces planaires et sans auto-intersections entre les éléments. Une triangulation est éligible. Par contre, un *Simplexe* ne satisfait pas ces conditions, puisque les faces ne sont pas forcément coplanaires. Le rendu ou le calcul de surface sont d'autres tâches où il vaut mieux utiliser une triangulation.

Ainsi, comme deux types de maillages (triangulaire et simplexe) sont utilisés dans ce travail, il est nécessaire d'avoir une méthode de transformation qui diminue la perte d'information en passant de l'une à l'autre. Le maillage *Simplexe* est le dual topologique de la triangulation, mais malheureusement ce n'est pas son dual géométrique [Del99a]. Il n'est alors pas possible de définir un homéomorphisme entre leurs sommets respectifs, et il en résulte une perte d'information et donc une altération de la géométrie lors de la conversion de l'un vers l'autre, quelque soit le sens de cette conversion.

Le procédé le plus courant pour faire cette transformation est de définir l'ensemble des sommets du nouveau maillage par le centre de gravité de chaque face du maillage initial. Cependant, il en résulte un lissage important des caractéristiques locales du maillage ; la forme originale (courbure), pas plus que le volume, ne sont respectés. Une alternative serait de calculer le centre de gravité de chaque face, puis d'insérer ce point aux autres faces avant de réaliser la triangulation. Et bien que cette méthode permette de réduire l'altération de la géométrie pendant le procédé, le maillage résultant n'est plus le dual du maillage initial, et, de plus, cela augmente considérablement le nombre de points. Il serait alors possible de ne considérer que les sommets des faces, mais la dualité topologique ne serait pas respectée pour autant. Par ailleurs, le procédé inverse permettant d'obtenir un maillage *Simplexe* à partir d'une triangulation ne serait pas évident. Pour toutes ces raisons, il est nécessaire d'avoir une méthode fiable pour faire ces conversions, avec une altération contrôlée de la géométrie. Pour ceci, une technique inspirée de [Yan05a] a été mise en application. Les plans tangents aux points du maillage simplexe et les plans des triangles sont utilisés pour effectuer la transformation.

Du point de vue géométrique, le problème peut se réduire à trouver une interpolation satisfaisante du centre de chaque face, de s'en servir pour construire le maillage dual. La subdivision, les surfaces variationnelles, les *Splines* traditionnelles ou encore les surfaces implicites ont déjà été utilisées pour interpoler des points d'une surface maillée. Ici, la nécessité d'une méthode simple et directe se fait sentir ; ce qui nous conduit vers une interpolation géométrique, basée sur la distance aux plans tangents des différents points de chaque face.

Une mesure de similarité a été utilisée avec succès [RR96a] pour calculer une erreur géométrique locale basée sur la distance maximale à un ensemble de plans, dans le but de simplifier des surfaces triangulées. Dans un travail équivalent, une autre mesure de similarité a été employée, basée sur une somme pour obtenir une erreur quadratique [GH97a, HG99a]. Plus récemment, une technique de raffinement de triangulation a

été proposée [Yan05a]. Elle consiste en un *split* des faces ainsi qu'une interpolation basée sur la distance de minimisation sur tout le voisinage des plans des triangles. Il est à noter ici que notre principal objectif est de convertir des maillages, et non de les simplifier.

Ainsi, nous nous sommes inspirés de ce dernier travail pour proposer un procédé pratique et efficace pour passer d'un maillage à l'autre. Dans notre cas, la principale différence est que la mesure d'erreur est utilisée pour trouver le point dual d'une face du maillage initial. Ce travail, plutôt théorique, a été soumis, il y a quelques temps déjà, dans la revue *Computer Aided Geometric Design* (<http://www.elsevier.com/locate/cagd>, [GJ10]), une des plus prestigieuses du domaine. Il est présenté en détail dans les pages suivantes. On y trouvera en outre une présentation plus complète des maillages *2-Simplexes*.

# From Triangulation to Simplex Mesh: a Simple and Efficient Transformation

Francisco J. GALDAMES<sup>a,c</sup>, Fabrice JAILLET<sup>b,c</sup>

(a) Department of Electrical Engineering, Universidad de Chile, Av. Tupper 2007, Santiago, Chile

(b) Université de Lyon, IUT Lyon 1, Département Informatique, F-01000, France

(c) Université de Lyon, CNRS, Université Lyon 1, LIRIS, équipe SAARA, UMR5205, F-69622, France

Research Report RR-LIRIS-2010-021 – April 2010

## Abstract

In the field of 3D images, relevant information can be difficult to interpret without further computer-aided processing. Generally, and this is particularly true in medical imaging, a segmentation process is run and coupled with a visualization of the delineated structures to help understanding the underlying information. To achieve the extraction of the boundary structures, deformable models are frequently used tools. Amongst all techniques, Simplex Meshes are valuable models thanks to their good propensity to handle a large variety of shape alterations altogether with a fine resolution and stability. However, despite all these great characteristics, Simplex Meshes are lacking to cope satisfyingly with other related tasks, as rendering, mechanical simulation or reconstruction from iso-surfaces. As a consequence, Triangulation Meshes are often preferred. In order to face this problem, we propose an accurate method to shift from a model to another, and conversely. For this, we are taking advantage of the fact that triangulation and simplex meshes are topologically duals, turning it into a natural swap between these two models. A difficulty arise as they are not geometrically equivalent, leading to loss of information and to geometry deterioration whenever a transformation between these dual meshes takes place. Therefore, some effort as to be carried out to minimizing the shape degradation using an appropriate interpolation to find the position of the vertices in the dual mesh. An accurate and effective transformation technique is described in this paper, where we present a direct method to perform an interpolation of a simplex mesh to obtain its dual, and/or vice-versa. This original method is based on the distance minimization between the tangent planes of the mesh and vertices of each face. Finally, probing resulting mesh shiftings in both directions are commented.

**Keywords:** Simplex mesh; triangulation mesh; optimized surface interpolation; surface mesh transformation

## Introduction

Deformable model techniques are widely used in image segmentation tasks. Among these models, it is indubitable that simplex meshes are valuable candidates [3], for their favorable characteristics in this type of modeling, as its easy control and convenient way to model internal forces. With this type of meshes, as with triangulations, any topology can be described. Furthermore, simplex meshes and triangulations are topologically duals, and this allows us to naturally obtain a simplex mesh by applying a dual operation to the triangulation, and vice versa. On the other hand, very efficient algorithms exist to generate triangulations from a given geometry [9, 6], while this can be more arduous using simplex meshes. So, in some cases it could be appropriate to generate first a triangulation (from an isosurface, for example), and next to transform this latter into a simplex mesh, with the intention to controlling the deformation of the model [10].

Moreover, for many applications, simplex meshes are not suitable and triangulated meshes are required. For example, there are different meshing methods to generate inner tetrahedral or hexahedral elements [7], but in general they need as input a surface representation that clearly defines the geometry, with planar faces and without self-intersections between elements. Piecewise linear complex (PLC) [1] and triangulation are eligibles. However, simplex meshes do not meet these requirements since faces are not necessarily planar. One possibility would be to transform the simplex mesh into a triangulation before creating the volumetric mesh. Rendering and calculation of area, may be other tasks where it is preferable to handle triangulations instead of simplex meshes.

Triangulations and simplex meshes are topologically duals, but not geometrically equivalent [3]. It is not possible to build a homeomorphism between the set of coordinates of a triangulation and the one of its dual simplex mesh. Therefore, there is loss of information and geometry deterioration whenever a transformation between these meshes takes place. Currently, the most common way to perform this transformation is to determine the set of vertices for

the final mesh as the gravity center of each face of the initial mesh. However, in this case, mesh softening is very high; original shape (curvature) and volume is far to be accurately respected. An alternative to transform a simplex mesh into a triangulation, is to compute the gravity center of each face and next insert this point with the other face vertices before to perform a triangulation. Although this method reduces the geometry deterioration, the resulting mesh is not dual to the initial simplex mesh, and moreover, the number of points will rise considerably. It is also possible to consider only the face vertices, but the resulting mesh is either not topologically dual. Moreover, the converse process to obtain a simplex mesh from a triangulation is not straightforward. For all these reasons, it is useful to have a proper method to perform transformations between these two types of meshes with minimal loss of information, that is the purpose of this paper.

From a geometric point of view, the problem can be reduced to find an interpolation of the center of each face, and to build the dual mesh accordingly to these points. Subdivision, variational surfaces, traditional splines or implicit surfaces are amongst the most used techniques to find interpolating points in a mesh. As the requirement here is to get a simple and straightforward method, we have chosen a geometric interpolation, based on the distance to the tangent planes of the points of each face. A similar measure has been successfully used in [8] to compute a local geometric error based on the maximal distance to a set of planes, in order to perform triangular mesh simplifications. In an equivalent work, a similar measure has been employed, but this time a summation was used to obtain a quadratic error [4, 5]. In a more recent work, a method for refining triangulations has been developed [11]. It is based on face splitting and interpolation using distance minimization over the neighboring triangles planes. Here, it is worth to notify that our global objective is to perform a transformation between meshes, and not to refine them. However, we mainly got inspiration from this last work, but in our case the error measurement is applied to find the points of a dual mesh, to permit shifting between simplex meshes and triangulations, and conversely.

The paper is organized as follows. In section 1, we present essential background on simplex meshes, their characteristics and relationship with triangulations. The main part concerning the interpolation method used to find the dual mesh is explained in section 2. Application of this method to swap between meshes is shown in sections 3 and 4, where details can be found for each swap direction. Finally, some results are exhibited in section 5, followed by conclusions in 6.

## 1 Triangulation vs. simplex mesh

As stated in the introduction, a simplex mesh can be seen as the topological dual of a triangulation, each vertex of the simplex mesh corresponds to a triangle in the correspond-

ing dual triangulation (Fig. 1). However, simplex meshes and triangulations are not geometrically duals. Their geometry is determined by the coordinates of their vertices; nevertheless, the number of vertices is different between a simplex  $V_{SM}$  and a triangulation  $V_{TM}$ . The Euler's characteristic for a triangulations without holes and its dual simplex mesh states:

$$V_{TM} - \frac{V_{SM}}{2} = 2(1 - g), \quad (1)$$

where  $g$  is the genus of the mesh. As the sets of coordinates have different dimensions for a triangulation and its dual simplex mesh, no homomorphism can be constructed between them.

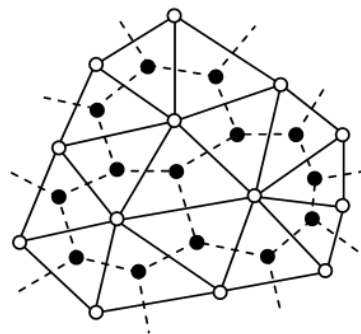


Figure 1: Simplex meshes and triangulations are topological but not geometrical duals. White dots: triangulation vertices ; Black dots: simplex mesh vertices.

Simplex meshes are privileged candidates to be used in segmentation methods based on deformable models. Each vertex of a simplex mesh has three neighbors; between them, a restricted number of entities is defined, the simplex angle and the metric parameters. The simplex angle  $\rho_i$  is defined for each vertex  $p_i$  by means of its neighborhood  $p_{N1(i)}, p_{N2(i)}, p_{N3(i)}$ . The normal vector to the plane defined by the three neighbors  $\vec{N}_i$ , the circle of center  $C_i$  and radius  $r_i$  defined by these neighbors, and the sphere of center  $O_i$  and radius  $R_i$  defined by the four vertices can easily be extracted from topology. Thus, the simplex angle can be defined as (Fig.2):

$$\begin{aligned} \rho &\in [-\pi, \pi] \\ \sin(\rho_i) &= \frac{r_i}{R_i} \text{sign} \left( \overrightarrow{p_i p_{N1(i)}} \cdot \vec{N}_i \right) \\ \cos(\rho_i) &= \frac{\|O_i C_i\|}{R_i} \text{sign} \left( \overrightarrow{O_i C_i} \cdot \vec{N}_i \right) \end{aligned} \quad (2)$$

The simplex angle can be considered as a measure of the height of vertex  $p_i$  with respect to the plane defined by its neighbors. The metric parameters  $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i}$  describe the relative position of a vertex according to its neighbors. The position of the projection  $h_i$  of vertex  $p_i$  on the plane

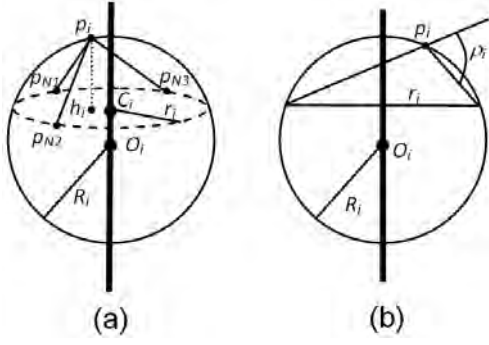


Figure 2: a) Tetrahedron formed by point  $p_i$  and its 3 neighbors  $p_{N1(i)}, p_{N2(i)}, p_{N3(i)}$ , with the circle defined by the neighbors, and the sphere containing those four points. b) Projection on a plane passing through  $O_i, C_i$  and  $p_i$ , revealing the simplex angle.

defined by its neighbors (Fig. 2) can be expressed as:

$$\begin{aligned} h_i &= \varepsilon_{1i} p_{N1(i)} + \varepsilon_{2i} p_{N2(i)} + \varepsilon_{3i} p_{N3(i)} \\ \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i} + \varepsilon_{3i} &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Thus, the metric parameters  $\varepsilon_i$  and the simplex angle  $\rho_i$  completely determine the position of a vertex in the following way:

$$p_i = h_i + L(r_i, d_i, \rho_i) \vec{N}_i, \quad (4)$$

where  $d_i = |C_i - h_i|$ , and  $L$  is defined as:

$$\begin{aligned} L(r_i, d_i, \rho_i) &= \frac{(r_i^2 - d_i^2) \tan(\rho_i)}{\chi \sqrt{r_i^2 + (r_i^2 - d_i^2) \tan^2(\rho_i)} + r_i} \\ \chi &= \begin{cases} 1 & \text{if } |\rho_i| < \pi/2 \\ -1 & \text{if } |\rho_i| > \pi/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

To perform transformations in any direction between these two types of dual meshes, we have to find an associated point  $q_u$  of the dual mesh  $M_2$  for each face  $f_u$  of the initial mesh  $M_1$ . When dealing with triangulations, faces are triangles; and conversely for simplex meshes, faces are polygons whose vertices are generally not coplanar. The resulting mesh  $M_2$  should have a regular shape and preserve the geometry defined by  $M_1$ , what is far from being straightforward. Trying to keep the geometry, we can impose  $q_u$  being close to the tangent planes  $\pi_i$  of each summit  $p_i$  defining the face  $f_u$ . Constraining  $M_2$  to have a regular shape, can be achieved by choosing  $q_u$  close to the center of the face  $f_u$ , i.e. minimize the distance between  $q_u$  and all  $p_i$ . Therefore, we must minimize the distance between a point  $q_u$  and a set of points and planes. Accordingly, the present method tries to compensate the lack of existing techniques on these aspects.

## 2 Interpolation based on tangent planes

The equation of a plane can be denoted as  $A \cdot p = 0$ , where  $A = [a, b, c, d]$  and  $p = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$  is a point lying on this plane. The coefficients  $a, b, c$  are the components of the unit vector  $\vec{N}$  normal to the plane, and  $d = -\vec{N} \cdot p$ . For  $q$  an arbitrary point of the space,  $|A \cdot q|$  is the distance to the plane.

Considering now a set of planes  $\pi_i$  represented by  $A_i \cdot p = 0$  ( $i = 1, \dots, L$ ), the distance between any point  $q = [x, y, z, 1]^T$  to each plane  $\pi_i$  is  $|A_i \cdot q|$ . On the other hand, let's consider a set of points  $p_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ). If we want to find the point  $q$  minimizing its distance to planes  $\pi_i$  and points  $p_j$ , the function to be considered follows:

$$D(q) = \sum_{i=1}^L \alpha_i |A_i \cdot q|^2 + \sum_{j=1}^M \beta_j |q - p_j|^2 \quad (6)$$

where  $\alpha_i$  and  $\beta_j$  are the weights for the distance to the planes (in order to respect geometry and curvature) and points (controlling shape regularity), respectively. Equation (6) can be rewritten in matrix form as:

$$D(q) = q^T Q q \quad (7)$$

where

$$Q = \sum_{i=1}^L \alpha_i A_i^T A_i + \sum_{j=1}^M \beta_j Q_j \quad (8)$$

and

$$Q_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_j \\ 0 & 1 & 0 & -y_j \\ 0 & 0 & 1 & -z_j \\ -x_j & -y_j & -z_j & x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Since  $Q_j$  and  $A_i^T A_i$  are symmetric matrices, then  $Q$  is also symmetric and can be written as:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} \quad (10)$$

To minimize the quadratic form of eq. (7), let's solve the following system of equations:

$$\frac{\partial D(q)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial D(q)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial D(q)}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Taking the partial derivatives of:

$$\begin{aligned} q^T Q q &= q_{11} x^2 + 2q_{12} xy + 2q_{13} xz + 2q_{14} x + q_{22} y^2 \\ &\quad + 2q_{23} yx + 2q_{24} y + q_{33} z^2 + 2q_{34} z + q_{44}, \end{aligned} \quad (12)$$

it can be noticed that the system in eq. (11) can be rewritten in a matrix form as:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Finally, the solution of eq. (13) follows:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{12} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -q_{14} \\ -q_{24} \\ -q_{34} \end{bmatrix} \quad (14)$$

where  $q = [x, y, z]^T$ .

### Weights calculation.

The solution of equation (6) can be understood as an affine combination of the generalized intersection of all planes  $\pi_i$  (first term) and the average of all points  $p_j$  (second term). This affine combination is controlled by the weights  $\alpha_i$  and  $\beta_i$ . For example, let's consider points  $p_1, p_2$  and planes  $\pi_1, \pi_2$  as shown on Figure 3. Planes intersect at point  $p_\alpha$ , and the average of the points (for  $\beta_i = \beta$ ) is  $p_\beta$ . The weights  $\alpha_i$  should reflect the importance of each plane to the interpolation; and this importance will be estimated in a different way for triangulations or simplex meshes, as this will be detailed in the next sections.

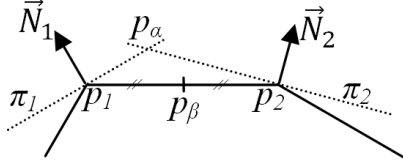


Figure 3: Solution of equation (6) as the affine combination of the generalized intersection of planes  $\pi_i$  ( $p_\alpha$ ) and the average of all points  $p_i$  ( $p_\beta$ , for  $\beta_i = \beta$ ).

The weights  $\beta_i$  can be calculated using an analogue method to the one used for mesh refinement in [11]. We are looking for an interpolated point  $q$  at the center of each face. Assuming that points  $p_i$  define a face, and  $\vec{N}_i$  are the unit normal vectors to the mesh at  $p_i$ , then we can estimate the position for  $q$  as:

$$\bar{q} = c_u + w \sum_{i=1}^L ((p_i - c_u) \cdot \vec{N}_i) \vec{N}_i \quad (15)$$

where  $w$  is a free positive parameter controlling the smoothness of the interpolation, and where:

$$c_u = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L p_i. \quad (16)$$

Substituting  $q$  with this estimation  $\bar{q}$  in eq. (13), it follows:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

Now, the weights  $\beta_i$  that minimize the residues  $\delta$  should be found, such that  $\bar{q}$  approaches the solution of equation (17) for those  $\beta_i$ . As  $q$  should lie close to the face

center, the same weight can be assigned to all points, *ie.*  $\beta_i = \beta$ . Using the original planes to express the residues  $\delta$ , it follows:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \sum_{i=1}^L \alpha_i a_i (A_i \cdot \bar{q}) + \beta \left( L\bar{x} - \sum_{i=1}^L x_i \right) \\ \delta_y &= \sum_{i=1}^L \alpha_i b_i (A_i \cdot \bar{q}) + \beta \left( L\bar{y} - \sum_{i=1}^L y_i \right) \\ \delta_z &= \sum_{i=1}^L \alpha_i c_i (A_i \cdot \bar{q}) + \beta \left( L\bar{z} - \sum_{i=1}^L z_i \right) \end{aligned} \quad (18)$$

So, finding the weight  $\beta$  can be achieved by minimizing  $\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2$ . The solution of  $\partial(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2)/\partial\beta = 0$  leads to:

$$\beta = \frac{TB}{B^2} \quad (19)$$

where:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^L \alpha_i (A_i \cdot \bar{q}) \vec{N}_i, \\ \text{and } B &= \sum_{i=1}^L (p_i) - L\bar{q} \end{aligned} \quad (20)$$

## 3 From triangulation to simplex surface mesh

In this section, we will see the first case, *ie.* details when performing the mesh transformation from a triangulation to a simplex surface. In this case, an appropriate point  $q_u$  on the new simplex mesh must be calculated for each triangular face  $t_u$ . Then, we need information for each triangle  $t_u$ , about the curvature of the mesh. Let us consider the tangent planes to the vertices  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) composing triangle  $t_u$ ; these planes  $\pi_i$  can be written as  $A_i \cdot p = 0$  as defined previously. The normal vectors that define these planes can be calculated as:

$$\vec{N}_i = \frac{\sum_{k=1}^{L_i} \phi_k \vec{N}_k}{\left\| \sum_{k=1}^{L_i} \phi_k \vec{N}_k \right\|}, \quad (21)$$

where  $\vec{N}_k$  ( $k = 1, \dots, L_i$ ) are the normals of the triangles  $t_k$  to which the vertex  $p_i$  belongs, and  $\phi_k$  is the angle of the triangle  $t_k$  at vertex  $p_i$  (Fig. 4).

To approximate the surface, the distance between the new point  $q_u$  and planes  $\pi_i$  is minimized. Again,  $q_u$  should not lie too far from the center of triangle  $t_u$  to preserve a regular shape, so  $q_u$  should minimize its distance to points  $p_i$ . As aforementioned, the direct minimization of eq. (6) will provide us an appropriate  $q_u$ .

Each weight  $\alpha_i$  is calculated based on the area  $a_i$  corresponding to the sum of the areas of all triangles  $t_k$  sharing  $p_i$  (Fig. 4):

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^3 a_j}. \quad (22)$$

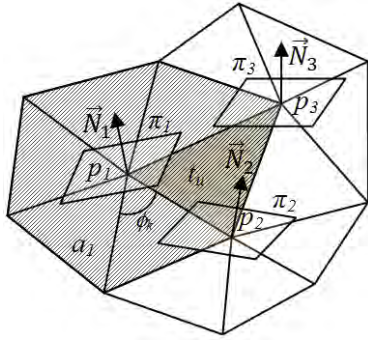


Figure 4: Scheme of triangle  $t_u$ , planes and points used to find vertex  $q_u$  of the dual simplex mesh.

This way, the distance to each plane is weighted according to the area of triangles that were used to calculate it. The weights  $\beta_i$  are calculated using the same technique as described in section 2, equation (19).

## 4 From simplex to triangulation surface mesh

In this section, we are dealing now with the converse case. A point  $q_u$  of the triangulation must be calculated for each face  $f_u$  of the simplex mesh. However, faces of a simplex mesh do not have a fixed number of points  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N_u$ ), and moreover they are generally not coplanar. The distance between  $q_u$  and the planes  $\pi_i$  tangent to the points  $p_i$ , is minimized to maintain the geometry of the mesh. These planes are defined by the points  $p_i$  and the normal vector at each point. In a simplex mesh, normals are defined by the plane containing the three neighbors  $p_{N1(i)}, p_{N2(i)}, p_{N3(i)}$  (Fig. 2) of the considered point  $p_i$  [3]. As in the inverse case,  $q_u$  should lie close to the center of the face  $f_u$  to preserve a regular shape. Figure 5 illustrates these planes and points. As previously, eq. (6) can be used to calculate  $q_u$  by minimizing the distance to planes  $\pi_i$  and points  $p_i$ .

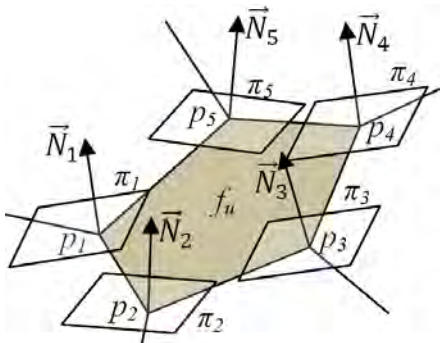


Figure 5: Scheme of face  $f_u$ , planes and points used to find vertex  $q_u$  of the dual triangulation.

The surface of the circle defined by the neighbors at each point  $p_i$  is a good estimation of the importance the plane  $\pi_i$  has within the mesh, thus its radius  $r_i$  is used to calculate the weights  $\alpha_i$  (Fig. 2). It follows:

$$\alpha_i = \frac{r_i^2}{\sum_{i=j}^{N_u} r_j^2} \quad (23)$$

Again, in this case, weights  $\beta_i$  are calculated using the same technique described in section 2, equation (19).

## 5 Results

When performing a transformation between simplex meshes and triangulations (and conversely), a similar mesh to the original one is expected, in order to produce minimal resultant geometric perturbation. In order to measure the quality of the transformations in both directions, the set of transformations ( $TM_1 \rightarrow SM_1 \rightarrow TM_2 \rightarrow \dots \rightarrow TM_k \rightarrow SM_k \rightarrow TM_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow TM_N \rightarrow SM_N$ ) is performed, where  $TM_k$  is a triangulation and  $SM_k$  a simplex mesh, with ( $k = 1, \dots, N$ ).

The present technique has been compared to the most commonly used at this time, *ie.* using the Center of Mass of each face to compute the corresponding point of the dual mesh [3]. Since all meshes  $TM_k$  between them, we have considered that the most appropriate measure was a simple point-to-point distance computation after each transformation cycle. This way, each triangulation is compared at each step to the first triangulation; and correspondingly, each simplex meshes is considered accordingly to the first simplex mesh obtained.

Figure 6 shows the distance graph measured for the surface of cerebral ventricles (1360 points/simplex faces, 2728 triangles/points), for 150 iterations. The point-to-point mean distances are expressed as a percentage of the bounding box diagonal of  $TM_1$  or  $SM_1$  for the triangulation or simplex mesh, respectively. Curve 6(a) shows results using the *Center of Mass* technique, while 6(b) draws results with our original technique. If we compare the results for a set of meshes, the *Center of Mass* technique produces high degeneration in some parts of the mesh (Fig. 7(b), (d) and (f)), losing most of the details present in the initial geometry. However, using an interpolation based on the tangent planes as presented in this article, it can clearly be seen on Fig. 7(c), (e) and (g), that the initial geometry is much better preserved.

As a complementary result, the Hausdorff distance was measured as well between initial and transformed meshes by using the *Metro* tool that adopts a surface sampling approach [2]. The *Prism* (92 vertices, 180 triangles; from *AIM@SHAPE*), *Block* (2132 vertices, 4272 triangles; from *AIM@SHAPE*), *Horse* (48485 vertices, 96966 triangles; from *Cyberware, Inc*), and *Bunny* (34834 vertices, 69451 triangles; from *Stanford 3D Scanning Repository*) meshes



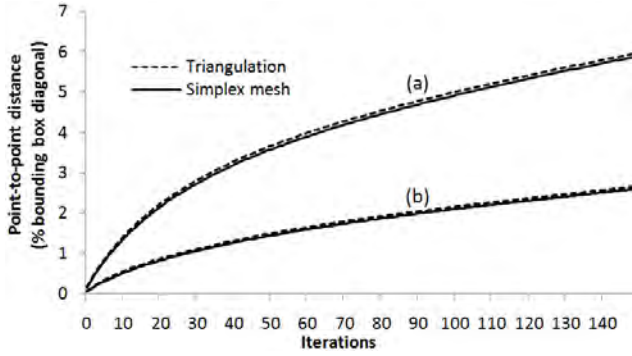


Figure 6: Curves of the mean error of the successive transformations of a cerebral ventricles surface (a) Transformation based on the faces center of mass. (b) Interpolation based on tangent planes.

have been considered; and the distance was measured after a cycle of transformations, i.e. swapping to simplex mesh and back to triangulation. Figure 8 shows the initial mesh with coloration according to this distance to the resulting one, and Table 1 shows the well known ratio between measured distances and the bounding box diagonal of the original mesh. The mean and RMS distances between two surfaces  $M_1$  and  $M_2$  are defined as:

$$\text{Mean distance}(M_1, M_2) = \frac{1}{|M_1|} \int_{p \in M_1} \text{HD}(p, M_2) ds$$

$$\text{RMS distance}(M_1, M_2) = \sqrt{\frac{1}{|M_1|} \int_{p \in M_1} \text{HD}(p, M_2)^2 ds},$$

were  $\text{HD}(p, M)$  is the Hausdorff distance between point  $p$  and surface  $M$ , and  $|M|$  is the area of  $M$ . The computation time was multiplied by approximately 30 with our method; eg. the computation time for the prism mesh was 0.007161 with the center of mass and 0.270000 seconds with our method<sup>1</sup>. As it can be guessed, in both cases, the main error is concentrated in high curvature areas. But, as previously seen, the error dramatically decreases with our technique (Fig. 8, right column) compared to the *Center of Mass* (left column).

Figure 9 shows a comparison between the initial (darker) and the resulting (lighter) meshes, using both methods. Errors are significantly lower in our case (b) than for the *Center of Mass* technique (a). Moreover, the resulting mesh tends to be inside (resp. outside) the initial mesh in areas with positive (resp. negative) curvature for the classic technique, while our technique avoids this construction artifact, thanks to the introduction of an appropriate weighting between element regularity and surface smoothness.

<sup>1</sup>developed in Python Language on AMD Athlon 62x2 Dual, 2GHz, 1Gb RAM

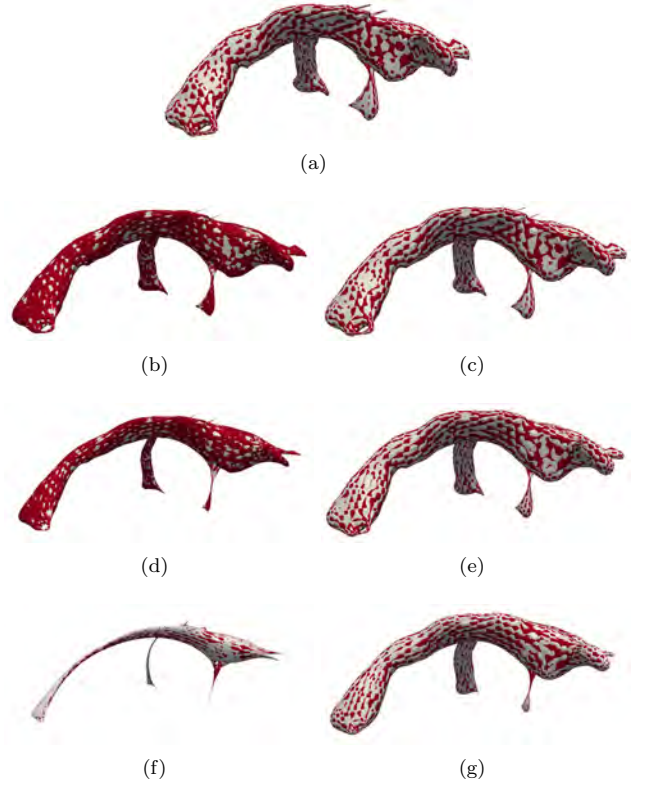


Figure 7: Cerebral ventricles mesh after successive transformations between simplex (lighter) mesh and triangulation (darker). Left: meshes obtained using the faces' mass centers, after (b) 5, (d) 15 and (f) 50 cycles. Right: meshes obtained using our technique, after (c) 5, (e) 15 and (g) 50 cycles.

## 6 Conclusion and discussion

We have presented a method to carry out transformations between triangulations and simplex meshes, and vice versa. Our method is straightforward and does not use iterations. It is based on the interpolation of the initial mesh to find the corresponding vertices of the dual mesh. The interpolation is based on a direct and local minimization of the distance to tangent planes, and points of each face. Our transformation technique was compared to the most frequently used method, which is based on placing the dual points in the center of mass of the initial faces, and the weaknesses of this latter have been illustrated. The performance of the proposed method was measured using a point-to-point distance between both triangulations and simplex meshes, after performing a chain of transformation. Moreover, we measured the Hausdorff distance between meshes after performing a cycle of transformations, i.e. after carrying out a transformation to simplex mesh and back to triangulation. The performance of our method was more than satisfactory, providing a more than significant reduction of the error, of nearly 50%. Thus, our method has

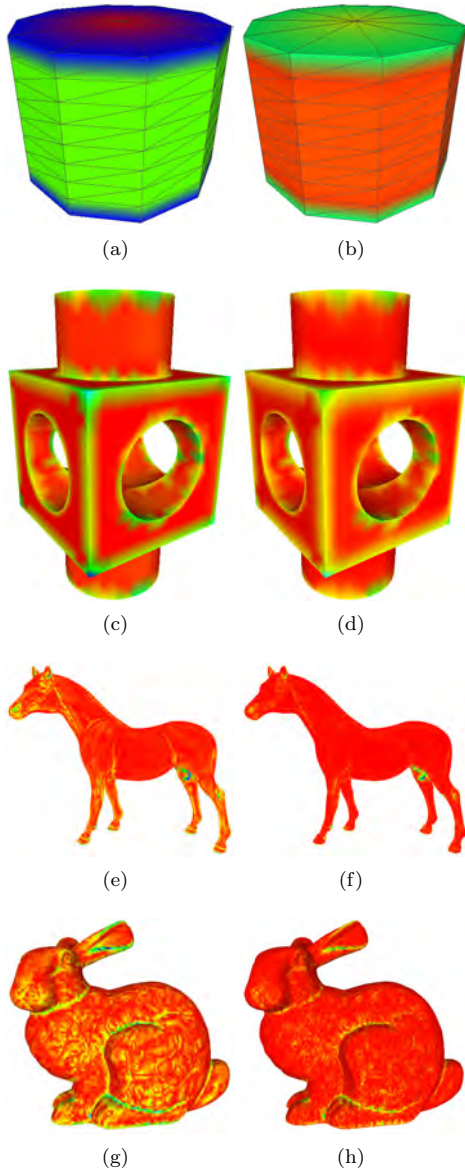


Figure 8: *Prism*, *Block*, *Horse* and *Bunny* meshes colored according to the Hausdorff distance after a cycle of transformations. 1) Left, subfigures a), c), e) and g) using *Center of Mass*. 2) Right, subfigures b), d), f) and h) using our method based on *Distance to the tangent planes*.

Table 1: Hausdorff distances.

		Center of Mass	Distance to Planes	Gain [%]
Prism	min	0,003537	0,000016	99,54
	max	0,060099	0,037205	38,09
	mean	0,033701	0,014088	58,20
	RMS	0,036620	0,018715	48,89
Block	min	0,0	0,0	0,0
	max	0,019153	0,014321	25,23
	mean	0,002397	0,001820	24,07
	RMS	0,003855	0,002840	26,34
Horse	min	0,0	0,0	0,0
	max	0,004596	0,003873	15,74
	mean	0,000126	0,000047	62,50
	RMS	0,000205	0,000107	48,08
Bunny	min	0,0	0,0	0,0
	max	0,003321	0,002761	16,85
	mean	0,000220	0,000096	56,36
	RMS	0,000324	0,000160	50,62

proven to be adequate to be used in any application requiring topological mesh transformation while preserving geometry, and without increasing complexity.

## References

- [1] C. Bradford Barber, David P. Dobkin, and Hannu Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 22(4):469–483, December 1996.
- [2] P. Cignoni, C. Rocchini, and R. Scopigno. Measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 17(2):167–174, June 1998.
- [3] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2):111–146, August 1999.
- [4] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *ACM siggraph proceedings*, pages 209–216, 1997.
- [5] Paul S. Heckbert and Michael Garland. Optimal triangulation and quadric-based surface simplification. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 14(1-3):49 – 65, November 1999.
- [6] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high-resolution 3d surface construction algorithm. *ACM Computer Graphics*, 21(4):163–170, 1987.
- [7] Steven J. Owen. A survey of unstructured mesh generation technology. In *International Meshing Roundtable*, pages 239–267, 1998.
- [8] Rémi Ronfard and Jarek Rossignac. Full-range approximation of triangulated polyhedra. In *Proceeding of Eurographics, Computer Graphics Forum*, volume 15, pages 67–76, August 1996.

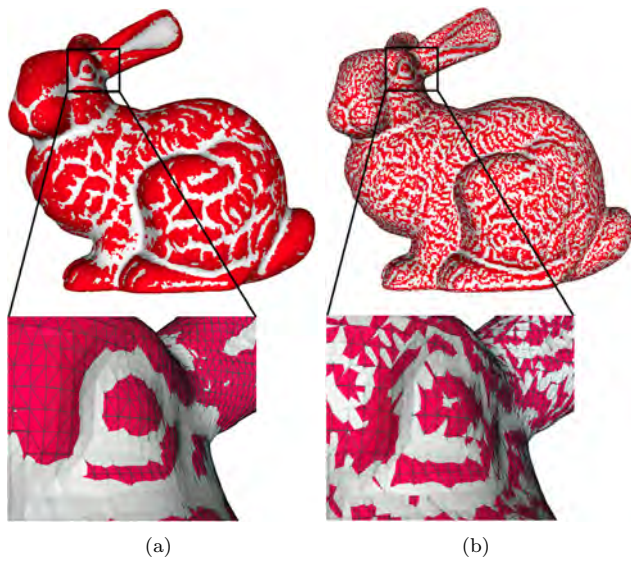


Figure 9: Comparison between the *bunny* original mesh (darker) and after a cycle of transformations (lighter). (a) Using *Center of Mass*. (b) Using our distance to the tangent planes.

- [9] G. M. Treece, R. W. Prager, and A. H. Gee. Regularised marching tetrahedra: improved iso-surface extraction. *Computer & Graphics*, 23(4):583–598, 1999.
- [10] Chenyang Xu, Dzung L. Pham, Maryam E. Rettmann, Daphne N. Yu, and Jerry L. Prince. Reconstruction of the human cerebral cortex from magnetic resonance images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(6):467–480, June 1999.
- [11] Xunnian Yang. Surface interpolation of meshes by geometric subdivision. *Computer-Aided Design*, 37(5):497–508, February 2005.

### 3.4 Analyse en éléments finis d'un couplage fluide/structure et maillage adaptatif

Comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, nous disposons d'un modèle générique de cerveau adapté au patient, incluant les principales structures cérébrales. Dans un deuxième temps, il est nécessaire de simuler les déformations des tissus mous du cerveau, et ses interactions avec le liquide cérébro-spinal (LCS). Il existe peu de littérature dans ce domaine, mais souvent les performances ne permettent pas son utilisation en per-opératoire. Ainsi, dans [HRS02a], un modèle élastique linéaire est employé. Les lois de Navier sont utilisées pour les tissus du parenchyme, alors que les équations de Stokes modélisent le fluide incompressible des ventricules. Cette étude est malheureusement restreinte à des images 2D, ce qui ne permet pas son intégration telle quelle dans un processus médicalisé.

Nous avons donc réalisé l'analyse en éléments finis de ce problème en 3D [ABJR07], dans lequel nous avons choisi une description linéaire de la partie solide. Nous avons considéré le cas d'un fluide homogène, pour lequel les vitesses sont faibles, ce qui est une bonne estimation du comportement du LCR. Pour un solide élastique (ou non), le problème est décrit sous forme de déplacements ( $\mathbf{u}$ ), mais pour le fluide nous avons choisi une formulation redondante en potentiel et en pression ( $\varphi, p$ ), qui présente un certain nombre d'avantages par rapport à la description en déplacements. Le premier intérêt est la simplicité de la formulation au niveau de la discrétisation : elle autorise un couplage linéaire entre le solide et le fluide, là où une formulation quadratique est requise pour l'équation de Stokes classique, ce qui fait diminuer grandement les temps de calcul. Cette approche a été à l'origine proposée par Morand & Ohayon (1995) pour les problèmes vibratoires, où ils l'ont appelée *Stiffness Coupling Formulation*, et a été ensuite analysée par l'équipe de Concepción.

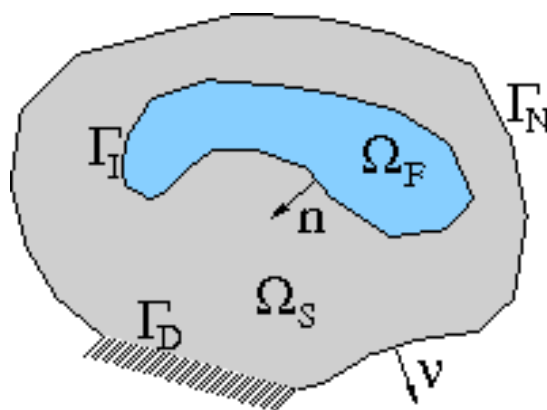


FIGURE 3.13 – Domaines Fluide/Structure (ou : le cerveau selon l'analyse numérique. . .)

## Une formulation pour le couplage fluide/structure

Étant données  $\mathbf{f}_S$ ,  $\mathbf{f}_F$  et  $\mathbf{g}$ , des forces s'appliquant sur chacun des domaines (Fig. 3.13), on cherche à résoudre  $(\mathbf{u}, \varphi, p)$  tels que :

$$\begin{aligned}
 \nabla p &= \mathbf{f}_F && \text{sur } \Omega_F, \\
 p + \rho_F c^2 \Delta \varphi &= 0 && \text{sur } \Omega_F, \\
 -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}_S && \text{sur } \Omega_S, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_I, \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} &= -p \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_I, \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{g} && \text{sur } \Gamma_N, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_D.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $\rho_F$  et  $c$  représentent la viscosité et la vitesse du son dans le fluide.

- Les deux premières lignes de l'équation 3.3 définissent l'équilibre des forces et la loi constitutive dans le fluide ( $\Omega_F$ ) en acoustique, et traduisent le comportement du liquide cérébro-spinal seul.
- La suivante exprime l'équilibre des forces dans le solide  $\Omega_S$ , selon une loi élastique, linéaire ou non selon les caractéristiques que l'on veut donner aux tissus du parenchyme.
- Puis viennent les lignes qui concernent l'interface ( $\Gamma_I$ ) à proprement parler entre le fluide et la structure. L'une traduit la continuité (pas de bulles entre les deux), et l'autre la non pénétration, avec des forces orthogonales à la jonction des deux milieux constitutifs.
- Enfin, les deux dernières lignes de l'équation 3.3 introduisent les interactions avec l'extérieur, par exemple avec les outils du chirurgien ( $\Gamma_N$ ) en conditions de Neumann, ou une fixation au niveau du cortex ( $\Gamma_D$ ) sous forme de conditions de Dirichlet.

Tout le travail d'analyse de ce problème a été réalisé par les membres du DIM, qui ont démontré qu'il était bien posé et qu'il convergeait. Comme vous pouvez vous en douter, ma contribution a été autre dans cette collaboration, au niveau de l'implémentation informatique et de l'application de cette formulation, pour simuler des déformations dans le cadre du *Brainshift*.

Ainsi, on peut remarquer que chaque domaine (solide ou liquide) peut être résolu de manière indépendante par la méthode des éléments finis. Ensuite, un couplage entre les deux systèmes est réalisé via des conditions limites appropriées, établissant ainsi un lien physique entre le solide et le liquide. L'écriture matricielle partielle du système précédent permet de se rendre compte (sans rentrer dans les détails...), qu'il est possible, connaissant les forces sur le fluide, de calculer les pressions qui s'y exercent à une constante près. En reportant cette pression dans la dernière ligne, on résout le système pour le fluide, et on trouve aussi la constante. En reportant une nouvelle fois dans la première ligne avec les contraintes trouvées précédemment, on effectue le couplage final.

	$3 * dim_s$	$dim_f$	$dim_f$
$3 * dim_s$	$K_s$	0	$-A$
$dim_f$	0	0	$F^t$
$dim_f$	$-A^t$	$F$	$-K_f$

où  $K_f$ , resp.  $K_s$  est la matrice de raideur dans le fluide, resp. le solide, et  $A$  correspond au couplage entre les deux, de dimension  $(3 * dim_s \times dim_f)$ .

L'implémentation a été réalisée en 2D et en 3D (Fig. 3.14), et pour chaque cas, nous avons validé sur un exemple analytique la convergence linéaire, respectivement quadratique, des normes H1, resp. L2, de l'erreur en déplacement, potentiel et pression de la solution approchée vers la solution analytique lorsque l'on raffine le maillage de manière régulière.

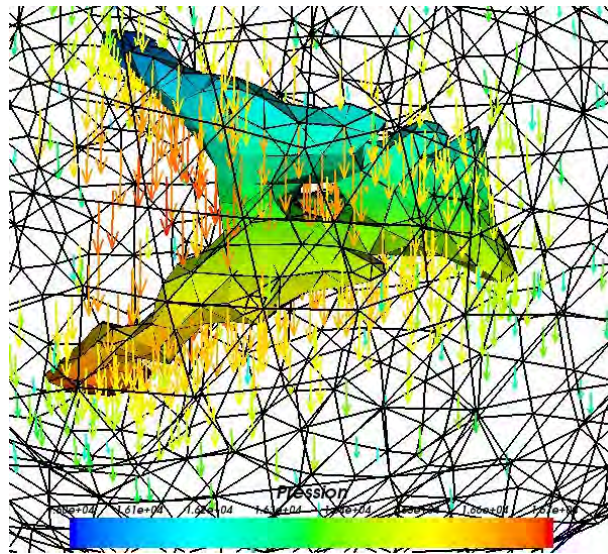


FIGURE 3.14 – Maillage et champ de déplacement du cortex et pression dans les ventricules sous l'action d'une force verticale.

Par ailleurs, la taille du système est assez réduite : 3 coordonnées spatiales par sommet dans le solide et 2 scalaires dans le liquide (pression et potentiel). Au final, dans le cas 3D, on résout deux systèmes de dimensions  $(dim_f \times dim_f)$ , pour le fluide (pression et potentiel), et un système  $(3 * dim_s \times 3 * dim_s)$  pour le solide. Cela permet d'obtenir des temps interactifs compatibles en per-opérateur : quelques minutes pour plusieurs dizaines de milliers de tétraèdres qui permet de rendre compte assez fidèlement de la géométrie du cerveau (Fig. 3.14), et qui sont compatibles avec l'actualisation requise par le chirurgien, qui est de l'ordre de 8 à 10 minutes sur une opération de plus d'une heure en moyenne.

## Adaptation du maillage

Nous disposons donc d'une méthode de modélisation des interactions fluide/structure applicable en neuro-chirurgie pour des modélisations suffisamment réalistes pour être un appui pour le chirurgien. Pourtant, il est possible de réduire la taille des maillages tout en conservant (voire en augmentant) la précision du calcul. L'idée est de raffiner les tétraèdres dans les zones où l'erreur est la plus grande. Malheureusement, dans le cas du *Brainshift*,

l'erreur est très difficile à évaluer, sauf par comparaison avec des images per-opératoires, ce qui est très coûteux et ne peut pas être réalisé avant l'opération. Nous avons alors proposé une technique automatique de raffinement du maillage basée sur un estimateur d'erreurs a posteriori résiduel [ABJR07]. Pour faire simple, on s'intéresse au résidu de l'erreur sur un élément (tétraèdre) pour chacune des variables, en différenciant les faces qui appartient au fluide, solide ou à la frontière. On considère aussi le saut entre les valeurs pour les tétraèdres de part et d'autre d'une face. Et chacun des estimateurs d'erreur ( $\eta^{\mathbf{u}}$  pour le solide et  $\eta^p$ ,  $\eta^\varphi$  pour le fluide) est enfin composé d'une combinaison du résidu et du saut. Voir page 14/28 de l'article des pages suivantes pour plus de détails. La justification mathématique de cette technique (convergence) a bien sûr été réalisée par le DIM. L'efficacité, définie par :

$$\theta = \frac{\eta}{\sqrt{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Gamma_S}^2 + \|p - p_h\|_{1,\Gamma_F}^2 + |\varphi - \varphi_h|_{1,\Gamma_F}^2}}$$

a elle aussi été validée. Pour cela, nous avons raffiné de manière régulière un maillage (en divisant le diamètre des tétraèdres  $h$  récursivement), sur lequel nous avons appliqué des contraintes dont nous disposons d'une solution analytique. L'estimateur a bien répondu, c'est-à-dire que l'erreur a diminué de manière uniforme en suivant l'évolution de  $h$ .

Elle a ensuite été intégrée dans notre application numérique avec de très bons résultats dans le cas de l'adaptation non-uniforme d'un maillage, même en présence de singularités, dans ce cas une concavité dans le fluide. La technique de raffinement est classique : on subdivise les éléments dont l'estimation de l'erreur est la plus grande (avec un seuil, en général 20% du plus grand estimateur), et l'on propage aux éléments voisins pour garder un maillage conforme. Ici encore, le maillage réagit bien, et l'on voit que le maillage dans le fluide est bien conforme sur l'interface avec celui du solide (Fig. 3.15). Tout ceci permet de simuler les déformations avant l'intervention, et d'optimiser de façon spectaculaire le nombre d'éléments du maillage générique, en fonction des données relatives à chaque patient.

Les pages suivantes présentent de façon détaillée le produit de cette collaboration fructueuse entre l'analyse numérique et l'informatique graphique [ABJR10], et permettra au lecteur averti de mieux appréhender la problématique. Cet article a été accepté dans une des meilleures revues du domaine, [IMA Journal of Numerical Analysis](#). On y retrouvera ma contribution surtout du bas de la page 17/28 aux suivantes.

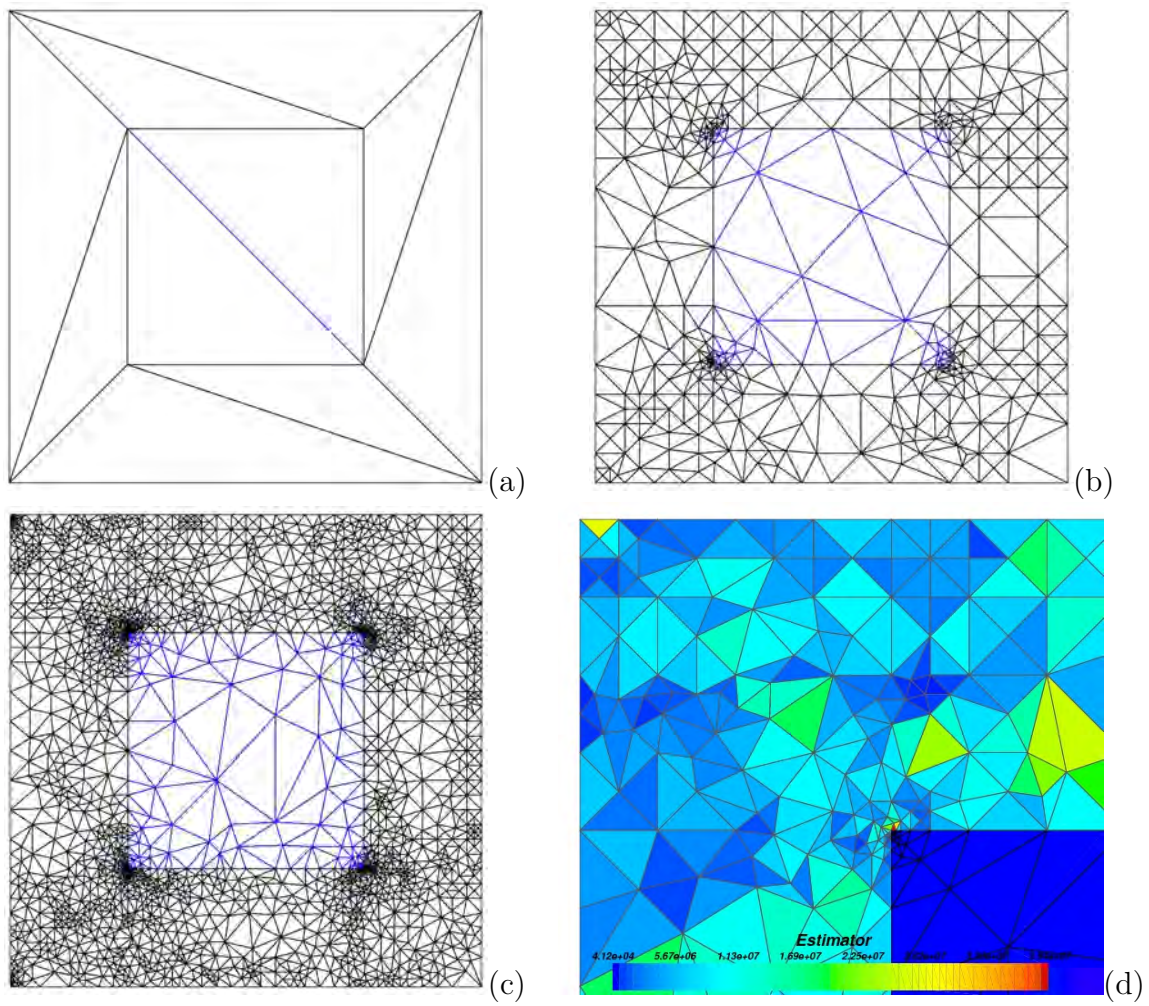


FIGURE 3.15 – Adaptation a posteriori en 2D. a) Maillage initial. b) et c) Itérations 15 et 30. d) Échelle de valeurs de l'estimateur (zoom).



## Finite-element analysis of a static fluid–solid interaction problem

RODOLFO ARAYA<sup>†</sup>

*CI<sup>2</sup>MA, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción,  
Casilla 160-C, Concepción, Chile*

GABRIEL R. BARRENECHEA<sup>‡</sup>

*Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, 26 Richmond Street,  
Glasgow G1 1XH, UK*

FABRICE JAILLET<sup>§</sup>

*Université de Lyon, CNRS UMR 5205, LIRIS—SAARA team, F-69622 Villeurbanne cedex,  
France*

AND

RODOLFO RODRÍGUEZ<sup>¶</sup>

*CI<sup>2</sup>MA, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción,  
Casilla 160-C, Concepción, Chile*

[Received on 31 January 2009; revised on 18 August 2009]

This paper deals with a fluid–solid interaction problem inspired by a biomechanical brain model. The problem consists of determining the response to prescribed static forces of an elastic solid containing a barotropic and inviscid fluid at rest. The solid is described by means of displacement variables, whereas displacement potential and pressure are used for the fluid. This approach leads to a well-posed symmetric mixed problem, which is discretized by standard Lagrangian finite elements of arbitrary order for all the variables. Optimal-order error estimates in the  $H^1$ - and  $L^2$ -norms are proved for this method. A residual *a posteriori* error estimator is also proposed, for which efficiency and reliability estimates are proved. Finally, some numerical tests are reported to assess the performance of the method and that of an adaptive scheme based on the error estimator.

**Keywords:** fluid–solid interaction; biomechanical brain model; finite elements; *a priori* and *a posteriori* error estimates; adaptive scheme.

### 1. Introduction

The need for computing fluid–solid interactions arises in many important engineering and biomedical problems. This paper deals with a specific problem of this kind arising from image-guided neurosurgery that can be seen from the mechanical viewpoint as a static source-coupled problem involving an elastic material containing a nearly incompressible fluid.

<sup>†</sup>Email: raraya@ing-mat.udec.cl

<sup>‡</sup>Corresponding author. Email: gabriel.barrenechea@strath.ac.uk

<sup>§</sup>Email: fjaillet@liris.cnrs.fr

<sup>¶</sup>Email: rodolfo@ing-mat.udec.cl

Current medical imaging devices (magnetic resonance, computed tomography, etc.) facilitate pre-operative planning (see Bucholz *et al.*, 1997; Paulsen *et al.*, 1999) and enable the surgeon to locate neuroanatomical structures of interest (see Hill *et al.*, 1998; Maurer *et al.*, 1998). However, the correspondence between preoperatively acquired data and current patient anatomy is typically not very accurate. In fact, it suffers from significant position and shape changes of the brain tissue, usually known as *brain shift*, occurring during neurosurgery (see Bucholz *et al.*, 1997; Hill *et al.*, 1998).

In order to predict brain deformation and thus to correct the preoperatively acquired images according to intraoperative effects, many biomechanical models of the human head have been developed (see, for instance, Fung, 1993). Classical models simulate the mechanical behaviour of the different anatomical structures just by varying their physical parameter values (see, for instance, Hagemann *et al.*, 1999). However, such simplification generally leads to nonaccurate simulations, particularly in the case of combined elastic and fluid-filled structures, as it happens, for instance, with the cerebrospinal fluid contained in the brain ventricular system (see Hagemann, 2001).

Recently, Hagemann *et al.* (2002) introduced a biomechanical brain model including fluid–solid interactions based on linear elasticity for the brain tissue coupled with the Stokes equation for the fluid. Our approach is simpler but, as will be shown below, allows for more efficient solution strategies. We consider a homogeneous fluid at rest for which its reference density is constant. Therefore neither viscous effects nor convective terms have to be taken into account. In turn, since the solid displacements are small, we can suppose a linear response, although some hints about the extension of the analysis to a nonlinear case are also given.

A large amount of work has been devoted during recent years to fluid–solid vibration problems. A survey including several alternative formulations can be found in Bermúdez *et al.* (2008), which includes further references. In particular, formulations describing the fluid by means of displacements have been shown to be very efficient for this kind of problem. However, they lead to singular stiffness matrices unless some irrotational constraint is imposed (see Gastaldi, 1996).

In this paper we consider a formulation where the fluid is described redundantly by the means of two scalar variables, pressure and displacement potential, whereas the standard description in terms of displacements is used for the solid. This leads to a symmetric weak formulation for the coupled problem. One advantage is the possibility of using equal-order interpolation spaces for all the variables, without the need to introduce any further unknown in the form of a Lagrange multiplier to treat the transmission conditions. This approach was originally proposed by Morand & Ohayon (1995) for vibration problems, who named it the *stiffness coupling formulation*, and was analysed by Bermúdez *et al.* (2003).

The plan of the paper is as follows. In Section 2 we give the problem statement and prove a well-posedness result for the weak problem. A conforming finite-element scheme is introduced in Section 3, where stability and convergence results are also proved. In order to design an adaptive procedure, we propose in Section 4 a residual *a posteriori* error estimator and prove its reliability and efficiency. Finally, the method and the estimator are tested in Section 5.

### 2. The model problem

We consider the problem of determining the response to prescribed static forces of an elastic solid containing a barotropic and inviscid fluid at rest.

We denote by  $\Omega_F$  and  $\Omega_S$  the reference domains for the fluid and the solid, respectively. More precisely, let  $\Omega_F \subset \mathbb{R}^N$ , where  $N = 2$  or  $3$ , be a bounded open set (for simplicity, we will suppose that  $\Omega_F$  is connected) with a Lipschitz polyhedral boundary  $\Gamma_1$ . Let  $\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_1^M$  be the planar parts of

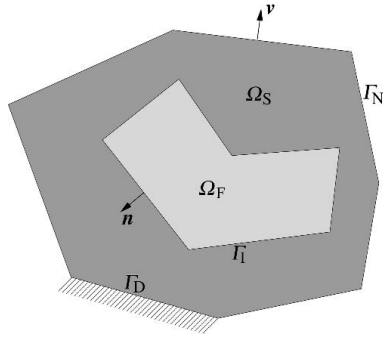


FIG. 1. Sketch of the domains.

$\Gamma_I$ , so that  $\Gamma_I = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_I^j$ . Let  $\Omega_S$  be an ‘annular’ region surrounding  $\Omega_F$  with a Lipschitz polyhedral outer boundary  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , where  $|\Gamma_D| \neq 0$ . Let  $\mathbf{n}$  be the normal vector to  $\Gamma_I$  pointing towards the exterior of  $\Omega_F$  and let  $\mathbf{v}$  be the unit outward vector to  $\Gamma$  (see Fig. 1 for a sketch of the domains).

Given the volumetric force densities  $\mathbf{f}_S \in L^2(\Omega_S)^N$  and  $\mathbf{f}_F \in L^2(\Omega_F)^N$  ( $\mathbf{f}_F$  being a gradient) and a surface force density  $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N)^N$ , the classical elastoacoustics model for small-amplitude motions (see Morand & Ohayon, 1995) leads to the following static problem. Find the solid displacement  $\mathbf{u}$ , the variation  $p$  of the fluid pressure and a scalar potential  $\varphi$  for the fluid displacement (i.e., the fluid displacement is given by  $\nabla\varphi$ ) satisfying the following:

$$\nabla p = \mathbf{f}_F \quad \text{in } \Omega_F, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\rho_F c^2} p + \Delta\varphi = 0 \quad \text{in } \Omega_F, \quad (2.2)$$

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_S \quad \text{in } \Omega_S, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_I, \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = -p\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_I, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D. \quad (2.7)$$

In the equations above,  $\rho_F$  and  $c$  denote the density and the sound speed of the fluid, respectively. We assume that the stress and the strain tensors are related by the usual linear constitutive Hooke’s law:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) := 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2.8)$$

where  $\lambda, \mu > 0$  are the Lamé coefficients,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  is the linearized strain tensor and  $\mathbf{I}$  is the  $\mathbb{R}^{N \times N}$  identity matrix. An extension to more general materials is sketched in Appendix A.

The forthcoming analysis will be valid even for an incompressible fluid, in which case  $c = \infty$ . Because of this, all the physical parameters will be treated as fixed constants, except for the sound speed

$c$ , and in what follows we will obtain the estimates with positive constants  $C, C'$ , etc., not necessarily the same at each occurrence but always independent of  $c \geq c_0$  ( $c_0$  being a fixed positive number).

REMARK 2.1 If the fluid is supposed to be incompressible then equation (2.2) is replaced by  $\Delta\varphi = 0$  in  $\Omega_F$ .

Throughout this paper we will use standard notation for Sobolev spaces. Moreover, we denote by  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)$  the subspace of functions in  $H^1(\Omega_S)$  with a vanishing trace on  $\Gamma_D$ . We will also use, as above, boldface symbols to denote vector and tensor fields.

In order to obtain a weak formulation of this problem, let us multiply (2.1) by  $\nabla\psi$ , with  $\psi \in H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}$ , and integrate over  $\Omega_F$ , which leads to

$$\int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla\psi = \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla\psi \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Next, (2.2) is tested against  $q \in H^1(\Omega_F)$  to obtain that

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} pq - \int_{\Omega_F} \nabla\varphi \cdot \nabla q + \int_{\Gamma_I} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} q = 0,$$

which, after the application of the transmission condition (2.4), leads to

$$\int_{\Omega_F} \nabla\varphi \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_I} q\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} pq = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega_F). \quad (2.10)$$

Finally, testing (2.3) against  $\mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N$  and applying the transmission conditions (2.4) and (2.5), we obtain (recall that  $\mathbf{n}$  points towards  $\Omega_S$ ) that

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_I} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N. \quad (2.11)$$

Collecting (2.9)–(2.11), we arrive at the following weak form of (2.1)–(2.7):  
find  $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N \times H^1(\Omega_F)/\mathbb{R} \times H^1(\Omega_F)$  such that

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega_F} \nabla\psi \cdot \nabla p - \int_{\Gamma_I} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla\psi, \quad (2.12)$$

$$\int_{\Omega_F} \nabla\varphi \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_I} q\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} pq = 0, \quad (2.13)$$

for all  $(\mathbf{v}, \psi, q) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N \times H^1(\Omega_F)/\mathbb{R} \times H^1(\Omega_F)$ .

REMARK 2.2 If the fluid is supposed to be incompressible then we obtain a problem similar to (2.12) and (2.13), but without the term  $\int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} pq$  since this term is already not present in (2.10).

REMARK 2.3 The variational problem (2.12) and (2.13) is well posed even for  $\mathbf{f}_F$  not being a gradient. In such a case, a solution of this problem would only satisfy  $\nabla p$  equal to the gradient part of a Helmholtz decomposition of  $\mathbf{f}_F$ .

The problem (2.12) and (2.13) may be written in an equivalent mildly coupled way. In fact, if we split  $p = p_0 + c_p$ , with  $p_0 \in \tilde{H}^1(\Omega_F) := \{q \in H^1(\Omega_F) : \int_{\Omega_F} q = 0\}$  and  $c_p \in \mathbb{R}$ , then from (2.9) we see that  $p_0$  satisfies the following:

$$\int_{\Omega_F} \nabla p_0 \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla \psi \quad \forall \psi \in \tilde{H}^1(\Omega_F) \quad (2.14)$$

and this equation may be solved independently. Once  $p_0$  is computed, (2.11) may be rewritten as follows:

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_1} c_p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_1} p_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N.$$

This equation is undetermined. To be able to solve it, we need another equation that allows us to find the constant  $c_p$ . With this aim, we test the equation (2.10) with  $q = 1$  to obtain that

$$- \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{|\Omega_F|}{\rho_F c^2} c_p = 0.$$

Hence we are lead to the following mixed problem for  $(\mathbf{u}, c_p)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_1} c_p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_1} p_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N, \\ - \int_{\Gamma_1} d_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{|\Omega_F|}{\rho_F c^2} d_p c_p &= 0 \quad \forall d_p \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

It is immediate to show that this mixed problem is well posed. Finally, once  $\mathbf{u}$  and  $c_p$  are computed, we can obtain  $\varphi$  as the solution of (2.10) for test functions belonging to  $H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}$ , namely,

$$\int_{\Omega_F} \nabla \varphi \cdot \nabla q = \int_{\Gamma_1} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} (p_0 + c_p) q \quad \forall q \in H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}. \quad (2.16)$$

This is a well-posed Neumann problem by virtue of the second equation of (2.15).

In principle, either of the two formulations (2.12) and (2.13) or (2.14)–(2.16) can be discretized by standard finite elements. It is simple to show that the resulting discrete problems are also equivalent, provided that the same elements are used in both formulations for each variable. The mildly coupled formulation (2.14)–(2.16) leads, of course, to a less expensive implementation. In fact, this is the formulation we have used for our numerical experiments. However, for the error analysis of the finite-element method we will use the coupled formulation (2.12) and (2.13), which avoids dealing with nonconforming terms in the right-hand sides of (2.15) and (2.16). Such an approach makes it easier to obtain higher-order *a priori* error estimates in the  $L^2$ -norm (cf. Section 3.1) and, particularly, it allows us to derive *a posteriori* error estimates (cf. Section 4).

To analyse the coupled formulation, consider the Hilbert spaces  $\mathcal{X} := H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N \times H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}$  and  $\mathcal{M} := H^1(\Omega_F)$ , equipped with their natural norms, and the continuous bilinear forms

$a: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: \mathcal{X} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , defined by

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &:= \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad (\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}, \\ b((\mathbf{v}, \psi), q) &:= \int_{\Omega_F} \nabla \psi \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_1} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}, \quad q \in \mathcal{M}, \\ d(p, q) &:= \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} p q, \quad p, q \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

respectively, and the linear functional  $\mathbf{F} \in \mathcal{X}'$  given by

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, \psi) := \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla \psi, \quad (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}.$$

Then the weak problem (2.12) and (2.13) reads as follows:

find  $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  such that

$$a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + b((\mathbf{v}, \psi), p) = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}, \quad (2.17)$$

$$b((\mathbf{u}, \varphi), q) - d(p, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{M}. \quad (2.18)$$

To analyse this problem, we define the kernel

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &:= \{(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} : b((\mathbf{v}, \psi), q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{M}\} \\ &= \left\{ (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} : \int_{\Omega_F} \nabla \psi \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_1} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall q \in \mathcal{M} \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

LEMMA 2.4 The bilinear form  $a$  is  $\mathcal{X}$ -elliptic in  $\mathcal{Z}$ , that is, there exists a constant  $\alpha > 0$  such that

$$a((\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{v}, \psi)) \geq \alpha \|(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{Z}}^2 \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{Z}.$$

*Proof.* Let  $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{Z}$ . From the definition of  $a$  and Korn's inequality it follows that, for all  $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{Z}$ , we have

$$a((\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{v}, \psi)) = \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}^2. \quad (2.20)$$

Next, from the definition of  $\mathcal{Z}$  we observe that by choosing  $q = \psi_0$  in (2.19),  $\psi_0$  being the element of the equivalence class of  $\psi$  satisfying  $\int_{\Omega_F} \psi_0 = 0$ , and applying the trace theorem in  $\Omega_S$  and  $\Omega_F$  and the Poincaré–Friedrichs inequality, we obtain that

$$\|\psi\|_{1, \Omega_F}^2 = \int_{\Gamma_1} \psi_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq \|\psi_0\|_{0, \Gamma_1} \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{0, \Gamma_1} \leq C \|\psi_0\|_{1, \Omega_F} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_S},$$

which together with (2.20) yields the result.  $\square$

The inf–sup condition for  $b$  is stated in the next result.

LEMMA 2.5 There exists a constant  $\beta > 0$  such that

$$\sup_{(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{b((\mathbf{v}, \psi), q)}{\|(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}}} \geq \beta \|q\|_{\mathcal{M}} \quad \forall q \in \mathcal{M}.$$

*Proof.* Let  $q \in \mathcal{M}$ . First, we easily see that

$$\sup_{(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{b((\mathbf{v}, \psi), q)}{\|(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}}} \geq \sup_{\psi \in H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}\{0\}} \frac{\int_{\Omega_F} \nabla \psi \cdot \nabla q}{|\psi|_{1, \Omega_F}} = |q|_{1, \Omega_F}. \quad (2.21)$$

Now let  $\hat{\mathbf{z}}$  be the vector field defined by  $\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) := x_1 \mathbf{e}_1$ , where  $\mathbf{e}_1 := (1, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$ . Also, let  $\chi$  be a cut-off function belonging to  $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega_F} \cup \Omega_S)$  such that  $\chi = 1$  in an open set containing  $\overline{\Omega_F}$ . Then  $\mathbf{z} := \chi \hat{\mathbf{z}}|_{\Omega_S} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N$  and

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_1} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_F} \operatorname{div} \hat{\mathbf{z}} = |\Omega_F| > 0.$$

Hence the linear form defined by  $f(q) := \int_{\Gamma_1} q \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}$  belongs to  $H^1(\Omega_F)'$  (due to the trace theorem) and is such that  $f(1) \neq 0$ . Hence, applying the generalized Poincaré inequality (cf. [Ern & Guermond, 2004](#), Lemma B63), there exists a constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega_F$  and  $\mathbf{z}$  such that, for all  $q \in H^1(\Omega_F)$ , we have

$$\begin{aligned} C \|q\|_{1, \Omega_F} &\leq |q|_{1, \Omega_F} + |f(q)| \leq |q|_{1, \Omega_F} + \|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S} \sup_{\mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Gamma_1} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}} \\ &\leq |q|_{1, \Omega_F} + \|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S} \sup_{(\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{b((\mathbf{v}, \psi), q)}{\|(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}}}, \end{aligned}$$

which together with (2.21) yields the inf–sup condition with a constant  $\beta := C/(1 + \|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S})$ .  $\square$

THEOREM 2.6 There exists a unique  $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  solution of problem (2.17) and (2.18) and there exists a constant  $C > 0$ , independent of  $c$ , such that

$$\|\mathbf{u}\|_{1, \Omega_S} + |\varphi|_{1, \Omega_F} + \|p\|_{1, \Omega_F} \leq C (\|\mathbf{f}_S\|_{0, \Omega_S} + \|\mathbf{f}_F\|_{0, \Omega_F} + \|\mathbf{g}\|_{0, \Gamma_N}).$$

*Proof.* By virtue of Lemmas 2.4 and 2.5, it is enough to take into account that the bilinear form  $d$  is positive definite in  $\mathcal{M}$  and satisfies the assumptions of Case 3 from [Brezzi & Fortin \(1991, p. 47\)](#) to apply Theorem 1.2 from the same reference.  $\square$

REMARK 2.7 The existence and uniqueness result given above is also valid if the fluid is incompressible, i.e., if  $d(p, q) \equiv 0$ , in which case it is a direct consequence of the classical theory for mixed problems (cf. [Brezzi & Fortin, 1991](#)).

REMARK 2.8 Let us define the bilinear form  $\mathcal{B}: (\mathcal{X} \times \mathcal{M}) \times (\mathcal{X} \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  given by

$$\mathcal{B}(((\mathbf{u}, \varphi), p), ((\mathbf{v}, \psi), q)) := a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + b((\mathbf{v}, \psi), p) + b((\mathbf{u}, \varphi), p) - d(p, q).$$

Then (cf. [Braess & Blömer, 1990](#), Lemma B.1) there exists a constant  $C_{\mathcal{B}}$ , independent of  $c$ , such that, for all  $((\mathbf{v}, \psi), q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$ , we have

$$\|((\mathbf{v}, \psi), q)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{M}} \leq C_{\mathcal{B}} \sup_{((\mathbf{w}, \xi), r) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M} \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(((\mathbf{v}, \psi), q), ((\mathbf{w}, \xi), r))}{\|((\mathbf{w}, \xi), r)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{M}}}. \quad (2.22)$$

### 3. The finite-element scheme

Let  $\{\mathcal{T}_h^F\}_{h>0}$  and  $\{\mathcal{T}_h^S\}_{h>0}$  be regular families of triangulations (tetrahedral meshes if  $N = 3$ ) of  $\overline{\Omega_F}$  and  $\overline{\Omega_S}$ , respectively, which may be chosen independently. In particular, they do not need to match on the common boundary  $\Gamma_1$ . Given a couple of meshes  $\mathcal{T}_h^F$  and  $\mathcal{T}_h^S$ , the mesh size is defined by  $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h^F \cup \mathcal{T}_h^S} h_K$ , with  $h_K$  being the diameter of  $K$ . From now on, the generic constants  $C, C'$ , etc. will be not only independent of  $c \geq c_0$  but also independent of the mesh size  $h$ .

Let  $k, l, m \geq 1$  and let us define the following finite-element spaces:

$$\mathcal{H}_h := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_S})^N : \mathbf{v}_h|_K \in \mathbb{P}_k(K)^N \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^S \right\} \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega_S)^N,$$

$$\mathcal{V}_h := \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_F}) : \psi_h|_K \in \mathbb{P}_l(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^F \right\},$$

$$\mathcal{M}_h := \left\{ q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_F}) : q_h|_K \in \mathbb{P}_m(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^F \right\}.$$

For reasons that will become clear in what follows, we take  $l \geq m$ . Defining  $\mathcal{X}_h := \mathcal{H}_h \times \mathcal{V}_h/\mathbb{R}$ , the finite-element scheme associated to (2.17) and (2.18) reads as follows:

find  $((\mathbf{u}_h, \varphi_h), p_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h$  such that

$$a((\mathbf{u}_h, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) + b((\mathbf{v}_h, \psi_h), p_h) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h, \quad (3.1)$$

$$b((\mathbf{u}_h, \varphi_h), q_h) - d(p_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \quad (3.2)$$

We obtain the following result by repeating the arguments used to prove Lemma 2.4.

LEMMA 3.1 Let

$$\mathcal{X}_h := \{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h : b((\mathbf{v}_h, \psi_h), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h\}.$$

Then, for the same constant  $\alpha > 0$  from Lemma 2.4 (independent of  $h$ ), the following holds:

$$a((\mathbf{v}_h, \psi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) \geq \alpha \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h.$$

The discrete inf–sup condition for the bilinear form  $b$  is proved next.

LEMMA 3.2 There exists a  $\beta_* > 0$ , independent of  $h$ , such that

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h \setminus \{0\}} \frac{b((\mathbf{v}_h, \psi_h), q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{X}}} \geq \beta_* \|q_h\|_{\mathcal{M}} \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h.$$

*Proof.* Let  $q_h \in \mathcal{M}_h$ . Since  $l \geq m$ , we proceed as in the proof of Lemma 2.5 to obtain that

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b((\mathbf{v}_h, \psi_h), q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{X}}} \geq |q_h|_{1, \Omega_F}.$$

Now considering  $\hat{\mathbf{z}}$  and  $\mathbf{z}$  as in the proof of Lemma 2.5, we have that

$$C \|q_h\|_{1, \Omega_F} \leq |q_h|_{1, \Omega_F} + \left| \int_{\Gamma_1} q_h \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \right|.$$

Next, let  $\mathbf{z}_h \in \mathcal{H}_h$  be the Scott-Zhang interpolant of  $\mathbf{z}$  (see Scott & Zhang, 1990; Brenner & Scott, 1994), where the interpolation is taken component-wise. Then, since  $\mathbf{z}|_{\Gamma_1} = \hat{\mathbf{z}}|_{\Gamma_1}$  is an affine function, we have that  $\mathbf{z}_h|_{\Gamma_1} = \mathbf{z}|_{\Gamma_1}$  and, moreover, from the approximation properties of this interpolant (cf. Brenner & Scott, 1994; Ern & Guermond, 2004) we obtain that

$$\|\mathbf{z}_h\|_{1, \Omega_S} \leq C' \|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S},$$

where  $C' > 0$  does not depend on  $h$ . We then arrive at

$$\int_{\Gamma_1} q_h \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_1} q_h \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{z}_h\|_{1, \Omega_S} \frac{\int_{\Gamma_1} q_h \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{z}_h\|_{1, \Omega_S}} \leq C' \|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S} \sup_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b((\mathbf{v}_h, \psi_h), q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{X}}},$$

and the result follows with  $\beta_* := C/(1 + C'\|\mathbf{z}\|_{1, \Omega_S})$ .  $\square$

**REMARK 3.3** We stress the fact that the constant  $\beta_*$  depends only on  $\Omega_F$ ,  $\Omega_S$  and  $\mathbf{z}$ , but, due to the choice made for the latter, it does not depend on the mesh size  $h$ .

As a consequence of the above lemmas, we obtain the main result of this section.

**THEOREM 3.4** There exists a unique solution  $((\mathbf{u}_h, \varphi_h), p_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h$  of the problem (3.1) and (3.2) and there exists a positive constant  $C > 0$ , independent of  $h$  and  $c$ , such that

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_S} + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_F} + \|p - p_h\|_{1, \Omega_F} \\ & \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1, \Omega_S} + \inf_{\psi_h \in \mathcal{Y}_h} |\varphi - \psi_h|_{1, \Omega_F} + \inf_{q_h \in \mathcal{M}_h} \|p - q_h\|_{1, \Omega_F} \right), \end{aligned}$$

where  $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  is the unique solution of the problem (2.17) and (2.18).

*Proof.* It is enough to apply Proposition 2.11 from Brezzi & Fortin (1991, Chapter II).  $\square$

**REMARK 3.5** The previous result provides an error estimate that is robust with respect to large values of the bulk modulus  $\rho_F c^2$  and covers the incompressible case in which  $d(p, q) = 0$ .

**REMARK 3.6** Although, in practice, it is most usual to take equal-order elements for all variables, the choice of interpolation spaces is arbitrary. In principle, the only constraint is the one used in Lemma 3.2, namely that  $l \geq m$ . However, even this can be avoided. In fact, Theorem 3.4 can be alternatively proved without assuming that  $l \geq m$  by analysing the discretization of the mildly coupled problem (2.14)–(2.16). Finally, note that, since the meshes for the fluid and the solid do not need to satisfy any compatibility condition on the interface, completely independent refinement procedures may be considered in each domain.

### 3.1 An error estimate in the $L^2$ -norms

The purpose of this section is to obtain higher-order error estimates in the  $L^2$ -norm for all the variables. To do this, let  $((\mathbf{u}, \varphi), p)$  and  $((\mathbf{u}_h, \varphi_h), p_h)$  be the solutions of the problem (2.17) and (2.18) and the problem (3.1) and (3.2), respectively, where we have fixed representatives of  $\varphi \in H^1(\Omega_F)/\mathbb{R}$  and  $\varphi_h \in \mathcal{Y}_h/\mathbb{R}$ , still denoted by  $\varphi$  and  $\varphi_h$ , satisfying  $\int_{\Omega_F} \varphi = \int_{\Omega_F} \varphi_h = 0$ . Next, let  $((\mathbf{w}, \zeta), r) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  be the solution of the following dual problem:

$$a((\mathbf{w}, \zeta), (\mathbf{v}, \psi)) + b((\mathbf{v}, \psi), r) = \int_{\Omega_S} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_F} (\varphi - \varphi_h) \psi \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}, \quad (3.3)$$

$$b((\mathbf{w}, \zeta), q) - d(r, q) = \int_{\Omega_F} (p - p_h) q \quad \forall q \in \mathcal{M}. \quad (3.4)$$

The same arguments used in the proof of Theorem 2.6 allow us to show that the problem (3.3) and (3.4) admits a unique solution  $((\mathbf{w}, \zeta), r)$  satisfying

$$\|\mathbf{w}\|_{1, \Omega_S} + |\zeta|_{1, \Omega_F} + \|r\|_{1, \Omega_F} \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_F} + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_F} + \|p - p_h\|_{0, \Omega_F}), \quad (3.5)$$

where  $C > 0$  is again independent of  $c$ .

Now considering  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  in (3.3), we obtain that  $r \in H^1(\Omega_F)$  is a solution of the compatible Neumann problem

$$\begin{aligned} -\Delta r &= \varphi - \varphi_h & \text{in } \Omega_F, \\ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{on } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Hence (cf. Grisvard, 1985) there exists an  $s > \frac{1}{2}$  such that  $r \in H^{1+s}(\Omega_F)$  and  $\|\nabla r\|_{s, \Omega_F} \leq C \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_F}$ , which together with (3.5) shows that

$$\|r\|_{1+s, \Omega_F} \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_F} + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_F} + \|p - p_h\|_{0, \Omega_F}). \quad (3.6)$$

Now taking  $\psi = 0$  in (3.3), we have that  $\mathbf{w}$  is the weak solution of

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_h & \text{in } \Omega_S, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \mathbf{n} &= r \mathbf{n} & \text{on } \Gamma_1, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \mathbf{v} &= \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_N, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Hence (cf. Grisvard, 1985), since  $r \mathbf{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)^N$ , where  $j = 1, \dots, M$ , there exists a  $t > 0$  such that  $\mathbf{w} \in H^{1+t}(\Omega_S)^N$  and

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{1+t, \Omega_S} &\leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_S} + \sum_{j=1}^M \|r \mathbf{n}\|_{1/2, \Gamma_1^j} \right) \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_S} + \|r\|_{1, \Omega_F}) \\ &\leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_S} + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_F} + \|p - p_h\|_{0, \Omega_F}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

where the last inequality holds because of (3.5).

Finally, (3.4) implies that  $\zeta$  satisfies the following:

$$\begin{aligned} -\Delta \zeta &= \frac{1}{\rho_{\text{FC}} c^2} r + (p - p_h) \quad \text{in } \Omega_{\text{F}}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_1, \end{aligned}$$

and, since  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1^j)$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $\zeta \in H^{1+s}(\Omega_{\text{F}})/\mathbb{R}$  (cf. Grisvard, 1985) and

$$\begin{aligned} \|\nabla \zeta\|_{s, \Omega_{\text{F}}} &\leq C \left( \left\| \frac{1}{\rho_{\text{FC}} c^2} r + (p - p_h) \right\|_{0, \Omega_{\text{F}}} + \sum_{j=1}^M \|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\|_{1/2, \Gamma_1^j} \right) \\ &\leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_{\text{S}}} + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}} + \|p - p_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

where the last inequality holds again by (3.5). Note that  $C$  is independent of  $c$  (of course, for  $c \geq c_0$ ). From these considerations we may state the following result.

**THEOREM 3.7** There exist constants  $C > 0$ ,  $s > \frac{1}{2}$  and  $t > 0$ , all independent of  $h$  and  $c$ , such that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_{\text{S}}} + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}} + \|p - p_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}} \\ \leq Ch^{\min\{s, t\}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}} + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_{\text{F}}} + \|p - p_h\|_{1, \Omega_{\text{F}}}). \end{aligned}$$

*Proof.* Let  $((\mathbf{w}, \zeta), r) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  be the solution of the dual problem (3.3) and (3.4) and let  $\mathbf{w}_h, \zeta_h$  and  $r_h$  be the respective Scott–Zhang interpolants (Scott & Zhang, 1990). Then by considering  $((\mathbf{v}, \psi), q) = ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h)$  in (3.3) and (3.4) and using the Galerkin orthogonality, the continuity of  $a, b$  and  $d$  and the approximation properties of the Scott–Zhang interpolation (cf. Ern & Guermond, 2004), we arrive at the following:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_{\text{S}}}^2 + \|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}}^2 + \|p - p_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}}^2 \\ = \mathcal{B}((\mathbf{w}, \zeta), r), ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h) \\ = \mathcal{B}(((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h), ((\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \zeta - \zeta_h), r - r_h)) \\ \leq C \left[ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}} + (\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}} + |\zeta - \zeta_h|_{1, \Omega_{\text{F}}}) \|p - p_h\|_{1, \Omega_{\text{F}}} \right. \\ \left. + (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}} + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_{\text{F}}}) \|r - r_h\|_{1, \Omega_{\text{F}}} + \frac{1}{\rho_{\text{FC}} c^2} \|r - r_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}} \|p - p_h\|_{0, \Omega_{\text{F}}} \right] \\ \leq Ch^{\min\{s, t\}} \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_{\text{S}}}^2 + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_{\text{F}}}^2 + \|p - p_h\|_{1, \Omega_{\text{F}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left( \|\mathbf{w}\|_{1+t, \Omega_{\text{S}}}^2 + |\zeta|_{1+s, \Omega_{\text{F}}}^2 + |r|_{1+s, \Omega_{\text{F}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

and the result follows by using (3.6)–(3.8).  $\square$

## 4. A residual a posteriori error estimation

### 4.1 Preliminaries

In this section, for simplicity, we will suppose that the prescribed force densities  $f_{\text{S}}$ ,  $f_{\text{F}}$  and  $\mathbf{g}$  are all piecewise polynomial functions. Also for simplicity, we will mainly use two-dimensional notation. However, the definition of the estimator and the properties proved in Theorem 4.1 below hold in the three-dimensional case as well.

We restrict the analysis of this section to meshes in  $\Omega_{\text{F}}$  and  $\Omega_{\text{S}}$  matching on the common boundary  $\Gamma_1$ . The definition of the estimator introduced in Section 4.2 also holds for nonmatching grids. However, some of the preliminary results that will be used in what follows are not valid for general nonmatching grids, for instance, the first inequality in (4.2) below.

We use the following notation:

- $\mathcal{E}_h^{\text{S}}$  and  $\mathcal{E}_h^{\text{F}}$ : sets of edges (faces if  $N = 3$ ) of  $\mathcal{T}_h^{\text{S}}$  and  $\mathcal{T}_h^{\text{F}}$ , respectively;
- $\tilde{\mathcal{E}}_h^{\text{S}}$  and  $\tilde{\mathcal{E}}_h^{\text{F}}$ : sets of inner edges (faces) of  $\mathcal{T}_h^{\text{S}}$  and  $\mathcal{T}_h^{\text{F}}$ , respectively;
- $\mathcal{E}_h^{\text{N}}$  and  $\mathcal{E}_h^{\text{D}}$ : sets of edges (faces) of  $\mathcal{T}_h^{\text{S}}$  lying on  $\Gamma_{\text{D}}$  and  $\Gamma_{\text{N}}$ , respectively;
- $\mathcal{E}_h^{\text{I}}$ : set of common edges (faces) of  $\mathcal{T}_h^{\text{S}}$  and  $\mathcal{T}_h^{\text{F}}$  lying on  $\Gamma_1$ ;
- $\mathcal{E}_K$ : set of edges (faces) of  $K \in \mathcal{T}_h^{\text{S}} \cup \mathcal{T}_h^{\text{F}}$ ;
- $\omega_K^{\text{S}} := \cup \{K' \in \mathcal{T}_h^{\text{S}}: \mathcal{E}_{K'} \cap \mathcal{E}_K \neq \emptyset\}$  for  $K \in \mathcal{T}_h^{\text{S}}$ ;
- $\omega_\ell^{\text{S}} := \cup \{K \in \mathcal{T}_h^{\text{S}}: \ell \in \mathcal{E}_K\}$  for  $\ell \in \mathcal{E}_h^{\text{S}}$ .

We define in an analogous way the neighbourhoods  $\omega_K^{\text{F}}$  and  $\omega_\ell^{\text{F}}$  for  $K \in \mathcal{T}_h^{\text{F}}$  and  $\ell \in \mathcal{E}_h^{\text{F}}$ . Moreover, we will write  $\omega_K$  and  $\omega_\ell$  when it is not necessary to distinguish the medium. Furthermore, for  $\ell \in \mathcal{E}_h^{\text{I}}$  we denote by  $K_\ell^{\text{F}} \in \mathcal{T}_h^{\text{F}}$  and  $K_\ell^{\text{S}} \in \mathcal{T}_h^{\text{S}}$  the elements in each medium such that  $\ell = K_\ell^{\text{F}} \cap K_\ell^{\text{S}}$ .

For  $K \in \mathcal{T}_h^{\text{S}} \cup \mathcal{T}_h^{\text{F}}$  we let  $b_K$  be the classical bubble function in  $K$  given by

$$b_K := (N+1)^{N+1} \prod_{j=0}^N \lambda_j^K,$$

where  $\lambda_0^K, \dots, \lambda_N^K$  stand for the barycentric coordinates of  $K$ . For  $\ell \in \mathcal{E}_h^{\text{S}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{F}}$  we let  $b_\ell$  be the piecewise quadratic (cubic if  $N = 3$ ) continuous function defined in  $\omega_\ell$  as follows:

$$b_\ell|_K := N^N \prod_{j=1}^N \lambda_j^K, \quad K \subset \omega_\ell,$$

with  $\lambda_1^K, \dots, \lambda_N^K$  being the barycentric coordinates of  $K$  associated with the vertices of  $\ell$ .

By using standard scaling arguments (cf. Verfürth, 1996), it can be proved that there exists a constant  $C > 0$  such that

$$C \|s\|_{0, K}^2 \leq \int_K b_K s^2 \leq \|s\|_{0, K}^2 \quad \forall s \in \mathbb{P}_n(K), \quad (4.1)$$

$$C \|s\|_{0, \ell}^2 \leq \int_\ell b_\ell s^2 \leq \|s\|_{0, \ell}^2 \quad \forall s \in \mathbb{P}_n(\ell). \quad (4.2)$$

The constant  $C$  depends on the degree  $n$  of the polynomial function and the shape ratio of the element, but not on the mesh size  $h$ .

We will also use a lifting operator  $P_\ell: \mathbb{P}_n(\ell) \rightarrow \mathbb{P}_n(\omega_\ell)$  such that, for all  $s \in \mathbb{P}_n(\ell)$ , we have  $P_\ell(s)|_\ell = s$  and

$$\|b_\ell P_\ell(s)\|_{0,\omega_\ell} \leq Ch_\ell |b_\ell P_\ell(s)|_{1,\omega_\ell} \leq C'h_\ell^{\frac{1}{2}} \|s\|_{0,\ell}, \quad (4.3)$$

with  $h_\ell$  being the diameter of  $\ell$  (see Verfürth (1998) for a construction). Finally, for  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{P}_n(\ell)^N$  we define

$$\mathbf{P}_\ell(\mathbf{s}) := (P_\ell(s_1), \dots, P_\ell(s_N)).$$

## 4.2 The estimator

By integrating by parts, we arrive at the following residual equation:

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h), ((\mathbf{v}, \psi), q)) \\ &= \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega_F} \nabla \psi \cdot \nabla p_h + \int_{\Gamma_1} p_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ & \quad - \int_{\Omega_F} \nabla \varphi_h \cdot \nabla q + \int_{\Gamma_1} q \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_{FC}^2} p_h q \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \int_K \mathbf{R}_K^\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^S} \int_\ell \mathbf{J}_\ell^\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \int_K (\mathbf{R}_K^p \psi + \mathbf{R}_K^q q) + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^F} \int_\ell (\mathbf{J}_\ell^p \psi + \mathbf{J}_\ell^q q) \quad (4.4) \end{aligned}$$

for all  $((\mathbf{v}, \psi), q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$ , where the element and edge (face) residuals are defined as follows:

$$\mathbf{R}_K^\mathbf{u} := \mathbf{f}_S|_K + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h|_K), \quad \mathbf{J}_\ell^\mathbf{u} := \begin{cases} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_\ell]_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^S, \\ [-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{v} + \mathbf{g}]_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^N, \\ [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} + p_h \mathbf{n}]_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^1, \\ \mathbf{0} & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^D, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_K^p := -\operatorname{div}(\mathbf{f}_F|_K) + \Delta(p_h|_K), \quad \mathbf{J}_\ell^p := \begin{cases} \left[ -\frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{n}_\ell} + \mathbf{f}_F \cdot \mathbf{n}_\ell \right]_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^F, \\ \left( -\frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{f}_F \cdot \mathbf{n} \right) \Big|_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^1, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_K^q := \Delta(\varphi_h|_K) + \frac{1}{\rho_{FC}^2} p_h|_K, \quad \mathbf{J}_\ell^q := \begin{cases} \left[ \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mathbf{n}_\ell} \right]_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^F, \\ \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \right) \Big|_\ell & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^1, \end{cases}$$

where  $\mathbf{n}_\ell$  denotes a unit vector normal to  $\ell \in \mathcal{E}_h^S \cup \mathcal{E}_h^F$  and  $[[\cdot]]_\ell$  denotes the jump across the edge (face). The residual equation above leads us to define the following residual *a posteriori* error estimator:

$$\eta^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} (\eta_K^\mathbf{u})^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} [(\eta_K^p)^2 + (\eta_K^q)^2], \quad (4.5)$$

where

$$\begin{aligned} (\eta_K^\mathbf{u})^2 &:= h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mathbf{u}\|_{0,K}^2 + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_K} \delta_\ell h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^\mathbf{u}\|_{0,\ell}^2, \quad K \in \mathcal{T}_h^S, \\ (\eta_K^p)^2 &:= h_K^2 \|\mathbf{R}_K^p\|_{0,K}^2 + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_K} \delta_\ell h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^p\|_{0,\ell}^2, \quad K \in \mathcal{T}_h^F, \\ (\eta_K^q)^2 &:= h_K^2 \|\mathbf{R}_K^q\|_{0,K}^2 + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_K} \delta_\ell h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^q\|_{0,\ell}^2, \quad K \in \mathcal{T}_h^F, \end{aligned}$$

with

$$\delta_\ell = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^S \cup \mathcal{E}_h^F, \\ 1 & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^N \cup \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^1. \end{cases}$$

We prove in the following theorem the efficiency and reliability of this estimator.

**THEOREM 4.1** There exist positive constants  $C_1$  and  $C_2$ , not depending on  $h$  or  $c$ , such that

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega_S} + |\varphi - \varphi_h|_{1,\Omega_F} + \|p - p_h\|_{1,\Omega_F} \leq C_1 \eta \quad (4.6)$$

and

$$\eta_K^\mathbf{u} \leq C_2 \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_K^S} + \delta_K p \right) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^S, \quad (4.7)$$

$$\eta_K^p \leq C_2 |p - p_h|_{1,\omega_K^F} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^F, \quad (4.8)$$

$$\eta_K^q \leq C_2 \left( |\varphi - \varphi_h|_{1,\omega_K^F} + \frac{h_K}{\rho_{FC}^2} \|p - p_h\|_{0,\omega_K^F} + \delta_K \mathbf{u} \right) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^F, \quad (4.9)$$

where

$$\delta_K p := \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1 = \emptyset, \\ \sum_{\ell \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1} \left( \|p - p_h\|_{0,K_\ell^F} + h_K |p - p_h|_{1,K_\ell^F} \right) & \text{if } \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1 \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\delta_K \mathbf{u} := \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1 = \emptyset, \\ \sum_{\ell \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1} \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K_\ell^S} + h_K \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K_\ell^S} \right) & \text{if } \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^1 \neq \emptyset. \end{cases}$$

*Proof.* For  $((\mathbf{v}, \psi), q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  we let  $\mathbf{v}_h$ ,  $\psi_h$  and  $q_h$  be the Scott–Zhang interpolants of  $\mathbf{v}$ ,  $\psi$  and  $q$ , respectively. Then, using the residual equation (4.4), the Galerkin orthogonality, the Cauchy–Schwarz

inequality and the properties of the interpolant, we obtain the following:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}(((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h), ((\mathbf{v}, \psi), q)) \\
&= \mathcal{B}(((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h), ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, \psi - \psi_h), q - q_h)) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \int_K \mathbf{R}_K^\mu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^S} \int_\ell \mathbf{J}_\ell^\mu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \int_K [\mathbf{R}_K^p(\psi - \psi_h) + \mathbf{R}_K^\varphi(q - q_h)] \\
&\quad + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^F} \int_\ell [J_\ell^p(\psi - \psi_h) + J_\ell^\varphi(q - q_h)] \\
&\leq C \left[ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2 + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^S} h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} h_K^2 (\|\mathbf{R}_K^p\|_{0,K}^2 + \|\mathbf{R}_K^\varphi\|_{0,K}^2) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_h^F} h_\ell (\|J_\ell^p\|_{0,\ell}^2 + \|J_\ell^\varphi\|_{0,\ell}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \|((\mathbf{v}, \psi), q)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Hence, using (2.22), we arrive at the following:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega_S} + |\varphi - \varphi_h|_{1,\Omega_F} + \|p - p_h\|_{1,\Omega_F} \\
&\leq C_{\mathcal{B}} \sup_{((\mathbf{v}, \psi), q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M} \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi - \varphi_h), p - p_h), ((\mathbf{v}, \psi), q))}{\|((\mathbf{v}, \psi), q)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{M}}} \\
&\leq C_1 \eta.
\end{aligned}$$

Thus we conclude the reliability estimate (4.6).

To prove the efficiency, we will treat each term of the estimator separately.

1. For all  $K \in \mathcal{T}_h^S$  we have

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2 \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K}^2. \quad (4.10)$$

Let  $\mathbf{v}_K := b_K \mathbf{R}_K^\mu$ . Taking  $((\mathbf{v}, \psi), q) = ((\mathbf{v}_K, 0), 0)$  in (4.4) and using (4.1) and an inverse inequality, we arrive at the following:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2 &\leq C \int_K \mathbf{R}_K^\mu \cdot \mathbf{v}_K = C \int_K \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_K) \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K} \|\mathbf{v}_K\|_{1,K} \\
&\leq Ch_K^{-1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K} \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K},
\end{aligned}$$

which yields (4.10).

2. For all  $\ell \in \mathcal{E}_h^S$  we have

$$h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}^2 \leq C \begin{cases} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_\ell^S}^2 & \text{if } \ell \in \widetilde{\mathcal{E}}_h^S \cup \mathcal{E}_h^N, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_\ell^S}^2 + \|p - p_h\|_{0,K_F}^2 + h_K^2 \|p - p_h\|_{1,K_F}^2 & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^1. \end{cases} \quad (4.11)$$

We first consider  $\ell \in \widetilde{\mathcal{E}}_h^S \cup \mathcal{E}_h^N$ . Defining  $\mathbf{v}_\ell := b_\ell \mathbf{P}_\ell(\mathbf{J}_\ell^\mu)$  and using (4.2),  $((\mathbf{v}_\ell, 0), 0)$  in the residual equation (4.4), and (4.3), we obtain that

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}^2 &\leq C \int_\ell \mathbf{J}_\ell^\mu \cdot \mathbf{v}_\ell = C \left[ \int_{\omega_\ell^S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_\ell) - \sum_{K \subset \omega_\ell^S} \int_K \mathbf{R}_K^\mu \cdot \mathbf{v}_\ell \right] \\
&\leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_\ell^S} \|\mathbf{v}_\ell\|_{1,\omega_\ell^S} + \sum_{K \subset \omega_\ell^S} \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K} \|\mathbf{v}_\ell\|_{0,K} \right) \\
&\leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_\ell^S} h_\ell^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell} + \sum_{K \subset \omega_\ell^S} h_\ell^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K} \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell} \right) \\
&\leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_\ell^S}^2 + \sum_{K \subset \omega_\ell^S} h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} h_\ell^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}.
\end{aligned}$$

Therefore the first part of (4.11) follows from (4.10).

We next consider  $\ell \in \mathcal{E}_h^1$ . Let  $K := K_\ell^S$  and  $\mathbf{v}_\ell := b_\ell \mathbf{P}_\ell(\mathbf{J}_\ell^\mu)$ , where the extension is taken in  $\omega_\ell^S = K$ . Proceeding as above, we arrive at the following:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}^2 &\leq C \int_\ell \mathbf{J}_\ell^\mu \cdot \mathbf{v}_\ell = C \left[ \int_K \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_\ell) - \int_\ell (p - p_h) \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n} - \int_K \mathbf{R}_K^\mu \cdot \mathbf{v}_\ell \right] \\
&\leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K} \|\mathbf{v}_\ell\|_{1,K} + \|p - p_h\|_{0,\ell} \|\mathbf{v}_\ell\|_{0,\ell} + \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K} \|\mathbf{v}_\ell\|_{0,K}) \\
&\leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K}^2 + h_\ell \|p - p_h\|_{0,\ell}^2 + h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} h_\ell^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell},
\end{aligned}$$

and hence

$$h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^\mu\|_{0,\ell}^2 \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K}^2 + h_\ell \|p - p_h\|_{0,\ell}^2 + h_K^2 \|\mathbf{R}_K^\mu\|_{0,K}^2).$$

Finally, we use the local trace inequality

$$\|p - p_h\|_{0,\ell}^2 \leq C \left( h_\ell^{-1} \|p - p_h\|_{0,K_F}^2 + h_\ell \|p - p_h\|_{1,K_F}^2 \right) \quad (4.12)$$

and (4.10) to obtain the second part of (4.11). Thus (4.7) follows from (4.10) and (4.11).

3. For all  $K \in \mathcal{T}_h^F$  we have

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^p\|_{0,K}^2 \leq C \|p - p_h\|_{1,K}^2, \quad (4.13)$$

and for all  $\ell \in \mathcal{E}_h^F$  we have

$$h_\ell \|\mathbf{J}_\ell^p\|_{0,\ell}^2 \leq C \|p - p_h\|_{1,\omega_\ell^F}^2. \quad (4.14)$$

The proofs of (4.13) and (4.14) are essentially identical to those of (4.10) and the first estimate in (4.11), respectively. Thus (4.8) follows.



4. For all  $K \in \mathcal{T}_h^F$  we have

$$h_K^2 \|R_K^q\|_{0,K}^2 \leq C \left[ |\varphi - \varphi_h|_{1,K}^2 + \frac{h_K^2}{(\rho_F c^2)^2} \|p - p_h\|_{0,K}^2 \right], \quad (4.15)$$

and for all  $\ell \in \mathcal{E}_h^F$  we have

$$h_\ell \|J_\ell^q\|_{0,\ell}^2 \leq C \begin{cases} |\varphi - \varphi_h|_{1,\omega_\ell^F}^2 + \frac{h_K^2}{(\rho_F c^2)^2} \|p - p_h\|_{0,\omega_\ell^F}^2 & \text{if } \ell \in \widetilde{\mathcal{E}}_h^F, \\ |\varphi - \varphi_h|_{1,\omega_\ell^F}^2 + \frac{h_K^2}{(\rho_F c^2)^2} \|p - p_h\|_{0,\omega_\ell^F}^2 \\ + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K_\ell^S}^2 + h_K^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K_\ell^S}^2 & \text{if } \ell \in \mathcal{E}_h^I. \end{cases} \quad (4.16)$$

The proof of (4.15) is essentially identical to that of (4.10), whereas, for  $\ell \in \widetilde{\mathcal{E}}_h^F$ , (4.16) follows by using the same arguments as in (4.11). Thus it only remains to consider  $\ell \in \mathcal{E}_h^I$ . Let  $K := K_\ell^F$  and  $q_\ell = b_\ell P_\ell(J_\ell^q)$ , where the extension is taken in  $\omega_\ell^F = K$ . Using  $((\mathbf{v}, \psi), q) = ((\mathbf{0}, 0), q_\ell)$  in (4.4), we have that

$$\begin{aligned} \|J_\ell^q\|_{0,\ell}^2 &\leq C \int_\ell J_\ell^q q_\ell = C \left[ \int_K \nabla(\varphi - \varphi_h) \cdot \nabla q_\ell - \int_\ell (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} q_\ell \right. \\ &\quad \left. + \int_K \frac{1}{\rho_F c^2} (p - p_h) q_\ell - \int_K R_K^q q_\ell \right] \\ &\leq C \left[ |\varphi - \varphi_h|_{1,K}^2 + h_\ell \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\ell}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_K^2}{(\rho_F c^2)^2} \|p - p_h\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|R_K^q\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} h_\ell^{-\frac{1}{2}} \|J_\ell^q\|_{0,\ell}, \end{aligned}$$

which using (4.15) leads to

$$h_\ell \|J_\ell^q\|_{0,\ell}^2 \leq C \left[ |\varphi - \varphi_h|_{1,K}^2 + h_\ell \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\ell}^2 + \frac{h_K^2}{(\rho_F c^2)^2} \|p - p_h\|_{0,K}^2 \right].$$

Therefore (4.16) follows by using a local trace inequality for  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  that is similar to (4.12). The proof is finished by noting that (4.9) follows from (4.15) and (4.16).  $\square$

**REMARK 4.2** The coupling terms  $\delta_K p$  and  $\delta_K \mathbf{u}$ , as well as  $\frac{h_K}{\rho_F c^2} \|p - p_h\|_{0,\omega_K^F}$ , are very likely to be negligible in the reliability estimates (4.7) and (4.9). Indeed, all of them involve either the seminorm  $|\cdot|_{1,K}$  of some error times  $h_K$  or the norm  $\|\cdot\|_{0,K}$ . (Recall that, according to Theorem 3.7, the norm  $\|\cdot\|_0$  of the errors is globally of higher order than the corresponding seminorm  $|\cdot|_1$ .)

## 5. Numerical experiments

In this section we present three series of numerical experiments illustrating the theoretical analysis of Sections 3 and 4, the performance of the method and that of an adaptive scheme based on the *a posteriori* error estimator.

### 5.1 A problem with a known analytical solution

The aim of this first test is to validate the computational code and confirm the theoretical convergence results. To do this, we adopt the configuration shown in Fig. 2.

A piece  $\Gamma_F$  of the fluid domain boundary is taken as a perfectly rigid wall, which leads to the boundary condition  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0$  on  $\Gamma_F$ . The other boundary conditions remain as above,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  on  $\Gamma_D$  and  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} = \mathbf{g}$  on  $\Gamma_N$ . We set  $\rho_F = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  and  $\mu = 0.25$ . The data  $\mathbf{f}_F$ ,  $\mathbf{f}_S$  and  $\mathbf{g}$  are chosen so that the exact solution to the problem is given by

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ y^2(y-1) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x, y) = \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{7}{960}, \quad p(x, y) = -(3y^2 - 2y).$$

**REMARK 5.1** We have taken the physical parameters so that  $\lambda + 2\mu = \rho_F c^2$  to ensure that the transmission condition (2.5) is satisfied.

**REMARK 5.2** The analysis carried out in Sections 3 and 4 may be adapted, with minor modifications, to cover this problem too, so that all of the results from Sections 2–4 hold. In particular, since the solution of this test is infinitely smooth, according to Theorem 3.4, the  $H^1$ -norm of the errors must be  $\mathcal{O}(h)$ . Furthermore, the constants  $s$  and  $t$  in Theorem 3.7 are both equal to 1, so that the  $L^2$ -norm of the errors must be  $\mathcal{O}(h^2)$ .

We depict in Figs 3, 4 and 5 the convergence of the error in each variable on uniform meshes as  $h$  tends to 0. The figures show a perfect agreement with the theoretical results.

Next, defining

$$\eta^{\mathbf{u}} := \left[ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} (\eta_K^{\mathbf{u}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta^p := \left[ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} (\eta_K^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta^\varphi := \left[ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} (\eta_K^\varphi)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

we show in Table 1 the following effectivity indices for each variable:

$$\theta^{\mathbf{u}} := \frac{\eta^{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega_S}}, \quad \theta^p := \frac{\eta^p}{|\varphi - \varphi_h|_{1,\Omega_F}}, \quad \theta^\varphi := \frac{\eta^\varphi}{\|p - p_h\|_{1,\Omega_F}}$$

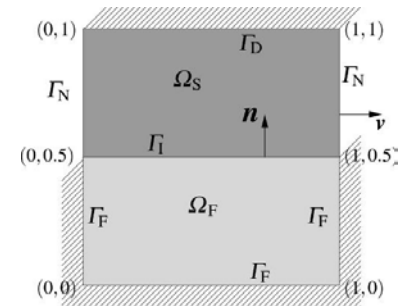
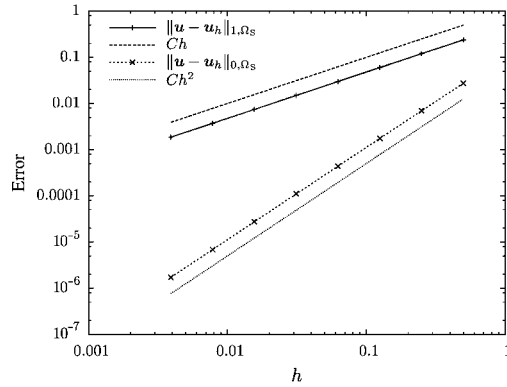
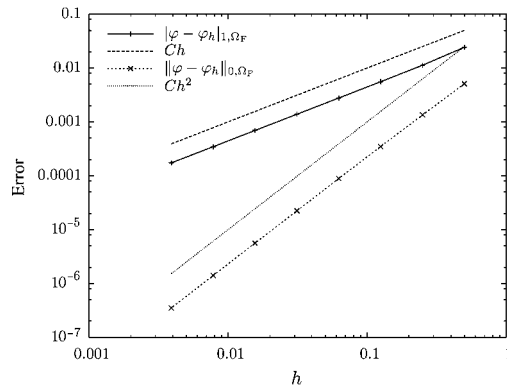


FIG. 2. Problem with an analytical solution: sketch of the domains.

FIG. 3. Problem with an analytical solution: convergence history for  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_S}$  and  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_S}$  with uniform meshes.FIG. 4. Problem with an analytical solution: convergence history for  $\|\varphi - \varphi_h\|_{0, \Omega_F}$  and  $|\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_F}$  with uniform meshes.

and the global effectivity index

$$\theta := \frac{\eta}{\sqrt{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_S}^2 + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_F}^2 + \|p - p_h\|_{1, \Omega_F}^2}}.$$

Note that all of the indices converge towards constants, even though this fact is not predicted by the theory presented in Section 4. In this table and thereafter DOF denotes the total number of degrees of freedom for the three variables.

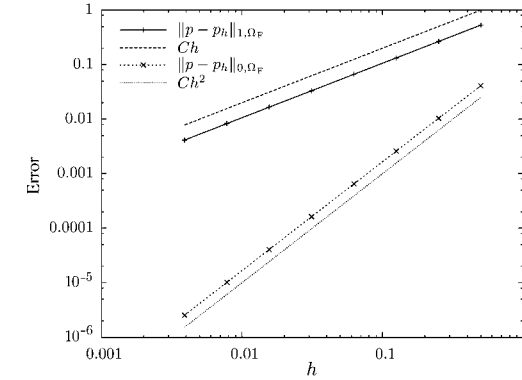
FIG. 5. Problem with an analytical solution: convergence history for  $\|p - p_h\|_{0, \Omega_F}$  and  $\|p - p_h\|_{1, \Omega_F}$  with uniform meshes.

TABLE 1 Problem with an analytical solution: effectivity indices on uniform meshes

DOF	$\theta^{\mathbf{u}}$	$\theta^{\varphi}$	$\theta^p$	$\theta$
32	2.5567	2.5581	3.3067	3.1921
92	2.8298	3.5696	3.6714	3.5435
308	2.9748	3.8921	3.8398	3.7082
1124	3.0487	3.9977	3.9209	3.7880
4292	3.0857	4.0352	3.9606	3.8273
16772	3.1042	4.0499	3.9804	3.8468
66308	3.1134	4.0563	3.9902	3.8565
283684	3.1180	4.0592	3.9951	3.8613

## 5.2 An L-shaped vessel filled with a compressible fluid

Next, we test the method in a problem without a known analytical solution. In this test (and in the following one) we are particularly interested in assessing the performance of an adaptive procedure guided by the error indicators

$$\eta_K := \begin{cases} \eta_K^{\mathbf{u}}, & K \in \mathcal{T}_h^S, \\ [(\eta_K^p)^2 + (\eta_K^{\varphi})^2]^{\frac{1}{2}}, & K \in \mathcal{T}_h^F. \end{cases}$$

The basic scheme of the adaptive procedure is as follows.

1. Solve (3.1) and (3.2) in an initial mesh  $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_0^S \cup \mathcal{T}_0^F$  and compute  $\eta_K$  for all  $K \in \mathcal{T}_0$ .
2. If  $\eta_K \geq \delta \max_{K' \in \mathcal{T}_0} \eta_{K'}$  (where  $0 < \delta < 1$  is fixed in advance) then  $K$  is subdivided.
3. The process is repeated until  $\eta$  is smaller than a prescribed tolerance.

The meshes are generated with Triangle (cf. Shewchuk, 2002) and we have implemented the case in which the meshes for the fluid and the solid match on the common interface. We have used the value  $\delta = 0.75$  in all of the experiments.

The domain and boundary conditions are described in Fig. 6 (left). We have set all of the physical parameters to one:  $\lambda = \mu = \rho_S = \rho_F = c = 1$ . The external forces have been taken as follows:

- $f_S = (0, -1)$ ,
- $f_F = \nabla(r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3}\theta)$ , where  $r := |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  and  $\theta$  and  $\mathbf{x}_0$  are shown in Fig. 6 (left).

Several singularities appear in this case because of the re-entrant angles of  $\Omega_S$  and  $\Omega_F$ , the definition of  $f_F$  and the change on the boundary conditions. In Fig. 6 (right) we depict the initial mesh used for this test and in Fig. 7 the adapted meshes after 15 and 25 iterations.

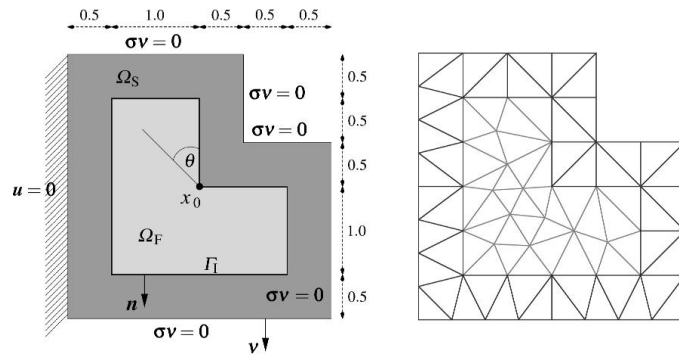


FIG. 6. Sketch of the L-shaped domains (left) and the initial mesh (right).

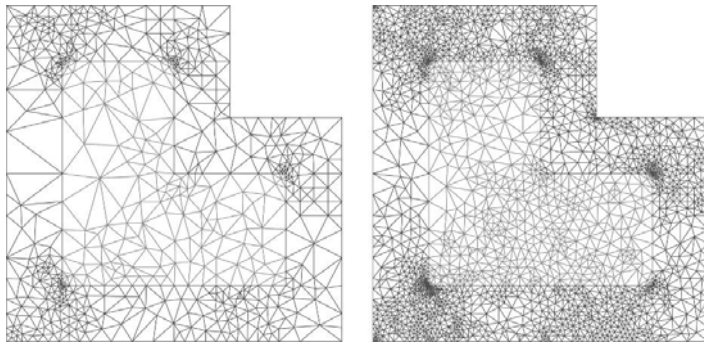


FIG. 7. L-shaped domains: adapted meshes after 15 (left) and 25 iterations (right).

It can be seen that the indicator is able to capture all of the singularities in the fluid and the solid domains. In fact, Fig. 8 shows zooms of a highly refined adapted mesh in the vicinity of re-entrant angles of the fluid (left) and the solid (right) domains.

We do not report error curves in this case because no analytical solution is available. Instead, we depict in Fig. 9 the estimated global error  $\eta$  (cf. (4.5)) versus DOF for the adapted and uniformly refined meshes.

Let us remark that, since  $\eta$  is an estimator of  $(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega_S}^2 + |\varphi - \varphi_h|_{1,\Omega_F}^2 + \|p - p_h\|_{1,\Omega_F}^2)^{1/2}$  and in this case  $(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_S}^2 + |\varphi|_{1,\Omega_F}^2 + \|p\|_{1,\Omega_F}^2)^{1/2} \approx 112$ , the estimated errors shown in Fig. 9 correspond to relative errors ranging from 30 to 3% for the uniform meshes and from 30 to 1.4% for the adaptively refined meshes.

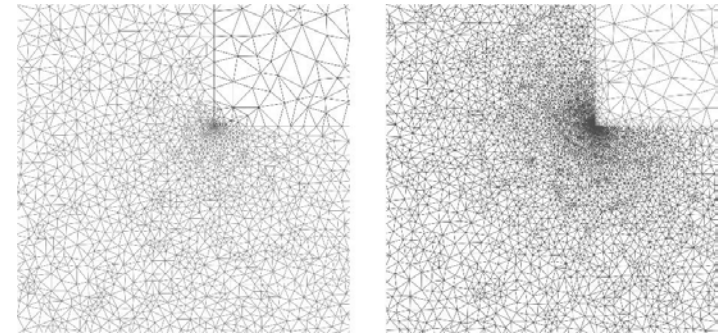


FIG. 8. L-shaped domains: zoom of an adapted mesh at re-entrant angles of the fluid (left) and solid (right) domains.

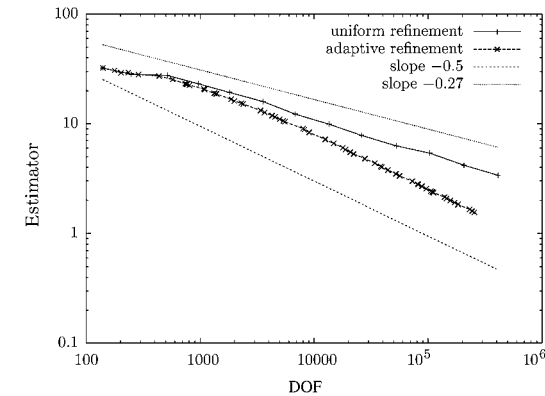


FIG. 9. L-shaped domains: convergence history for  $\eta$  versus DOF with uniform and adaptively refined meshes.

We have included in Fig. 9 two lines with slopes  $-0.27$  and  $-0.5$ . The first one corresponds to the theoretical order of convergence for the error with uniform meshes. The second one corresponds to the optimal order that could be attained with piecewise linear elements. The orders of convergence for the depicted estimated error curves have also been computed by means of a least squares fitting that yields the values  $-0.287$  and  $-0.498$ , respectively. Both are very close to the expected values for the error.

Because of the equivalence proved between the estimated and the actual global errors, both have the same asymptotic dependence on DOF. Therefore the estimated error curve indicates that the error itself also has to attain an optimal order when the adaptive meshes are used. This yields some evidence of the fact that the adaptively created meshes should be close to the optimal meshes.

### 5.3 A vessel filled with an ideal incompressible fluid

Finally, we test the method with a fluid that is modelled as perfectly incompressible. We have used the same physical parameters as in the previous test, except for the sound speed which has been taken as  $c = \infty$ , namely,  $d(p, q) \equiv 0$  in (3.1) and (3.2) (cf. Remark 2.2).

The domain and boundary conditions are described in Fig. 10 (left) and we have taken  $\mathbf{f}_S = (0, -1)$  and  $\mathbf{f}_F = (0, -1)$  as well.

In Fig. 10 (right) we depict the initial mesh used for this test and in Fig. 11 we depict the adapted meshes after 7 and 15 iterations.

We observe that the indicator is able to capture all of the singularities, namely, one at each re-entrant angle of  $\Omega_S$  and the other two at the top and bottom left corners (because of the change on the boundary conditions). Since the fluid domain is convex, no singularity appears in the fluid. This is recognized by the estimator since the elements in  $\Omega_F$  are refined only to preserve the compatibility of the meshes on the fluid–solid interface. This can be clearly seen in Fig. 12, which shows a zoom of a highly refined adapted mesh in the vicinity of one of the re-entrant angles.

We depict in Fig. 13 the estimated global error  $\eta$  versus DOF.

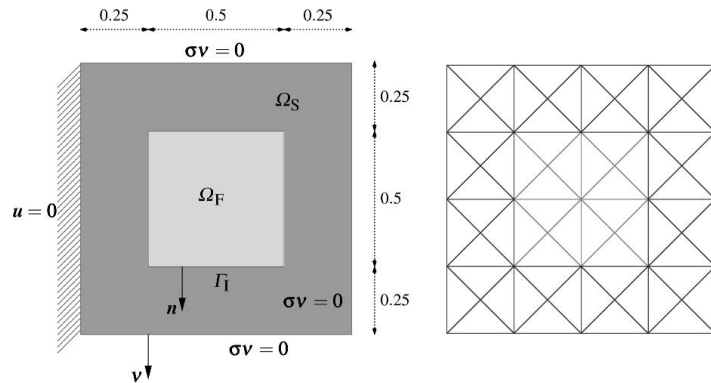


FIG. 10. Incompressible fluid: sketch of the domains (left) and the initial mesh (right).

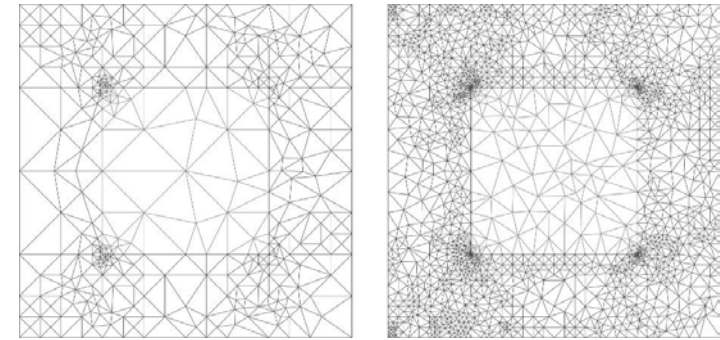


FIG. 11. Incompressible fluid: adapted meshes after 7 (left) and 15 iterations (right).

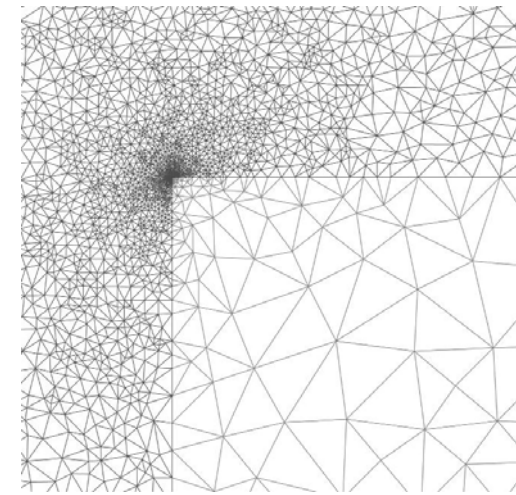


FIG. 12. Incompressible fluid: zoom of an adapted mesh at a re-entrant angle.

Once more, we have included in Fig. 13 two lines with slopes  $-0.27$  and  $-0.5$  that correspond to the theoretical order of convergence for the error with uniform meshes and the optimal order attainable with piecewise linear elements, respectively. It can be seen from this figure that, for sufficiently refined meshes, the adaptive scheme again yields an optimal order of convergence. In fact, the orders of convergence for the depicted estimated error curves computed by a least squares fitting are in this case  $-0.288$  and  $-0.499$ , respectively.

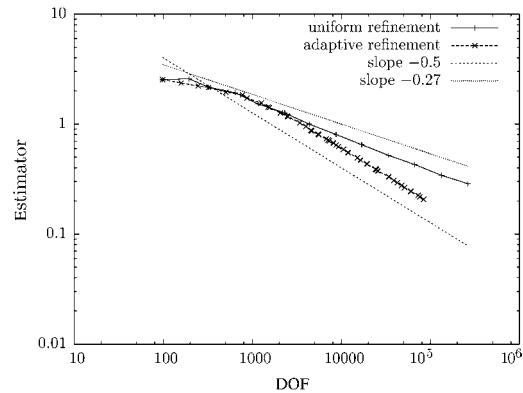


FIG. 13. Incompressible fluid: convergence history for  $\eta$  versus DOF with uniform and adaptively refined meshes.

Let us finally remark that the performance of the method is not affected by the fact that the fluid is incompressible.

## 6. Conclusions

In this work we presented the mathematical and numerical analysis of a static fluid–solid interaction problem. The analysis covered the whole range from the well posedness of the continuous problem, the Galerkin approximation using conforming finite elements and the *a posteriori* estimation of the error, and an adaptive scheme based on the latter. Further investigation about the extension of the present framework to more general situations such as nonlinear materials and/or flows, and time-dependent problems, will be the subject of future research.

## Acknowledgements

The authors thank Pablo Gamallo and Luis Hervella-Nieto for providing a code that was used as a starting point for the computations.

## Funding

Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica through Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (1070698 to R.A.); FONDAPE and BASAL projects Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile to R.A. and R.R.; Faculty of Sciences, University of Strathclyde (Starter's Grant to G.R.B.); Fundación Andes (C-14055 to F.J.).

## REFERENCES

BERMÚDEZ, A., GAMALLO, P., HERVELLA-NIETO, L. & RODRÍGUEZ, R. (2003) Finite element analysis of pressure formulation of the elastoacoustic problem. *Numer. Math.*, **95**, 29–51.

- BERMÚDEZ, A., GAMALLO, P., HERVELLA-NIETO, L., RODRÍGUEZ, R. & SANTAMARINA, D. (2008) Fluid-structure acoustic interaction. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids* (S. Marburg & B. Nolte eds). Berlin: Springer, pp. 253–286.
- BRAESS, D. & BLÖMER, C. (1990) A multigrid method for a parameter dependent problem in solid mechanics. *Numer. Math.*, **57**, 747–761.
- BRENNER, S. & SCOTT, L. R. (1994) *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer.
- BREZZI, F. & FORTIN, M. (1991) *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. New York: Springer.
- BUCHHOLZ, R. D., YEH, D. D., TROBAUGH, J., MCDURMONT, L. L., STURM, C. D., BAUMANN, C., HENDERSON, J. M., LEVY, A. & KESSMAN, P. (1997) The correction of stereotactic inaccuracy caused by brain shift using an intraoperative ultrasound device. *CVRMed-MRCAS'97: First Joint Conference, Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine and Medical Robotics and Computer-Assisted Surgery* (J. Troccaz, E. Grimson & R. Mosges eds). Lecture Notes in Computer Science, vol. 1205. Springer.
- ERN, A. & GUERMOND, J.-L. (2004) *Theory and Practice of Finite Elements*. New York: Springer.
- FUNG, Y. C. (1993) *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer.
- GASTALDI, L. (1996) Mixed finite element methods in fluid structure systems. *Numer. Math.*, **74**, 153–176.
- GATICA, G. N. & WENDLAND, W. (1997) Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyper-elastic interface problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**, 2335–2356.
- GRISVARD, P. (1985) *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Boston, MA: Pitman.
- HAGEMANN, A. (2001) *Biomechanical Model of the Human Head with Variable Material Properties for Intraoperative Image Correction*. Berlin: Logos.
- HAGEMANN, A., ROHR, K. & STIEHL, H. S. (2002) Coupling of fluid and elastic models for biomechanical simulations of brain deformations using FEM. *Med. Image Anal.*, **6**, 375–388.
- HAGEMANN, A., ROHR, K., STIEHL, H. S., SPETZGER, U. & GILSBACH, J. M. (1999) Nonrigid matching of tomographic images based on a biomechanical model of the human head. *Medical Imaging 1999—Image Processing (MI'99)* (K. M. Hanson ed.). *Proceedings of SPIE*, vol. 3661. Bellingham, WA: SPIE, pp. 583–592.
- HILL, D. L. G., MAURER, C. R., MACIUNAS, R. J., BARWISE, J. A., FITZPATRICK, J. M. & WANG, M. Y. (1998) Measurement of intraoperative brain surface deformation under a craniotomy. *Neurosurgery*, **43**, 514–526.
- MAURER, C. R., HILL, D. L. G., MARTIN, A. J., LIU, H., MCCUE, M., RUECKERT, D., LLORET, D., HALL, W. A., MAXWELL, R. E., HAWKES, D. J. & TRUWIT, C. L. (1998) Investigation of intraoperative brain deformation using a 1.5-T interventional MR system: preliminary results. *IEEE Trans. Med. Imaging*, **17**, 817–825.
- MORAND, H.-P. & OHAYON, R. (1995) *Fluid Structure Interaction*. Chichester: Wiley.
- NEČAS, J. (1986) *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Chichester: Wiley.
- NEČAS, J. & HLAVÁČEK, I. (1981) *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*. Amsterdam: Elsevier.
- PAULSEN, K. D., MIGA, M. I., KENNEDY, F. E., HOOPEES, P. J., HARTOV, A. & ROBERTS, D. W. (1999) A computational model for tracking subsurface tissue deformation during stereotactic neurosurgery. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **46**, 213–225.
- SCHEURER, B. (1977) Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires. *RAIRO Anal. Numér.*, **11**, 369–400.
- SCOTT, L. R. & ZHANG, S. (1990) Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comput.*, **54**, 483–493.
- SHEWCHUK, J. (2002) Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Comput. Geom. Theory Appl.*, **22**, 21–74.
- VERFÜRTH, R. (1996) *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Chichester: Wiley.

VERFÜRTH, R. (1998) A posteriori error estimators for convection–diffusion equations. *Numer. Math.*, **80**, 641–663.

### Appendix A. A nonlinear elastic material

This section is devoted to presenting the main ideas about the extension of the framework described in Sections 2 and 3 to the nonlinear case. We still consider the system of equations (2.1)–(2.7), but now, instead of Hooke’s law (2.8), we assume the following nonlinear constitutive law, called the Hencky–von Mises law (cf. Nečas & Hlaváček, 1981; Nečas, 1986):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) := [\kappa - \mu(\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))] \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu(\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

where, for  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , we have

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} := \left( \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I} \right) : \left( \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I} \right).$$

Here  $\kappa$  is a positive constant, called the bulk modulus, and  $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a nonlinear Lamé function. We assume that  $\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$  and that there exist constants  $\mu_1$  and  $\mu_2$  such that

$$0 < \mu_1 \leq \mu_1(t) < \kappa \quad \text{and} \quad 0 < \mu_1 \leq \mu(t) + 2t\mu'(t) \leq \mu_2$$

for all  $t \in \mathbb{R}^+$ .

We will only consider the case in which the fluid is incompressible, i.e.,  $d(p, q) = 0$ . The compressible case deserves further investigation since the theoretical results available for nonlinear problems with constraints (cf. Scheurer, 1977) do not apply to this situation.

Let  $\mathcal{X}'$  be the dual space of  $\mathcal{X}$  and let  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  be the duality pairing on  $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}$ . We define the mapping  $\mathbf{A}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  by

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \rangle &= \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ &= \int_{\Omega_S} \{[\kappa - \mu(\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))] \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu(\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Using this mapping, the weak formulation of the problem is obtained by repeating exactly the same steps from the linear problem and we arrive at the following:

find  $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  such that

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \rangle + b((\mathbf{v}, \psi), p) = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \psi), \quad (\text{A.2})$$

$$b((\mathbf{u}, \varphi), q) = 0 \quad (\text{A.3})$$

for all  $((\mathbf{v}, \psi), q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$ .

We also propose a finite-element scheme analogous to (3.1) and (3.2):

find  $((\mathbf{u}_h, \varphi_h), p_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h$  such that

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_h, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h) \rangle + b((\mathbf{v}_h, \psi_h), p_h) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_h, \psi_h), \quad (\text{A.4})$$

$$b((\mathbf{u}_h, \varphi_h), q_h) = 0 \quad (\text{A.5})$$

for all  $((\mathbf{v}_h, \psi_h), q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h$ .

**THEOREM A1** The nonlinear mapping  $\mathbf{A}$  defined in (A.1) defines a Lipschitz continuous operator, strongly monotone in  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_h$ , namely, there exist strictly positive constants  $M$  and  $\tilde{\alpha}$ , independent of  $h$ , such that

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi) - \mathbf{A}(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}'} \leq \mathcal{M} \|(\mathbf{u}, \varphi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}}$$

for all  $(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}$  and

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi) - \mathbf{A}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u}, \varphi) - (\mathbf{v}, \psi) \rangle \geq \tilde{\alpha} \|(\mathbf{u}, \varphi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}}^2$$

for all  $(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}_h$ .

*Proof.* Following Gatica & Wendland (1997), we may prove that

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi) - \mathbf{A}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u}, \varphi) - (\mathbf{v}, \psi) \rangle \geq \tilde{\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}^2,$$

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}, \varphi) - \mathbf{A}(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{X}'} \leq \mathcal{M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}$$

for all  $(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{X}$ . Hence we proceed as in the proofs of Lemmas 2.4 and 3.1 to conclude the theorem.  $\square$

**THEOREM A2** There exist unique solutions  $((\mathbf{u}, \varphi), p)$  and  $((\mathbf{u}_h, \varphi_h), p_h)$  of the problem (A.2) and (A.3) and the problem (A.4) and (A.5), respectively. Moreover, there exists a constant  $C > 0$ , independent of  $h$ , such that

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_S} + |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_F} + \|p - p_h\|_{1, \Omega_F}$$

$$\leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1, \Omega_S} + \inf_{\psi_h \in \mathcal{Y}_h} |\varphi - \psi_h|_{1, \Omega_F} + \inf_{q_h \in \mathcal{M}_h} \|p - q_h\|_{1, \Omega_F} \right).$$

*Proof.* It is enough to apply Theorem A1, Lemmas 2.5 and 3.2 from the present article and Theorems 1.2 and 2.1 from Scheurer (1977) to conclude the existence and uniqueness of the solutions of both the problem (A.2) and (A.3) and the problem (A.4) and (A.5), as well as the error estimate.  $\square$

## À propos de cette thématique

Ces travaux se sont déroulés au *Departamento de Ingeniería Matemática* de l'Universidad de Concepción, où j'ai passé 18 mois en 2006 et 2007. Lorsque je leur ai proposé de travailler sur cette problématique, les chercheurs de ce groupe ont tout de suite été enthousiastes, à l'image de R. ARAYA, G. BARRENECHEA et R. RODRÍGUEZ, qui ont participé dynamiquement à cette collaboration. Il m'ont permis de garder un excellent souvenir de cette nouvelle approche thématique, qui constituait pour moi un gros challenge. Passer de l'utilisation des modèles discrets en l'Informatique Graphique à l'Analyse Numérique des équations des modèles continus. Je crois que cela est réussi (je suis capable de comprendre, c'est déjà beaucoup), et que l'expérience accumulée d'un côté comme de l'autre, permettra de faire fructifier cet échange très complémentaire sur des problématiques communes.

Pour l'instant, nous n'avons pas de contrôle de la précision du modèle lors de la segmentation. Il sera nécessaire d'avoir différentes résolutions selon les zones à segmenter. Cette information *a priori* peut être introduite à deux niveaux : d'une part, au moment de la segmentation des surfaces, pour éviter des calculs inutiles dans les zones qui interagissent peu car éloignées. D'autre part, au moment de la génération du volume, il est possible de créer des tétraèdres dont la taille est adaptée à la zone concernée, par exemple plus fine dans la zone de l'intervention chirurgicale. Aussi, la prochaine étape serait de considérer un cas plus réaliste, c'est-à-dire le cas d'un LCS incompressible, ou d'un solide non linéaire, ce qui serait plus proche du comportement avéré des tissus cérébraux. Il est aussi prévu de comparer les résultats de la simulation avec des images per-opératoires pour mesurer le gain en précision et en rapidité réalisé par l'utilisation de cette nouvelle méthode de couplage fluide/structure pour les tissus cérébraux.

J'espère pouvoir inviter G. BARRENECHEA (actuellement à l'université de Strathclyde, Glasgow) au LIRIS, avec l'idée d'améliorer cette formulation acoustique qui est une alternative moins coûteuse au classique Navier-Stokes [ABJR10]. Et l'on souhaiterait s'attaquer maintenant à l'extension de cette problématique d'interaction fluide/structure pour être capable de répondre à des comportements plus variés (LCS circulant dans les ventricules du cerveau, liquide amniotique dans le cas de la simulation de l'accouchement (voir ci-dessous), etc.) avec des maillages non-isotropes (la déformation n'est pas la même dans toutes les directions) et non-conformes (sur la zone de contact, les sommets n'ont pas besoin d'être identiques sur les 2 surfaces). Et pour finir, on cherchera une implémentation efficace permettant par exemple, lorsque cela sera possible, de résoudre le système par parties (solide, fluide et leur interaction).

# Chapitre 4

## Travaux en cours, Perspectives et Conclusions

Dans les projets auxquels j'ai participé, j'ai apprécié avant tout les échanges fructueux entre des domaines aussi variés que le médical, la physique, la physique nucléaire, la biologie, la mécanique et les mathématiques, pour ne citer que les principales. Le contact avec des personnes aux connaissances très pointues a été très enrichissant pour moi, tant sur la façon d'aborder les problèmes que sur le vocabulaire pour présenter des résultats communs, et je n'ai eu de cesse de découvrir de nouveaux aspects de la collaboration interdisciplinaire. Mon projet est donc naturellement d'approfondir et de renforcer les collaborations que j'aurais déjà pu établir. J'ai l'espoir que ces collaborations permettront de lever certains verrous scientifiques dans le domaine de la modélisation et de la simulation des déformations des tissus mous, notamment proposer des solutions acceptables en temps de calcul pour le per-opératoire, sans sacrifier la précision des résultats. Je suis convaincu que ces problèmes doivent être abordés en interaction avec des chercheurs en mathématiques, bio-mécanique et en imagerie médicale.

En partant de ce constat, je souhaiterais approfondir de nouvelles pistes qui me semblent intéressantes pour mieux contrôler l'erreur commise par les modèles discrets, et où les compétences au LIRIS me paraissent incontournables, notamment si l'on désire construire un modèle géométrique générique et introduire des informations extérieures, plus spécialement physiologiques, pour personnaliser la simulation à chaque patient. Il me paraît aussi ici très intéressant d'explorer des voies communes et de profiter de la complémentarité avec les équipes avec qui je collabore, pour proposer des modèles combinant continu et discret, éventuellement à différentes résolutions. C'est cette voie que nous nous proposons d'explorer avec F. GALDAMES, dans la seconde partie de sa thèse. Nous essayons d'intégrer, dans le simulateur médical, le modèle 3D développé au LIRIS à l'aide de techniques de traitement d'images. Le travail réalisé en analyse numérique, en collaboration avec l'université de Concepción, prend alors, dans ce contexte, tout son sens.

D'autre part, je voudrais profiter de la chance d'avoir au niveau local un projet d'envergure régionale et européenne : le projet ETOILE, dans lequel l'équipe est partie prenante. Mes activités au sein de ce groupe s'étaient estompées du fait de l'éloignement pendant mon expatriation. Le travail de thèse de L. CAUSA devrait permettre de faire le lien avec les derniers développements réalisés dans l'équipe SAARA, notamment avec les



thèses antérieures autour de la prise en compte du mouvement de la tumeur pulmonaire en hadronthérapie, dont celle de V. BAUDET, que j'ai encadrée. Ainsi, considérer l'effet du diaphragme sur la respiration permettra d'améliorer la prédiction du mouvement de tumeurs pulmonaires pendant le processus de traitement par irradiation, ce qui devrait permettre d'optimiser la dosimétrie et diminuera les effets radiobiologiques défavorables dus au traitement médical. Le traitement des signaux respiratoires initié par L. CAUSA, permettra le pilotage ainsi que la validation du modèle pulmonaire obtenu.

Dans les paragraphes qui suivent, je donnerai quelques pistes de recherche à court ou moyen terme, pour l'extension des différents travaux présentés dans ce rapport.

## 4.1 Acquisition de la surface corticale pour piloter le modèle biomécanique du cerveau

Au LIRIS et à l'Université du Chili, nous travaillons actuellement au développement d'un modèle biomécanique des structures cérébrales appliqué à la modélisation du *Brain-shift* qui, comme on l'a déjà vu, correspond aux déformations subies par le cerveau durant une intervention chirurgicale. Ces déformations se voient influencées par de multiples facteurs, comme par exemple la gravité, la perte de liquide céphalo-rachidien, les médicaments administrés, la résection des tissus, la pression sanguine, des facteurs physiologiques propres au patient, etc. L'amplitude de ces déformations est très variable, on peut enregistrer des déplacements de 24 mm en moyenne et jusqu'à 31 mm sur la position de la tumeur cérébrale.

Pendant une neurochirurgie, il est nécessaire de connaître la position exacte des structures cérébrales. Une des solutions peut venir des images per-opératoires. Mais en général, ces systèmes sont très onéreux et se révèlent incompatibles avec l'instrumentation utilisée dans le pavillon chirurgical, comme cela peut être le cas avec l'imagerie RM à cause des grands champs magnétiques générés. Une autre solution est l'utilisation des images per-opératoires, qui sont alors recalées avec la position du patient sur la table. Pour ce recalage, on employait auparavant un cadre stéréotaxique, mais il existe maintenant d'autres moyens, comme les systèmes optiques basés sur la localisation de pastilles réfléchissantes, des cadres passifs articulés ou encore des localisateurs magnétiques. Cependant, même si l'on effectue un recalage correct avec la position du patient, la position dans l'image des structures cérébrales peut ne pas coïncider avec la position réelle dans la salle d'opération, étant donné que le cerveau subit des déformations pendant l'opération. On propose donc d'utiliser un modèle bio-mécanique du cerveau, basé sur les images préopératoires. Le modèle se déforme, simulant la déformation subie, et on répercute cette déformation sur les images en tenant compte des informations fournies par le modèle.

L'utilisation d'un tel modèle bio-mécanique implique nécessairement un recalage de celui-ci avec la position du patient dans la salle d'opération. De plus, il faut apporter de l'information supplémentaire au modèle pendant tout le processus opératoire. Cette information doit être facilement acquise, et suffisante quantitativement pour permettre une diminution significative de l'erreur inhérente au modèle. Parmi toutes les alternatives, la définition d'une cartographie du cortex, utilisée conjointement avec un système optique adapté, possède de nombreux avantages si on la compare avec les autres solutions. En effet,

si l'utilisation des images US permet de connaître la position des structures internes, ce qui autorise la correction des points du modèle qui se trouvent dans le voisinage de la zone d'intervention (la tumeur, par exemple), l'usage de la sonde échographique (US ou Doppler) nécessite qu'une pression soit exercée à la surface du cerveau : cela peut produire des données erronées. D'autre part, l'alternative d'acquérir la position de points du cortex en utilisant un instrument qui puisse être vu par un localisateur optique (avec pastilles réfléchissantes par exemple), nécessite un temps d'acquisition proportionnel à la quantité de points que l'on veut obtenir. En comparaison à ces deux techniques, l'acquisition d'une cartographie de la surface exposée requiert un minimum de temps et permet d'obtenir une grande quantité d'information. On peut ainsi connaître la position d'un grand nombre de points en temps quasi réel, ce qui serait beaucoup plus coûteux si on utilisait un outil du genre localisateur. De plus, il n'est plus nécessaire de toucher la zone d'opération, puisque l'on ne manipule plus aucun instrument sur le cortex. Il n'est plus nécessaire non plus d'interrompre l'opération durant de grandes séquences de temps, ce qui est réduit à quelques secondes, le temps de libérer le champ de vision des instruments, et de « prendre la photo ».

Parmi les techniques existantes pour cette cartographie, on note la stéréopsis [ASP99, SD02, SLF+05] et le scanner laser [SDD+05]. La stéréopsis offre l'avantage de ne nécessiter qu'une paire de caméras, qui peuvent par ailleurs être montées sur une structure déjà présente dans le pavillon : par exemple sur le microscope binoculaire classiquement utilisé durant l'opération. De plus, à l'aide de ces caméras, on peut développer un système pour suivre le mouvement des instruments, offrant une alternative économique à l'utilisation du localisateur optique 6D avec les pastilles réfléchissantes.

Dans un projet en cours, nous avons déjà étudié cette possibilité, qui permettrait d'apporter de l'information complémentaire au modèle bio-mécanique, par l'intermédiaire d'images US localisées, ou par la localisation de points du cortex. Dans les deux cas, cela se serait fait en utilisant la station Surgetics™, ou n'importe quel autre système équivalent. Ce type de localisation est nécessaire pour connaître la position de la sonde échographique, ou du palpeur. Cependant, la possibilité d'acquérir toute la surface exposée du cortex possède les avantages que l'on vient de décrire, et serait d'un grand apport. Cette dernière piste est donc privilégiée, et une collaboration avec l'Universidad de la República, à Montevideo (Uruguay) a été évoquée. Ils souhaitent développer, au sein du *Groupe de Traitement d'Images* (GTI), les outils nécessaires. Cela permettrait de répondre aux interrogations qui persistent dans ce domaine, tant au niveau des algorithmes que de l'instrumentation. En effet, des solutions ont déjà été proposées, notamment par l'équipe de M. Miga (2 brevets déposés), mais des problèmes se posaient encore au niveau de la précision des caméras binoculaires, ainsi que des erreurs liées à de la condensation ou des réflexions sur l'enveloppe dans laquelle sont placées les instruments pour des raisons de stérilisation. Nous espérons que la nouvelle génération de caméras permettra des avancées significatives.

## 4.2 L'apport de l'élastographie

L'élastographie est une méthode non invasive pour calculer les propriétés mécaniques des tissus. Son développement et son application en médecine se base sur le constat qu'en de nombreux cas, les images conventionnelles ne permettent pas de classifier correctement

certaines pathologies. Cette classification pourrait être grandement améliorée sachant que les caractéristiques des tissus sains et malades sont généralement différentes. Ainsi, par exemple dans le cas du cancer du sein, il est quelquefois difficile de distinguer une tumeur d'un kyste, alors qu'en élastographie, l'image typique du kyste est une zone claire entourée d'une zone plus obscure, bien différente de celle d'une tumeur.

En général, les méthodes pour obtenir des élastographies se basent sur deux modalités d'imagerie médicale, US et RM. Par ailleurs, il existe des études pour une grande variété d'organes, utilisant chacune de ces modalités. Parmi les organes susceptibles de nous intéresser, on peut citer le cerveau, le poumon, etc.

Récemment, une nouvelle technique de stimulation mécanique est apparue pour être utilisée en élastographie, appelée *Supersonic Shear Imaging* (SSI), et qui est basée sur des radiations acoustiques qui peuvent créer des ondes de cisaillement basse fréquence au sein du tissu. Il est aussi possible de créer cet effet avec des sondes échographiques conventionnelles. En réalisant plusieurs stimulations, et en déplaçant le point de convergence plus vite que le son, on crée des fronts d'onde de cisaillement. On crée ainsi un effet similaire au mur du son. Si on suppose que le milieu est seulement élastique, la vitesse des ondes produites est fonction de l'élasticité de cisaillement :  $\mu = \rho c^2$  où,  $c$  est la vitesse des ondes de cisaillement et  $\rho$  est la densité du milieu. Pour mesurer le déplacement de l'onde, on utilise un échographe ultra-rapide qui permet d'acquérir l'image de nombreux plans entre chacune des stimulations des tissus. On obtient ainsi une image du déplacement de l'onde dans les tissus.

**Utilisation de l'élastographie dans nos travaux** Toujours dans cette optique de faire le lien entre les différents domaines, en sus de combiner les modèles biomécaniques pour des opérations de segmentation, on voudrait ici étudier l'apport de nos modèles discrets, voire continus, dans ce processus d'élastographie, pour en déduire les paramètres qui serviront directement à piloter nos modèles pour la simulation. On est toujours dans ce processus d'unification tout au long de la chaîne, telle que présentée en introduction. On espère beaucoup de cette action, qui couplée à une modélisation adéquate, devrait apporter plus de connaissance sur les propriétés des tissus mous Et cela permettrait enfin de fournir aux médecins des prédictions fiables, calquées sur des données réelles.

### 4.3 Simulateur d'accouchement

Je ne peux pas terminer cette synthèse sans parler du simulateur d'accouchement, . . . En effet, dans le cadre de l'élaboration d'un simulateur pour l'apprentissage du geste médical de l'accouchement, un premier modèle bio-mécanique a été développé, incluant les différents organes impliqués (abdomen, bassin osseux et mou, utérus, fœtus) ainsi que leurs interactions [BZSR09, BZS<sup>+</sup>10]. Cette simulation 3D permet ainsi de simuler le comportement réaliste des organes, de calculer les interactions entre les différents organes, et de les visualiser. Cela a été validé au sein d'un prototype mécanique (BirthSIM, développé au laboratoire Ampère de l'INSA).

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe SAARA dans le cadre de la thèse de R. BUTTIN, encadré par F. ZARA et B. SHARIAT, et a permis de poser des bases solides pour une thématique ambitieuse, où les verrous scientifiques sont complexes et nombreux.

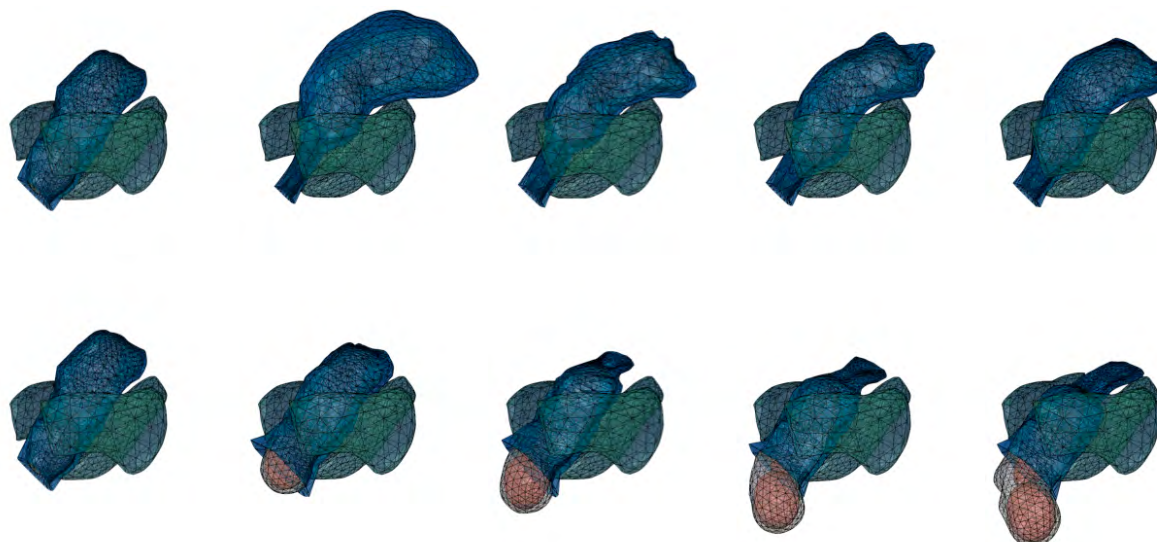


FIGURE 4.1 – Simulation 3D de la descente du fœtus sans trajectoire programmée, d'après [BZS<sup>+</sup>10]

Ainsi, ce modèle doit encore être amélioré sur le plan bio-mécanique afin de tenir compte du ressenti des obstétriciens avec qui nous sommes en contact dans plusieurs maternités. Par exemple, la géométrie du bassin doit notamment être modifiée pour un meilleur comportement du mouvement de la tête du fœtus au cours de l'accouchement. L'amélioration du modèle bio-mécanique peut porter sur la prise en compte des différents paramètres et scénarios de l'accouchement (contractions abdominales ponctuelles, différents positionnements de la tête du fœtus, etc.). Afin d'obtenir une simulation temps réel, plusieurs pistes peuvent être suivies (maillage adaptatif, adaptation des méthodes de simulation, parallélisation des algorithmes). Une fois cet objectif atteint, nous pourrons ensuite aborder la problématique du couplage de la simulation avec un dispositif haptique. Il s'agira alors de proposer un couplage efficace permettant à la fois d'intégrer dans la simulation les interactions de l'utilisateur, et de répercuter les calculs effectués (efforts ou position du fœtus) dans le simulateur physique. C'est tout ce procédé qui a fait l'objet du dépôt d'une ANR.

En s'appuyant sur ces travaux préliminaires, le travail de Master2 Recherche de Z. JIANG, que je co-encadre avec F. ZARA se place dans le cadre de l'amélioration des maillages géométriques avec une première étape au niveau de l'extension des surfaces par des techniques dite de *Hole Filling* [Lie03]. Il est très courant que les organes à considérer soient incomplets. En effet, pour limiter les effets invasifs des techniques d'acquisition d'imagerie ou bien pour réduire les temps d'acquisition, les images sont restreintes à la stricte zone nécessaire au diagnostic et à la planification du traitement. Pour nous, en informatique graphique, cela pose un problème car les données sont manquantes aux extrémités des organes, et leur surface reste ouverte. Une simple fermeture par un maillage plan est souvent suffisante. Mais quand bien même cela concerne les organes environnants, cela va engendrer des erreurs une fois intégré à la simulation physique, car la géométrie pas plus que la masse de l'organe considéré ne sont corrects. On s'intéressera aussi à étendre la surface d'un organe tout en respectant les contraintes imposées par les organes voisins,

en s’inspirant éventuellement des travaux existants sur des données issues de *scan 3D* et où l’information incomplète est inférée à partir d’objets similaires [PMG<sup>+</sup>05].

Au niveau de l’implémentation logicielle, nous profitons de cette étude pour nous libérer des contraintes d’*Abaqus*® pour tester en grandeur nature l’utilisation de MEPP, développée au LIRIS (<https://liris.cnrs.fr/plateformes/MEPP>), et qui est une plateforme modulaire de traitement de maillages basée sur les bibliothèques CGAL (<http://www.cgal.org/>), Qt et libQGLViewer.

## 4.4 Vers un modèle humain temps réel ?

Dans tous les travaux réalisés jusqu’ici, nous cherchons à modéliser et simuler de manière réaliste les organes du corps humain à partir de caractéristiques physiologiques, anatomiques ou issues d’acquisition multi-modales. Ainsi, pour obtenir un comportement réaliste, les modèles géométriques des organes sont issus de données médicales (scanner, IRM), et la simulation se base sur un modèle bio-mécanique des organes, en utilisant différentes techniques selon les besoins (systèmes de particules, masses-ressorts ou éléments finis). D’autres données peuvent s’ajouter pour compléter le modèle, comme des caractéristiques physiologiques ou issues d’acquisition. Les modèles employés actuellement sont numériquement très complexes, induisant des temps de calculs de plusieurs minutes minimum. Notre objectif est de réussir à diminuer ces temps de calculs pour obtenir des simulations en temps interactif. L’objectif final est la mise en place de ces simulations au sein de logiciels de traitement contre le cancer ou encore de simulateurs d’apprentissage nécessitant une interaction avec l’utilisateur.

Comme nous l’avons vu, à terme, le modèle doit permettre d’obtenir en temps réel toute information requise par les algorithmes de calcul employés dans les logiciels ou les modules de traitement adaptatifs du cancer par exemple. Le temps réel ne peut être obtenu qu’après une phase d’optimisation et de parallélisation des algorithmes de simulation employés.

Nous souhaitons diminuer les temps de calcul de simulations basées sur des modèles physiques. Quelle que soit la méthode de résolution employée (continue ou discrète), les nouvelles positions des éléments de la simulation sont définies par intégration à partir des forces et contraintes subies par l’objet simulé. Des techniques de parallélisation ont déjà été étudiées par l’équipe SAARA dans le cadre de systèmes discrets, afin de limiter les temps de calcul nécessaires à la résolution de systèmes linéaires générés lors de l’utilisation de méthode d’intégration implicite [AJS00, Zar03]. D’autres travaux se sont intéressés au raffinement des modèles géométriques des objets, afin de concentrer les calculs aux endroits pertinents tels que les zones de contact entre organes ou entre un organe et un outil médical.

Ainsi, pour satisfaire la contrainte de temps réel, plusieurs avancées majeures sont à espérer :

- La première concerne l’obtention d’une modélisation géométrique des organes basée sur un maillage adaptatif ;
- La seconde concerne l’apport de la parallélisation des algorithmes de simulation basée sur une structure de donnée efficace ;

- Enfin, une troisième piste peut concerner l’adaptation des méthodes de calcul au cours de la simulation (changement des méthodes d’intégration, des lois de comportement, du pas de temps, etc.).

Un des objectifs sera de faire le lien entre ces méthodes afin de proposer une architecture générique adaptée à tous types d’organes et à tous types de simulations. Ces travaux pourraient être validés par une intégration aux études antérieures, concernant la simulation d’organes de l’appareil respiratoire (effectuée dans le cadre du projet ETOILE), ainsi que ceux concernant la réalisation d’un modèle bio-mécanique de l’accouchement permettant la simulation de la descente du fœtus en interaction avec les organes de la parturiente (abdomen, bassin osseux, utérus, plancher pelvien).

### Apport des masses-tenseurs

Des premiers développements autour des masses-tenseurs (voir page 19 la présentation de ce modèle) ont été intégrés à la plate-forme SOFA (<http://www.sofa-framework>) qui est dédiée à la simulation temps réel et plus particulièrement à la simulation médicale. Nous nous attachons à proposer une formulation générale du modèle masse-tenseur pour des lois non-linéaires en géométrie et en comportement, comme Mooney-Rivlin, Ogden ou Yeoh qui sont très utilisés pour la simulation des tissus mous. Cela permettrait de mieux rendre compte du comportement des tissus, et qui devrait mieux gérer la variation de volume que la formulation de St Venant-Kirchhoff.

Ces travaux se situent aussi dans le cadre de programmes européens (ENVISION, ULICE) dans lesquels ETOILE est impliqué et qui permettront la constitution de bases de données cliniques au niveau européen, et l’accès à des données patients dans les Centres européens en cours de réalisation, pour les équipes membres, comme SAARA.

## 4.5 En conclusion...

Ce document fait la synthèse de l’activité scientifique principale que j’ai pu mener depuis plus de dix ans au sein du Laboratoire d’InfoRmatique en Image et Systèmes d’Information, et plus particulièrement dans ce qui est maintenant l’équipe SAARA (Simulation, Analyse et Animation pour la Réalité Augmentée). Ce travail est présenté sous un cadre unificateur, et j’ai tenté de regrouper cette activité autour de la thématique forte de modélisation des objets déformables, avec application aux tissus mous, le fil conducteur de ma recherche, en choisissant une approche de regroupement des activités autour de deux applications phares que sont la modélisation du système respiratoire et le *Brain-shift*. Ce mémoire regroupe sous le terme modélisation géométrique et physiologique, les différentes entités –segmentation et représentation d’objets 3D, segmentation d’images médicales, construction du modèle ou maillage, extraction et intégration des paramètres physiologiques, simulation pilotage du modèle par ces mêmes paramètres– nécessaires pour aider l’utilisateur à mieux exploiter les images (2D, 3D, médicales, nuages de points, etc.) qui lui sont fournies.

Les travaux présentés dans ce contexte ont des degrés divers d’avancement, certains étant très actifs, d’autres moins. Ils n’ont pas tous fait l’objet de publications équivalentes, et j’ai choisi d’insérer dans ce document les articles les plus significatifs. Quant à certains travaux qui n’ont pas encore pu être publiés, j’ai souhaité les développer pour montrer

toutes les facettes de mes activités.

L'étude et la compréhension des déformations des objets déformables, et plus particulièrement des tissus mous, sont, j'en suis convaincu, un des domaines de recherche les plus prometteurs, sur lequel de nombreuses équipes vont se focaliser à plus ou moins court terme. Nous avons déjà proposé un certain nombre de réponses, tant au niveau de la construction des modèles géométriques que de l'intégration des paramètres physiques permettant de simuler des comportements réalistes. Ainsi, on s'attachait (avec L. CHEVALIER, [CJB03a, CJB05]) à décomposer des objets 3D en vue de leur utilisation en indexation. Même si les résultats sont tout à fait satisfaisants pour l'indexation, cela s'est révélé peu adapté à des déformations, et nous avons donc évolué vers une combinaison hybride de modèles déformables (avec S. PONTIER et M. AMRANI), ce qui a permis de mettre au point de belles animations du poumon et de la respiration. Il manquait encore dans ce travail l'intégration complète des paramètres physiologiques, pour arriver enfin à une simulation physique de phénomènes bio-mécaniques. C'est ce que nous avons réussi à faire, grâce à V. BAUDET. En espérant que les travaux d'E. FLÉCHON aboutissent et permettent l'extension et la généralisation de cette formulation aux triangles et aux tétraèdres.

J'ai ensuite souhaité élargir mes activités à des applications complémentaires, toujours en m'attachant à faire le lien avec les différents maillons de la chaîne de traitement dans les applications médicales. Ainsi, avec F. GALDAMES, nous nous efforçons d'harmoniser les modèles pour que le même type de déformation soit utilisé lors de la segmentation et lors de la simulation. Je pense notamment que l'intégration des paramètres physiologiques dès la première étape serait d'une grande aide. On a vu aussi que le choix de la modélisation bio-mécanique était important, mais la géométrie l'est aussi, et le travail sur les maillages adaptatifs a été très bénéfique. L'amélioration de la qualité des maillages est un sujet en soi et avec Z. JIANG, nous espérons pouvoir fournir des maillages optimisés, pourquoi pas à plusieurs résolutions.

D'un autre côté, lors des travaux précédents, bien que convaincus de la pertinence de notre démarche (contrôler l'erreur dans les systèmes discrets), nous nous sommes confrontés maintes fois à des impasses théoriques. C'est pourquoi, je suis persuadé qu'il faut profiter de la longue expérience d'utilisation des modèles continus du type Éléments Finitis, pour pouvoir améliorer les systèmes masses-ressorts, qui pourraient être vus comme une discrétisation des premiers. Et quoi de plus naturel dans ce cadre, de faire l'analyse de ces systèmes numériques, ce que j'ai réalisé avec l'équipe de Concepción. Toujours dans ce sens, on regardera avec attention l'étude sur les masses-tenseurs (on dispose d'un vecteur Force pour chaque masse comme pour les masses-ressorts, mais avec une équivalence avec les lois d'élasticité, linéaire ou non) en cours de réalisation par X. FAURE.

Il ne reste maintenant plus qu'à intégrer tout ce savoir-faire au cours de la chaîne complète de traitement, c'est ce qui est en cours avec la thèse de L. CAUSA, sur la prise en compte des signaux physiologiques, en vue de piloter la simulation bio-mécanique, le tout pendant les interventions médicales.

Enfin, je souhaiterais, encore une fois, rappeler ici que ce travail s'est effectué grâce à toute une équipe : étudiants, chercheurs et scientifiques du laboratoire ou d'autres entités, ainsi que les partenaires médecins et techniciens médicaux, qui ont pris du temps pour définir avec nous les cahiers des charges, et surtout pour analyser et valider nos résultats,

même quand cela s'avérait fastidieux. Et je les en remercie, en espérant continuer avec chacun une collaboration fructueuse !





# Références

- [ABJR07] R. Araya, G.R. Barrenechea, F. Jaillet, and R. Rodríguez. Finite element analysis of a static fluid-structure interaction problem. Technical Report RR-LIRIS-2007-028, LIRIS UMR 5205 CNRS/Université Claude Bernard Lyon 1, October 2007. Accepted to Journal of Numerical Analysis.
- [ABJR10] R. Araya, G.R. Barrenechea, F. Jaillet, and R. Rodríguez. Finite element analysis of a static fluid-solid interaction problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, June 2010. DOI : 10.1093/imanum/drp042.
- [ABJS04] M. Amrani, M. Beuve, F. Jaillet, and B. Shariat. Tracking of target motion using physically based modelling of organs. *Radiotherapy Oncology*, 73(Sup2) :S73–S76, 2004.
- [ABM06] D.M. Rodrigues A.J. Baptista, J.L. Alves and L.F. Menezes. Trimming of 3D solid finite element meshes using parametric surfaces : Application to sheet metal forming. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(12) :1053–1060, August 2006.
- [AJMS01] M. Amrani, F. Jaillet, M. Melkemi, and B. Shariat. Simulation of deformable organs with a hybrid approach. *RCFAO*, 16(2) :213–242, September 2001.
- [AJP+00] M. Amrani, F. Jaillet, S. Pontier, B. Shariat, and D. Vandorpe. Deformable objects modelling and animation : application to organ’s interactions simulation. In *9th ICGG 2000, Johannesburg (SA)*, pages 164–168, July 2000.
- [AJS00] M. Amrani, F. Jaillet, and B. Shariat. Deformable objects modeling and animation : application to organ’s interactions simulation. *Journal for Geometry and Graphics*, 4(2) :181–188, 2000.
- [ASP99] M.A. Audette, K. Siddiqi, and T.M. Peters. Level-set surface segmentation and fast cortical range image tracking for computing intrasurgical deformations. *Lecture Notes in Computer Science : Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pages 788–797, 1999.
- [AWM05] S.K. Warfield A. Wittek, R. Kikinis and K. Miller. Brain shift computation using a fully nonlinear biomechanical model. In *MICCAI*, volume 2, pages 583–590, 2005.

- [Bau06] V. Baudet. *Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables*. PhD thesis, LIRIS UMR5205-CNRS, Université Lyon 1, June 2006.
- [BBJ<sup>+</sup>09] V. Baudet, M. Beuve, F. Jaillet, B. Shariat, and F. Zara. Integrating Tensile Parameters in Hexahedral Mass-Spring System for Simulation. In *International Conference on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision'2009 - WSCG'2009*, February 2009. Liris-3673.
- [BIC] Mc Connell BIC. Brainweb. [www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/](http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/).
- [BJS02b] V. Baudet, F. Jaillet, and B. Shariat. Fitting a 3D particle system model to a non dense dataset, in medical applications. In *10th ICGG, Kiev (UKR)*, July 2002.
- [BJS03b] V. Baudet, F. Jaillet, and B. Shariat. Fitting a 3D particle system model to a non-dense data set in medical applications. *Journal for Geometry and Graphics*, 7(1) :65–74, 2003.
- [BJS<sup>+</sup>03c] V. Baudet, F. Jaillet, B. Shariat, P.F. Villard, M. Beuve, and et al. Approach to simulate tumour displacements in lungs with mass spring system. In *9th HCPBM, Lyon (F)*, October 2003.
- [BL06] Yogendra Bhasin and Alan Liu. Bounds for damping that guarantee stability in mass-spring systems. *Studies in Health Technology and Informatics*, 119 :55–60, 2006.
- [BVB<sup>+</sup>03a] V. Baudet, P.F. Villard, M. Beuve, F. Jaillet, and B. Shariat. Towards accurate tumours tracking in lungs. In *IEEE IV 2003 - MediVis, London (GB)*, pages 338–343, July 2003.
- [BZS<sup>+</sup>10] Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, Tanneguy Redarce, and Gilles Grangé. Bio-mechanical Simulation of the Fetal descent without Imposed Theoretical Trajectory. Technical Report RR-LIRIS-2010-012, LIRIS, université Lyon 1, 2010.
- [BZSR09] Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, and Tanneguy Redarce. A Biomechanical Model of the Female Reproductive System and the Fetus for the realization of a Childbirth Virtual Simulator. In *IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC'09)*, September 2009.
- [CBE<sup>+</sup>07] P. Calabrese, T. Besleaga, A. Eberhard, V. Vovc, and P. Baconnier. Respiratory inductance plethysmography is suitable for voluntary hyperventilation test. In *29th IEEE conf. on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS 2007*, pages 1055–1057, 2007.
- [CCTG95] D.H. Cooper, T.F. Cootes, C.J. Taylor, and J. Graham. Active shape models - their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61 :38–59, 1995.

- [CDA00] Stéphane Cotin, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. A hybrid elastic model for real-time cutting, deformations, and force feedback for surgery training and simulation. *The Visual Computer*, 16 :437–452, 2000.
- [CGdF00] L.C. G. Coelho, M. Gattass, and L.H. de Figueiredo. Intersecting and trimming parametric meshes on finite element shells. *International Journal For Numerical Methods In Engineering, Elsevier*, 47 :777–800, 2000.
- [CJB03a] L. Chevalier, F. Jaillet, and A. Baskurt. Segmentation and superquadric modeling of 3D objects. In *11th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualization WSCG'03, Plzen, CZ*, volume 11(1), pages 232–240, February 2003.
- [CJB05] L. Chevalier, F. Jaillet, and A. Baskurt. Segmentation et modélisation 3D par un ensemble de superellipsoïdes. *Revue internationale d'ingénierie numérique*, 1(3) :35–60, 2005.
- [CPB<sup>+</sup>05] Stéphane Craighero, Emmanuel Promayon, Pierre Baconnier, Jean-François Lebas, and Max Coulomb. Dynamic Echo-Planar MR Imaging of the Diaphragm for a 3D Dynamic Analysis. *European Radiology*, 15(4) :742–748, 04 2005.
- [CPLH99] B. Couteau, Y. Payan, S. Lavallée, and M.-C. Hobatho. The mesh-matching algorithm : A new automatic 3d mesh generator for finite element analysis. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention ? MICCAI'99*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1175–1182. Springer Berlin / Heidelberg, 1999.
- [CSB<sup>+</sup>05] Olivier Clatz, Maxime Sermesant, Pierre-Yves Bondiau, Hervé Delingette, Simon K. Warfield, Grégoire Malandain, and Nicholas Ayache. Realistic simulation of the 3D growth of brain tumors in MR images coupling diffusion with biomechanical deformation. *IEEE transactions on medical imaging*, 24(10) :1334–1346, October 2005.
- [Del94] H. Delingette. Simplex meshes : a general representation for 3D shape reconstruction. Technical Report 2214, INRIA, March 1994. Programme 4 : robotique, image et vision.
- [Del97] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. Technical Report 3111, I.N.R.I.A., Sophia-Antipolis, France, 1997.
- [Del99a] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2) :111–146, August 1999.
- [Del08] H. Delingette. Triangular springs for modeling nonlinear membranes. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 14(2) :329–341, 2008.
- [ETO02] Projet ETOILE (espace de traitement oncologique par ions légers dans le cadre européen). Centre National d'Hadronthérapie par ions légers, implanté à Lyon Rhône-Alpes, February 2002.

- [Fey64] R. Feynman. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2. Addison Wesley, 1964. chapter 38.
- [FJZM11] X. Faure, F. Jaillet, F. Zara, and J.-M. Moreau. Acquisition multi-modale en temps réel pour le suivi du mouvement respiratoire. In *ORASIS 2011*, June 2011.
- [GDC<sup>+</sup>10] I. Garg, S. D., A. M. Coffey, P. Dumpuri, R. C. Thompson, B. M. Dawant, and M. I. Miga. Enhancement of subsurface brain shift model accuracy : a preliminary study. pages 76250J–76250J–11, 2010.
- [GH97a] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *ACM siggraph proceedings*, pages 209–216, 1997.
- [GJ10] F. Galdames and F. Jaillet. From Triangulation to Simplex Mesh : a Simple and Efficient Transformation. Technical Report RR-LIRIS-2010-021, November 2010.
- [HG99a] Paul S. Heckbert and Michael Garland. Optimal triangulation and quadric-based surface simplification. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 14(1-3) :49 – 65, November 1999.
- [HL04] X. Wang H. Lo. A fast robust algorithm for the intersection of triangulated surfaces. *Engineering with Computers*, 20(1) :11–21, March 2004.
- [HMT<sup>+</sup>08] S. Hughes, J. McClelland, S. Tarte, J. Blackall, J. Liang, S. Ahmad, D. Hawkes, and D. Landau. Assessment of respiratory cycle variability with and without training using a visual guide. *Cancer Therapy*, 6 :945–954, 2008.
- [HRS02a] A. Hagemann, K. Rohr, and HS. Stiehl. Coupling of fluid and elastic models for biomechanical simulations of brain deformations using fem. *Med Image Anal*, 6(4) :375–88, December 2002.
- [Jai99] F. Jaillet. *Contribution à la reconstruction et à l’animation d’objets déformables définis à partir de données structurées en sections*. PhD thesis, Univ. Claude Bernard LYON I, February 1999.
- [JSV98a] F. Jaillet, B. Shariat, and D. Vandorpe. Deformable object reconstruction with particle systems. *Computers & Graphics*, 22(2-3) :189–194, March 1998.
- [JSV98b] F. Jaillet, B. Shariat, and D. Vandorpe. Volume object modeling and animation with particle-based system. In *Proceedings of the 8th ICECGDG*, pages 215–219, Austin (TX), August 1998.
- [JSV01] F. Jaillet, B. Shariat, and D. Vandorpe. Smooth reconstruction of branching objects with b-splines. *RCFAO*, 16(2) :183–201, September 2001.

- [KHD<sup>+</sup>83] R.N. Kjellberg, T. Hanamura, K.R. Davis, S.L. Lyons, and R.D. Adams. Bragg-peak proton-beam therapy for arteriovenous malformations of the brain. *New England Journal of Medicine*, 309(5) :269–274, 1983.
- [Lie03] Peter Liepa. Filling holes in meshes. In *Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 200–205, 2003.
- [LPEN<sup>+</sup>05] W. Lu, P.J. Parikh, I.M. El Naqa, M.M. Nystrom, J.P. Hubenschmidt, S.H. Wahab, S. Mutic, et al. Quantitation of the reconstruction quality of a four-dimensional computed tomography process for lung cancer patients. *Medical physics*, 32 :890, 2005.
- [LSH07] Bryn A. Lloyd, Gábor Székely, and Matthias Harders. Identification of spring parameters for deformable object simulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 13(5) :1081–1094, September 2007.
- [MHM<sup>+</sup>98] C. R. Maurer, D. L. G. Hill, A. J. Martin, H. Liu, M. McCue, D. Rueckert, D. Lloret, W. A. Hall, R. E. Maxwell, D. J. Hawkes, and C. L. Truwit. Investigation of intraoperative brain deformation using a 1.5-T interventional MR system : preliminary results. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(5) :817–825, 1998.
- [MPK<sup>+</sup>99] M. Miga, K. Paulsen, F. Kennedy, A. Hartov, and D. Roberts. Model-Updated Image-Guided neurosurgery using the finite element method : Incorporation of the falx cerebri. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI’99*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 900–909. Springer Berlin / Heidelberg, 1999.
- [Mur04] M.J. Murphy. Tracking moving organs in real time. In *Seminars in radiation oncology*, volume 14, pages 91–100. Elsevier, 2004.
- [Nc10] Suriya Natsupakpong and M. Cenk Çavuşoğlu. Determination of elasticity parameters in lumped element (mass-spring) models of deformable objects. *Graphical Models*, 72(6) :61 – 73, 2010.
- [NFP10] M. Nesme, F. Faure, and Y. Payan. Accurate interactive animation of deformable models at arbitrary resolution. *Int. J. Image Graphics*, 10(2) :175–202, 2010.
- [NMK<sup>+</sup>06] Andrew Nealen, Matthias Müller, Richard Keiser, Eddy Boxerman, and Mark Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4) :809–836, 2006.
- [OM02] C. Ozhasoglu and M.J. Murphy. Issues in respiratory motion compensation during external-beam radiotherapy. *International journal of radiation oncology, biology, physics*, 52(5) :1389–1399, 2002.
- [Owe98a] Steven J. Owen. A survey of unstructured mesh generation technology. In *International Meshing Roundtable*, pages 239–267, 1998.

- [PBG09] Marcel Prastawa, Elizabeth Bullitt, and Guido Gerig. Simulation of brain tumors in MR images for evaluation of segmentation efficacy. *Medical image analysis*, 13(2) :297–311, April 2009.
- [PDA03a] G. Picinbono, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical Models*, 65(5) :305–321, September 2003.
- [PMG<sup>+</sup>05] Mark Pauly, Niloy J Mitra, Joachim Giesen, Markus Gross, and Leonidas J Guibas. Example-based 3D scan completion. In *Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing*, 2005.
- [Ree83] W. T. Reeves. Particle systems : a technique for modeling a class of fuzzy objects. In *Proceedings of SIGGRAPH'83*, pages 359–376. Computer Graphics, 1983.
- [RR96a] Rémi Ronfard and Jarek Rossignac. Full-range approximation of triangulated polyhedra. In *Proceeding of Eurographics, Computer Graphics Forum*, volume 15, pages 67–76, August 1996.
- [SD02] O. Skinjar and J. Duncan. Stereo-guided volumetric deformation recovery. In *Int. Symp. Biomedical Imaging*, pages 863–866, 2002.
- [SDD<sup>+</sup>05] T.K. Sinha, B.M. Dawant, V. Duay, D.M. Cash, R.J. Weil, R.C. Thompson, K.D. Weaver, and M.I. Miga. A method to track cortical surface deformations using a laser range scanner. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(6) :767–781, June 2005.
- [SDV<sup>+</sup>10] J. Saadé, A.-L. Didier, P.-F. Villard, R. Buttin, J.-M. Moreau, M. Beuve, and B. Shariat. A preliminary study for a biomechanical model of the respiratory system. *Eng. Comp. Sc. for Med. Imaging in Oncology - ECSMIO 2010*, pages 509–515, May 2010.
- [SHL05] W. X. Wang S. H. Lo. Finite element mesh generation over intersecting curved surfaces by tracing of neighbours. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(4) :351–370, 2005.
- [SID<sup>+</sup>08] A. P. Santhanam, C. Imielinska, P. Davenport, P. Kupelian, and J. P. Rolland. Modeling real-time 3-d lung deformations for medical visualization. *IEEE transactions on information technology in biomedicine, EMBS*, 12(2) :257–70, March 2008.
- [SLF<sup>+</sup>05] H. Sun, K.E. Lunn, H. Farid, Z. Wu, D.W. Roberts, A. Hartov, and K.D. Paulsen. Stereopsis-guided brain shift compensation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(8) :1039–1052, August 2005.
- [SSS<sup>+</sup>06] H. Shirato, K. Suzuki, G.C. Sharp, K.R.T. Fujita, R. Onimaru, M. Fujino, N. Kato, Y. Osaka, et al. Speed and amplitude of lung tumor motion precisely detected in four-dimensional setup and in real-time tumor-tracking

- radiotherapy. *Int. Journal of Radiation Oncology, Biology and Physics*, 64(4), 2006.
- [ST92] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling with oriented particle systems. In *Proceedings of SIGGRAPH '92*, pages 185–194. Computer Graphics, July 1992.
- [SYL02] ZY. Shan, GH. Yue, and JZ. Liu. Automated histogram-based brain segmentation in t1-weighted three-dimensional magnetic resonance head images. *Neuroimage*, 17(3) :1587–1598, 2002.
- [Ton98] D. Tonnesen. *Dynamically coupled particle systems for geometric modeling, reconstruction, and animation*. PhD thesis, Univ. of Toronto (CAN), 1998.
- [Van98a] A. Van Gelder. Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes. *Journal of Graphics Tools*, 3(2) :21–42, 1998.
- [VBS<sup>+</sup>04a] P.-F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet, and F. Jaillet. Lung mesh generation to simulate breathing motion with a finite element method. In *IEEE IV 2004 - MediVis, London (GB)*, July 2004.
- [WFG<sup>+</sup>00] S. K. Warfield, M. Ferrant, X. Gallez, A. Nabavi, F. A. Jolesz, and R. Kikinis. Real-time biomechanical simulation of volumetric brain deformation for image guided neurosurgery. In *SC 2000 : High Performance Networking and Computing Conference, Dallas, USA*, pages 1–16, 2000.
- [WKL<sup>+</sup>01] J. Weese, M. R. Kaus, C. Lorenz, S. Lobregt, R. Truyen, and V. Pekar. Shape constrained deformable models for 3D medical image segmentation. *Image Processing in Med. Imag. (IPMI), Lecture Notes Computer Science*, 2082 :380–387, 2001.
- [Yan05a] X. Yang. Surface interpolation of meshes by geometric subdivision. *Computer-Aided Design*, 37 :497–508, 2005.
- [Zar03] Florence Zara. *Algorithmes parallèles de simulation physique pour la synthèse d'images : application à l'animation de textiles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2003.





# Annexe A

## Curriculum Vitæ

### État civil :

**Nom** : JAILLET

**Prénom** : Fabrice

**Adresse** : Bât. Nautibus, 8 bd. Niels Bohr  
Université lyon 1  
F-69622 Villeurbanne Cedex

**Courriel** : [fabrice.jaillet@liris.cnrs.fr](mailto:fabrice.jaillet@liris.cnrs.fr)

### Titres, Parcours :

**1994** : Diplôme d'ingénieur de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA Lyon), spécialité Informatique

**1995** : Diplôme d'Études Approfondies (DEA), spécialité Ingénierie Informatique

**1999** : Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon (UCB Lyon 1), spécialité Informatique

**1999** : Maître de Conférences, IUT - Lyon 1, département Informatique de Bourg-en-Bresse

**2002** : Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (PEDR)

**2003** : Délégation au North West Medical Physics, Christie Hospital NHS Trust, Manchester (GB)

**2004** : Congé pour Recherches (CRCT) au Centro de Modelamiento Matemático, UMI CNRS 2807, Universidad de Chile, Santiago (CL)

**2005** : Délégation CNRS au Centro de Modelamiento Matemático, UMI CNRS 2807, Universidad de Chile, Santiago (CL)

**2006** : Disponibilité pour convenance personnelle, mi-temps de recherche au Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Concepción (Chili)

**2007** : Retour à l'IUT - Lyon 1, département Informatique de Bourg-en-Bresse et au LIRIS

**2008** : Chef du département Informatique de Bourg-en-Bresse, IUT A - Lyon 1

**2011** : HDR ???

## Thèmes de recherche développés :

- Informatique graphique ;
- Reconstruction géométrique 3D ;
- Modélisation d'objets déformables : surfaces et volumes ;
- Intégration de la rhéologie en modélisation graphique ;
- Simulation de phénomènes physiques et biomécaniques ;
- Applications médicales : reproduction des mouvements et contacts entre organes.

## Participation, responsabilités dans des projets de recherche :

**Projet européen Biomed II, Arrow 1998-2001 :** *Amélioration du plan de traitement en radiothérapie conformationnelle*, 5 laboratoires européens, 1 industriel et 2 centres hospitaliers. Responsable scientifique pour le LIGIM.

**BQR 2000, université Lyon I :** *Aide au positionnement du patient dans la radiothérapie conformationnelle du cancer*, Responsable scientifique pour le LIGIM.

**Projet Région Adémo, 2000-2003 :** *Acquisition et DÉcision guidée par le MOdèle*, 3 laboratoires, 2 industriels et 2 centres hospitaliers partenaires. Coordonnateur de la partie « Modélisation et déformation des organes ».

**Projet MARC, depuis 2001 :** *Amélioration de la radiothérapie conformationnelle du cancer pulmonaire*, 3 laboratoires, 1 industriel, 3 centres hospitaliers et une association partenaires.

**Projet en Hadronthérapie, depuis 2001 :** Projet ETOILE multidisciplinaire sur le développement d'un centre d'Hadronthérapie (<http://etoile.univ-lyon1.fr>), porté par Lyon 1. Activités dans le cadre du Réseau Européen ENLIGHT (European Organisation for Research Treatment of Cancer), correspondant du groupe « Moving targets ».

**ACI IMPbio MOCEME, 2004 :** *Modélisation Cellulaire Multi-Echelles*, 4 laboratoires

**Projet européen  $\alpha$ fa 2005-2008 :** échange de doctorant et postdoctorants, 8 universités en Europe et Amérique du Sud ;

**Projet ECOS-Chili 2006-2008 :** *Neurochirurgie assistée par ordinateur*, coopération franco-chilienne, échange de chercheurs et étudiants ;

**Projet STIC-AmSud PLOMO 2007-2009 :** *Plateforme LOgicielle commune de construction de MOdèles physiques des tissus mous*, coopération avec l'Amérique du Sud (Brésil, Chili et Uruguay), échange de chercheurs et étudiants ;

**Projet ETOILE, Plan Régional de Recherche en Hadronthérapie :** *groupe pluridisciplinaire rassemblant une centaine de chercheurs autour de l'hadronthérapie associée au Centre ETOILE, ;*

**Programme ENLIGHT 2000-05 :**  *fédère les travaux des différents projets européens de recherche sur les ions légers (Allemagne, Italie, Autriche, France, ... ) ;*

**Projet ENVISION-ULICE 2008- :**  *Prolongement d'ENLIGHT pour gérer les échanges scientifiques et médicaux entre les différentes infrastructures cliniques européennes*

## Collaborations locales ou internationales

- NWMP, Christie Hospital NHS Trust (Manchester, GB), université John Moores (Liverpool, GB), Universidad de Chile (Santiago, CL), Universidad de Concepción (Concepción, CL), Universidad de la República (Montevideo, UY)
- Elekta (GB/F), PRAXIM (Grenoble)
- CHU (Grenoble), CHU (Lyon Sud), Centre Léon Bérard (Lyon), EFR - hôpital Louis Pradel (Lyon)
- Laboratoires TIMC (Grenoble I), IPNL (Lyon 1)

## Encadrement

### Thèses :

- L. Chevalier** 50% (A. Baskurt) 2000-2004, « *Modélisation et indexation d'objets 3D à l'aide de superellipsoïdes* »
- V. Baudet** 50% (B. Shariat) 2001-2005, « *Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables* »
- F. Galdames** 75% (Y. Payan, Grenoble/ C.Perez, Santiago) début mars 2007, « *Segmentación de imágenes cerebrales de resonancia magnética nuclear para construcción de modelo anatómico destinado a modelamiento mecánico* »
- L. Causa** 50% (B. Shariat/C. Held, Santiago) début mars 2008, « *Procesamiento de señales respiratorias aplicadas a un modelo biomecánico y a registros polisomnográficos* »
- X. Faure** 33% (JM. Moreau/F. Zara) début octobre 2010, « *Vers un modèle humain temps réel* »

**DEA** : encadrement de **M. Ghamri Doudane** (1999), **L. Chevalier** (2000), **V. Baudet** (2001) et **A. Guillaume** (2004, poursuite en thèse en cotutelle avec l'univ. de Liverpool)

**M2R** : encadrement de **X. Faure** (2010, avec J.-M. Moreau), **Z. Jiang** (2011, avec F. Zara), **E. Fléchon** (2011, avec F. Zara)

**Projets d'étudiants de 1er et 2ème cycle universitaires** : 3 par an en moyenne (1998-2004 ; 2007-2010)

## Rayonnement scientifique

- Relecteur pour la revue **Medical Image Analysis** (IP 3,505) en 2007, et la conférence **WSCG (CZ)**, depuis 2003 (taux d'acceptation 30%).
- Relecteur de plusieurs articles pour le livre « *Biomechanics applied to computer-aided diagnosis and surgery* », Research Signpost Publisher, 2006.
- Membre suppléant au collège B de la CSES de l'université LYON I, en 27ème section de 2002-2004

- Comité d’organisation du 2nd Workshop on « Computer Assisted Diagnosis and Surgery », Santiago (mars 2006) <http://image2006.cmm.uchile.cl/>
- Co-organisateur de l’école d’été Alfa « Modélisation Mathématique et Image », Santiago, (mars 2006)
- Expert scientifique pour la Commission Nationale de la Recherche Scientifique et Technologique du Chili depuis 2006 <http://www.conicyt.cl/>
- Examineur de la thèse de C. Lobos, Univ. Grenoble 1 et U. de Santiago (mars 2009)

## Publications

Publications	Nb	Titre des revues ou conf.
Revue intern.	6	Computers&Graphics, J. for Geometry and Graphics, IMA JNA. . .
Revue nationale	3	RCFAO, RIIN
Conf. intern.	18	WSCG, ICGG, IEEE ICIP, ICECGDG, MediVis-IV
Conf. sans sélection	12	AFIG, CORESA, COOPANIM

## Enseignement au département Informatique, IUT Lyon1, site de Bourg-en-Bresse

- Responsabilité de la première année, 78 étudiants par promotion, de 1999 à 2001
- Direction des études, 6 groupes de 26 étudiants, 40 enseignants, de 2002 à 2004
- Chef de département, depuis septembre 2008
- Organisation des projets tuteurés, 24 groupes d’étudiants, 6 encadrants, de 1999 à 2003
- Responsabilité des modules Algorithmique, Programmation et Systèmes d’exploitation, de 2000 à 2004
- Suivis de stages d’étudiants en entreprise, 7 par an en moyenne, de 1999 à 2004 et 2007-2009

Depuis le 01/09/2008, **chef du département** Informatique de l’IUT-Lyon1 à Bourg-en-Bresse.

# Annexe B

## Liste des publications

### Revues internationales

- [1] F. Galdames, C. A. Pérez, P. A. Estévez, C. M. Held, **F. Jaillet**, G. Lobo, G. Donoso, and C. Coll. Registration of Renal SPECT and 2.5D US IMAGES . *Computerized Medical Imaging and Graphics*, February 2011.
- [2] R. Araya, G.R. Barrenechea, **F. Jaillet**, and R. Rodríguez. Finite element analysis of a static fluid-solid interaction problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, June 2010. DOI : 10.1093/imanum/drp042.
- [3] M. Amrani, M. Beuve, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Tracking of target motion using physically based modelling of organs. *Radiotherapy Oncology*, 73(Sup2) :S73–S76, 2004.
- [4] V. Baudet, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Fitting a 3d particle system model to a non-dense data set in medical applications. *Journal for Geometry and Graphics*, 7(1) :65–74, 2003.
- [5] M. Amrani, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Deformable objects modeling and animation : application to organ’s interactions simulation. *Journal for Geometry and Graphics*, 4(2) :181–188, 2000.
- [6] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Deformable object reconstruction with particle systems. *Computers & Graphics*, 22(2-3) :189–194, March 1998.

### Revues nationales

- [7] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. Segmentation et modélisation 3D par un ensemble de superellipsoïdes. *Revue internationale d’ingénierie numérique*, 1(3) :35–60, 2005.
- [8] M. Amrani, **F. Jaillet**, M. Melkemi, and B. Shariat. Simulation of deformable organs with a hybrid approach. *RCFAO*, 16(2) :213–242, September 2001.
- [9] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Smooth reconstruction of branching objects with b-splines. *RCFAO*, 16(2) :183–201, September 2001.

## Conférences internationales

- [10] V. Baudet, M. Beuve, **F. Jaillet**, B. Shariat, and F. Zara. Integrating Tensile Parameters in Hexahedral Mass-Spring System for Simulation. In *International Conference on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision'2009 - WSCG'2009*, February 2009. Liris-3673.
- [11] P.-F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet, and **F. Jaillet**. Simulation of lung behaviour with finite elements : Influence of bio-mechanical parameters. In *IEEE IV 2005 - MediVis, London (GB)*, July 2005.
- [12] P.-F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet, and **F. Jaillet**. Resolution of non-linear problems in realistic-lug-inflating simulation with finite element method. In *10th HCPBM, Oropa (I)*, June 2005.
- [13] P.-F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet, and **F. Jaillet**. Lung mesh generation to simulate breathing motion with a finite element method. In *IEEE IV 2004 - MediVis, London (GB)*, July 2004.
- [14] P.-F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet, and **F. Jaillet**. Lung motion modelling to simulate dosimetry during cancer treatment. In *9th HCPBM, Lyon (F)*, October 2003.
- [15] M. Amrani, M. Beuve, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Physically based modeling with particle systems. In *CE 2003, Lyon (F)*, July 2003.
- [16] V. Baudet, P.F. Villard, M. Beuve, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Towards accurate tumours tracking in lungs. In *IEEE IV 2003 - MediVis, London (GB)*, pages 338–343, July 2003.
- [17] V. Baudet, **F. Jaillet**, B. Shariat, P.F. Villard, M. Beuve, and et al. Approach to simulate tumour displacements in lungs with mass spring system. In *9th HCPBM, Lyon (F)*, October 2003.
- [18] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. Segmentation and superquadric modeling of 3D objects. In *11th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualization WSCG'03, Plzen, CZ*, volume 11(1), pages 232–240, February 2003.
- [19] V. Baudet, **F. Jaillet**, and B. Shariat. Fitting a 3D particle system model to a non dense dataset, in medical applications. In *10th ICGG, Kiev (UKR)*, July 2002.
- [20] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. 3D shape coding with superquadrics. In *IEEE ICIP2001, Thessaloniki (G)*, pages 93–96, October 2001.
- [21] **F. Jaillet**, Y. Ghamri Doudane, M. Melkemi, and A. Baskurt. Adaptive contour sampling and coding using skeleton and curvature. In *IEEE ICIP2000, Vancouver (CAN)*, volume 2, pages 899–902, September 2000.
- [22] M. Amrani, **F. Jaillet**, S. Pontier, B. Shariat, and D. Vandorpe. Deformable objects modelling and animation : application to organ's interactions simulation. In *9th ICGG 2000, Johannesburg (SA)*, pages 164–168, July 2000.

- [23] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Volume object modeling and animation with particle-based system. In *Proceedings of the 8th ICECGDG*, pages 215–219, Austin (TX), August 1998.
- [24] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Deformable volume object modeling with a particle-based system for medical applications. In *5th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualization WSCG'97, Plzen, CZ*, pages 192–201, February 1997. IFIP working group 5.10 on Computer Graphics and Virtual Worlds. Selected to be published in *Computers & Graphics* 22(2) Special Issue on WSCG'97.
- [25] D. R. Burton, M. J. Lalor, F. Lilley, **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Optical surface profilometry & 3D surface modelling as an aid to patient positioning in radiotherapy. In *Optoelectronic Distance/ Displacement Measurements & Applications, Topical Meetings Digests Series, Nantes, F.* European Optical Society, July 1997.
- [26] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. Periodic B-spline surface skinning of anatomic shapes. In *Ninth Canadian Conf. on Computational Geometry CCCG'97, Kingston, CAN*, pages 199–210, August 1997.
- [27] **F. Jaillet**, B. Shariat, and D. Vandorpe. 3D surface modeling from planar sections. In *Optical 3D Measurement Techniques IV, Zürich, CH*, pages 430–435, October 1997.

## Conférences nationales

- [28] X. Faure, **F. Jaillet**, F. Zara, and J.-M. Moreau. Acquisition multi-modale en temps réel pour le suivi du mouvement respiratoire. In *ORASIS 2011*, June 2011.
- [29] F. Chassat, M. Bucki, Y. Payan, and **F. Jaillet**. Neuronavegación con un modelo de corrección a tiempo real con ecografía intraoperatoria. *NeuroTarget - Revista de Neurocirugía Funcional, Estereotaxia, Radiocirugía y Dolor*, 2(1), June 2007. Liris-4674.
- [30] F. Galdames, C.A. Pérez, P.A. Estévez, CM. Held, **F. Jaillet**, G. Lobo, Gilda Donoso, and Claudia Coll. Registration of Renal SPECT and 2.5D US Images. In *SURGETICA*, pages 169–175, September 2007.
- [31] R. Araya, G.R. Barrenechea, F. Galdames, **F. Jaillet**, and R. Rodríguez. Adaptive Mesh and Finite Element Analysis of Coupled Fluid/Structure : Application to Brain Deformations. In *SURGETICA*, pages 117–121, September 2007.
- [32] V. Baudet, M. Beuve, **F. Jaillet**, B. Shariat, and F. Zara. Integrating Tensile Parameters in 3D Mass-Spring System, September 2007. SURGETICA.
- [33] **F. Jaillet**. Modelling and simulating organs deformations : integration of physiological parameters. In *Franco-Chilean Workshop on Image Guided Surgery and diagnosis, Santiago (Chile)*, November 2003.



- [34] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. Codage de formes 3D par des superquadriques. In *CORESAS2001, Dijon (F)*, November 2001.
- [35] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. Description et reconstruction rapide de surfaces. In *COOPANIM2001, Villeurbanne (F)*, pages 63–68, June 2001.
- [36] L. Chevalier, **F. Jaillet**, and A. Baskurt. Description et reconstruction rapide de surfaces. In *CORESAS2000, Poitiers (F)*, pages 87–93, October 2000.
- [37] **F. Jaillet** and B. Shariat. Modélisation d’objets déformables à l’aide de particules. In *5ème Journées AFIG*, pages 217–226, Rennes, December 1997.

### Conférences Invitées

- [38] **F. Jaillet**. Discrete Modelling, integration of rheology. 2nd Workshop on Computer Assisted Diagnosis and Surgery, March 2006. <http://image2006.cmm.uchile.cl/>.
- [39] **F. Jaillet**. Mathematical Formulation for Discrete Modeling and Simulating Soft Tissue Deformations, March 2006. ICAM 2006, <http://icam2006.cmm.uchile.cl/>.

### Rapports de Recherche

- [40] F. Galdames and **F. Jaillet**. From Triangulation to Simplex Mesh : a Simple and Efficient Transformation. Technical Report RR-LIRIS-2010-021, November 2010.

### Mémoires

- [41] **F. Jaillet**. *Contribution à la reconstruction et à l’animation d’objets déformables définis à partir de données structurées en sections*. PhD thesis, Univ. Claude Bernard LYON I, February 1999.
- [42] **F. Jaillet**. Reconstruction automatique de surface à partir d’une image 3D. Master’s thesis, INSA/UCB Lyon I, June 1995.



## Résumé

Ce mémoire présente mon activité de recherche en Informatique Graphique, plus précisément dans le domaine de la reconstruction 3D à partir de différentes sources, principalement d'imagerie médicale, mais pas uniquement. La modélisation des objets mous (ou déformables) que l'on propose est généralement basée sur des modèles discrets, et, depuis quelques temps, continus. L'intégration d'informations multi-sources dans ces maillages triangulaires ou tétraédriques permet de simuler leurs déformations, tout en respectant leur comportement naturel. Le but recherché est de fournir des outils informatiques qui permettent de guider le personnel médical dans son diagnostic ou pendant une opération de traitement. Après l'opération, les modèles de simulation permettent une validation du traitement. L'originalité : l'intégration de la rhéologie dans les modèles discrets, pour offrir une alternative de simulation des déformations utilisable pendant l'opération, a contrario des méthodes classiques des éléments finis, précises mais plus gourmandes, surtout quand des conditions de non-linéarité sont requises.

Par modèles physiques des tissus mous du vivant, on sous-entend aussi bien les tissus biologiques déformables élastiques (par exemple la peau, le foie, le cerveau, le poumon), les composantes fluides déformables (air), voire le couplage de ces structures (ventricules cérébrales, arbres bronchiques). Deux communautés scientifiques ont historiquement travaillé sur l'utilisation et/ou la mise au point de modèles physiques des tissus mous biologiques : la communauté d'informatique graphique et celle de l'informatique médicale. Pour chaque communauté, les compétences nécessaires au développement de modèles physiques relèvent des domaines (1) de la segmentation d'images médicales, (2) de la reconstruction géométrique et du maillage volumique, (3) de la modélisation biomécanique, (4) de la mesure in vivo des caractéristiques des tissus et (5) de l'analyse numérique. Chacun de ces points se retrouve dans les recherches présentées ici, qui sont principalement tournées vers l'apport d'une approche orientée *modèle géométrique* en complément d'une autre discipline.

## Summary

This report presents my research activity in Computer Graphic, more exactly in the field of the 3D reconstruction from various sources, mainly from medical imaging, but not only. The modelling of the soft (or deformable) objects we propose is generally based on discrete models and, for some time, continuous. The integration of multi-sources information in these triangular or tetrahedral meshes allows to simulating their deformations while respecting their natural behaviour. The main purpose is to supply computing tools which allow to guide the medical staff in its diagnosis or during a treatment operation. After this latter, the simulation models may allow a treatment validation. The originality : the integration of the rheology in the discrete models, to offer an alternative of useful simulation of the deformations during the operation, a contrario to greedier but precise, classic finite elements methods, especially when non-linearity conditions are required.

By physical models of living soft tissues, we imply as well deformable biological elastic tissues (i.e. skin, liver, brain, pulmon), deformable fluid constituents (air), even coupling of these structures (cerebral ventricles, bronchial trees). Two scientific communities historically worked on the use and/or development of physical models of biological tissues : Computer Graphics and Medical Computing. For each, necessary skills for physical models development arise domains of (1) medical images segmentation, (2) geometrical reconstruction and volume meshing, (3) biomechanical modelling, (4) in vivo measure of tissues characteristics, (5) numerical analysis. Each of these points meets itself in the researches presented here, which are mainly turned to the contribution of a *geometrical model* oriented approach to complement another discipline.