

# **Hasard, espace, temps : introduction à une approche relationnelle de la probabilité.**

Bernard GUY

Ecole des Mines de Saint-Etienne, Institut Mines Télécom  
UMR CNRS n°5600 EVS (Environnement, Ville, Société)  
LASCO (\*) Idea Lab de l'Institut Mines-Télécom  
(\*) Laboratoire Sens et COmpréhension du monde contemporain

[bernard.guy@mines-stetienne.fr](mailto:bernard.guy@mines-stetienne.fr)

Première version : février 2017

## Résumé

Notre propos se focalise sur l'aspect « mesure » des probabilités qui renvoie toujours concrètement, pour un problème donné, à des *comparaisons de morceaux d'espace et/ou de temps occupés par les divers événements discutés*. Et nous savons par ailleurs (cf. nos travaux) que les mesures d'espace et de temps sont établies à travers la confrontation entre différents phénomènes physiques et supposent des choix arbitraires (laissés au libre arbitre) quant à la définition des étalons. Nous proposons ainsi une approche relationnelle de la notion de probabilité, le caractère relationnel des uns (espace, temps) retentissant nécessairement sur les autres (hasard, probabilités). Le modèle probabiliste attaché à telle série d'événements, que nous qualifions d' « apparents », se construit en opposition à, ou en composition avec, un autre modèle probabiliste, concernant un ensemble d'événements « cachés » ; ceux-ci servent de jauge et leur loi est uniforme (les probabilités de leurs différents événements sont égales). Les deux points de vue peuvent être échangés, en s'appuyant, pour définir la jauge, sur les événements initiaux du modèle de probabilité non uniforme : on leur accorde alors une loi uniforme, et, par comparaison, on définit de nouvelles mesures pour le modèle caché initialement uniforme. Nous parlons de formulation duale du problème, par opposition à sa formulation primale initiale. Suivant les circonstances, suivant l'histoire, on peut être amené à changer d'étalon. On voit ainsi un caractère inéluctable de récursivité dans la démarche : c'est sur cet aspect relationnel, révisable, de discussion et de choix des étalons au sein même des probabilités que nous nous focalisons. Cela nous permet de contribuer au débat entre fréquentistes et bayésiens (il n'y a pas de probabilité intangible sans nécessité d'aucun choix) et de formuler quelques considérations générales sur le hasard, indéfinissable de façon substantielle : on ne peut qu'opposer des situations plus hasardeuses, ouvrant de façon égale à un ensemble d'éventualités (auxquelles on attache de façon révisable un caractère d'étalon dans une loi uniforme), à des situations moins hasardeuses où telle ou telle éventualité a davantage de poids (ou à la limite, reste seule). A ce stade de notre travail, nous ne donnons pas d'axiomatique rigoureuse ni complète de nos propositions ; nous présentons des pistes, illustrées par de petits exemples, en vue de travaux ultérieurs. Une des applications potentielles de ce travail se rapporte à un problème de physique fondamentale, à savoir la conciliation conceptuelle de la relativité générale et de la mécanique quantique, où interviennent des fonctions à caractère probabiliste. Les sauts qui y sont observés sont compris comme des intervalles de valeurs des grandeurs de faible probabilité, c'est-à-dire de faible occupation de l'espace et du temps.

**Mots clés:** probabilité ; événement ; événements apparents / cachés ; dualité ; pensée de la relation ; fonction de répartition ; densité de probabilité ; formulation primale / duale ; échange de variables ; variable aléatoire ; mécanique quantique ; quantification de l'espace ; quantification du temps ; incertitude

## Introduction : position du problème, notations

Dans divers travaux récents (e.g. Guy, 2011, 2016), nous nous sommes efforcé de définir concepts et grandeurs physiques (espace, temps, champs, etc.) à l'aide d'une pensée de la relation : nul sens à une grandeur envisagée seule ; on ne connaît que des rapports entre grandeurs ; on ne connaît que des liens entre variations de grandeurs, rapportées à des variations d'espace et de temps<sup>1</sup>. Dans le contexte du présent article, nous dirons encore : on ne définit des événements et leurs probabilités que par opposition à, ou en composition avec, d'autres événements et leurs probabilités.

Nous cherchons ici à proposer une approche relationnelle de la notion de probabilité. En attribuant des probabilités à un ensemble d'événements élémentaires (ou issues, ou épreuves, obtenues à partir d'expériences ou de processus, qualifiés d'aléatoires ou de stochastiques), on envisage *a priori* ces événements en eux-mêmes, c'est-à-dire sans avoir besoin de définir d'autres événements et leurs éventuelles probabilités. Nous voulons montrer au contraire que, pour définir telle série d'événements élémentaires « apparents » (et leurs probabilités), nous avons besoin d'un autre ensemble d'événements que nous appellerons « cachés » ; la loi du second modèle caché est *uniforme* (les probabilités de ses différents événements élémentaires sont égales<sup>2</sup>) et le premier modèle probabiliste se construit en composition avec lui. Une motivation pour faire apparaître les événements cachés est fournie par la nécessité qui se présente parfois de changer de point de vue sur les premiers événements qui nous intéressent et les remplacer par d'autres. En physique où l'on se rapporte à l'espace et au temps (en réalité déjà construits par comparaisons de phénomènes), il y a des situations où l'on souhaite définir ces paramètres d'autres façons, en relation avec d'autres phénomènes et d'autres variables (voir les exemples discutés dans la partie 2). Ce changement de point de vue doit également s'appliquer aux événements et grandeurs probabilistes dans la mesure où, et nous insisterons sur ce point, l'appréhension du temps et de l'espace est cachée derrière celle de la probabilité : *évaluer une probabilité se ramène toujours dans la pratique à comparer des morceaux d'espace et/ ou de temps « occupés » par les événements*. Le caractère relationnel des uns (espace, temps) retentit nécessairement sur les autres (hasard, probabilités). Nous

---

<sup>1</sup> Ou de façon plus compacte : on égale des dérivées partielles de deux grandeurs, par rapport au temps et par rapport à l'espace respectivement. On dira que ces grandeurs sont en dualité.

<sup>2</sup> Comme on le verra, cette uniformité n'est pas « imposée », mais relève d'un premier choix à discuter ; dans une pensée de la relation, il faut bien partir d'un certain point de vue, quitte à en changer par la suite.

chercherons à définir les fonctions probabilistes (fonction de répartition, densité) dans la nouvelle situation par rapport à celles définies dans la première.

La première question est donc de faire apparaître cet autre modèle, c'est-à-dire les événements élémentaires cachés et leurs probabilités ; ces dernières servent de jauge, et les probabilités initiales sont mesurées par comparaison avec les probabilités uniformes cachées. Ce qui compte in fine n'est pas la probabilité d'un événement, mais, d'une certaine façon, le rapport de cette probabilité avec celle de l'étalon (caché ou implicite) qui sert à la mesurer ; la théorie des probabilités est intimement liée à la théorie de la *mesure* ; il nous faut des étalons de mesure, nous verrons quel sens leur donner<sup>3</sup>. Parler de mesure, c'est sous-entendre que l'on a un étalon transportable d'un « endroit » à un autre, d'un événement à un autre et qui reste constant. Nous postulons donc implicitement la constance de cet étalon (c'est une sorte de tautologie pour un étalon), ou encore l'uniformité ou égale probabilité des éléments de scène où mesurer les événements.

Fixons tout de suite quelques notations. Nous raisonnons *a priori* sur les événements élémentaires  $\omega_i$  de l'univers ou ensemble fondamental  $\Omega$  de la théorie des probabilités ; nous pourrions noter  $\bar{\Omega}$  l'univers caché et  $\bar{\omega}_j$  ses événements; les conséquences portant sur les ensembles d'événements décrits par des  $\sigma$ -algèbres sur  $\Omega$  et sur  $\bar{\Omega}$  s'en suivront automatiquement (voir la suite du texte)<sup>4</sup>.

Une fois que l'on a exhibé les événements cachés, la seconde question, qui peut paraître plus ou moins naturelle dans le contexte que nous avons rappelé à l'instant, est celle de pouvoir échanger<sup>5</sup> les deux points de vue, c'est-à-dire de nous appuyer, pour définir la jauge, sur les événements initiaux du modèle de probabilité non uniforme : on leur accorde alors une loi uniforme, et, par comparaison, on définit de nouvelles mesures pour le modèle caché initialement uniforme. L'échange se présente naturel dans la mesure où, comme nous l'avons

---

<sup>3</sup> On pourrait se poser la question d'accorder une loi quelconque (non forcément uniforme) aux événements cachés, sous la contrainte de se ramener à des rapports donnés entre les différentes probabilités des deux classes d'événements apparents et cachés (c'est ce qui compte in fine dans une approche relationnelle). Nous ne discuterons pas cette proposition plus délicate encore à formuler proprement (qui par certains aspects ressemble à l'exigence de covariance de la relativité générale en métrique non euclidienne). Le point de vue général discuté en fin de texte ira dans ce sens (section 11.2).

<sup>4</sup> A la place des symboles majuscules  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$ , nous pourrions utiliser également les symboles minuscules  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  lorsqu'il n'y aura pas de problème d'interprétation.

<sup>5</sup> Le concept d'échange discuté ici n'a pas de lien direct avec celui d'*exchangeability* rencontré en théorie des probabilités : ce dernier exprime la propriété, soumise à conditions, selon laquelle, dans une suite de variables aléatoires, on peut échanger tel sous-ensemble de variables avec tel autre (voir Bernardo, 1996).

dit, temps et espace, qui sous-tendent les mesures de probabilités, n'existent pas en soi mais sont construits par la confrontation entre phénomènes (par exemple ceux faisant intervenir la gravitation, l'électromagnétisme, dans le vide ou la matière, etc.). Plusieurs constructions, plusieurs choix d'étalons, sont possibles suivant les phénomènes qui nous intéressent ou qui importent le plus. Dans un article récent (Guy, 2016), nous avons discuté de façon extensive cette possibilité d'échange entre points de vue dans un cadre déterministe, et nous nous proposons de l'examiner maintenant dans un cadre probabiliste.

### *Eléments de vocabulaire*

Nous appellerons *approche primale* celle qui consiste à examiner les événements initiaux « apparents » et leurs probabilités, les opposant aux événements « cachés » de loi uniforme. Nous appellerons *approche duale* celle qui consiste à échanger les rôles, et à faire jouer aux événements initiaux le rôle caché de loi uniforme.

*Approche primale* : les probabilités des événements élémentaires initiaux seront notées  $p_i = P(\omega_i)$ , et celles des événements cachés  $q_j = P(\bar{\omega}_j)$ . Dire que la loi des  $\bar{\omega}_j$  est uniforme, c'est dire que l'on a  $q_j = \text{cste} = 1/\text{Card}(\bar{\omega}_j)$ , où Card est le cardinal, ou nombre d'éléments, de l'ensemble des  $\bar{\omega}_j$  (cette relation pourra revêtir d'autres formes suivant la définition des événements et leurs probabilités, par exemple dans le cas continu ; nous n'en discuterons pas).

*Approche duale* : nous gardons la même notation des événements  $\omega_i$  et  $\bar{\omega}_j$ , mais nous échangeons leurs rôles. Nous distinguons les nouvelles probabilités en leur mettant un « ' » : soient  $p'_i$  et  $q'_j$  (de même que pour les autres fonctions probabilistes), les  $p'_i$  étant de loi uniforme dans la formulation duale.

Nous pouvons exprimer les choses de façon condensée en opposant une formulation primale  $\{(\omega, p), (\bar{\omega}, q)_U\}$  à une formulation duale  $\{(\bar{\omega}, q'), (\omega, p')_U\}$ <sup>6</sup> ; où  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  désignent l'ensemble des événements élémentaires  $\omega_i$  et  $\bar{\omega}_j$  respectivement,  $p$  ou  $p'$ ,  $q$  ou  $q'$ , leurs probabilités, et l'indice  $U$  la loi uniforme. Dans le cas de variables aléatoires  $E$  et  $F$ , la question est de déterminer la loi  $F'_F(f)$  des événements de valeurs  $f$  dans la formulation duale (la loi était uniforme dans la formulation primale), si l'on connaît la loi  $F_E(e)$  des événements initiaux de valeurs  $e$  dans la formulation primale.  $F$  représente la fonction de répartition ; dans le cas de

---

<sup>6</sup> Convenons dans de tels couples de paires de mettre en seconde position celle définissant la « base » de loi uniforme.

variables aléatoires continues, on pourra s'intéresser aux densités. La structure de notre problème est résumée dans le tableau 1.

### *Du côté de la mécanique quantique*

Une des applications potentielles de ce travail se rapporte à un problème de physique fondamentale, à savoir la conciliation conceptuelle de la relativité générale et de la mécanique quantique. Dans notre travail de 2013 (révisé en 2016) nous avons montré qu'une compréhension relationnelle de l'espace et du temps, construits en opposition l'un à l'autre à partir des phénomènes physiques, pouvait ouvrir des perspectives intéressantes sur le sujet. Dans la mesure où des fonctions à caractère probabiliste, telle la fonction d'onde, interviennent en mécanique quantique, on devine l'intérêt d'affiner les aspects relationnels présents en théorie des probabilités. Cela passe par la description en termes probabilistes des phénomènes physiques faisant apparaître des *quantifications*, au sens de discontinuités ou sauts dans les grandeurs étudiées : nous comprenons quant à nous *les sauts comme correspondant à des intervalles de valeurs des grandeurs de très faible probabilité*. Cette situation peut se poser lorsque de tels phénomènes sont décrits par des équations aux dérivées partielles par rapport aux variables d'espace et de temps<sup>7</sup>. Les probabilités des valeurs des grandeurs sont exprimées en proportion de la « place » occupée dans l'ensemble du champ spatio-temporel envisagé, ce champ ayant *a priori* une qualité d'uniformité, c'est-à-dire avec des différents morceaux d'égal poids. Par échange avec les grandeurs physiques, nous pourrions *quantifier* les variables d'espace et de temps, faisant apparaître des sauts dans leurs valeurs ; les intervalles de valeurs des grandeurs physiques initiales servent alors d'étalons pour mesurer les portions d'espace ou de temps mis en correspondance.

### *Annonce du plan*

Dans une première partie, nous proposerons des éléments pour une approche relationnelle de la notion de probabilité. Dans une deuxième partie nous montrerons comment, dans cet esprit, analyser un exemple inspiré de la réalité physique. Nous terminerons par quelques éléments de discussion plus généraux sur la compréhension du concept de hasard et les différentes approches que l'on peut rencontrer en théorie des probabilités. A ce stade de notre travail, nous ne donnons pas d'axiomatique rigoureuse ni complète de nos propositions ; nous présentons des pistes, illustrées par de petits exemples, en vue de travaux ultérieurs.

---

<sup>7</sup> En ce sens, la compréhension de la quantification présentée à l'instant déborde la mécanique quantique (qui est originale par d'autres caractères, voir Guy, 2016).

### *Originalité de la démarche ?*

Notre connaissance du grand domaine des probabilités étant limitée<sup>8</sup>, il nous est difficile d'annoncer l'originalité (et l'intérêt) des propositions faites ici. Pour un même problème physique à première vue, nous savons qu'il peut y avoir plusieurs modèles mathématiques probabilistes différents dans leur expression, et donnant des résultats différents quant à leurs prévisions. Cela tient à ce que la mise en œuvre concrète même du problème physique peut faire l'objet de choix variés : le paradoxe de Bertrand (1889) nous le montre de façon particulièrement saisissante. Sans exploiter ce degré de liberté du côté du problème physique, il peut aussi y avoir divers choix de formulations mathématiques ne permettant pas de poser exactement les mêmes questions.

Nous ne nous situerons pas dans ces problématiques, même si, sans doute, notre approche n'y est pas complètement étrangère. Notre propos se focalise sur l'aspect « mesure » des probabilités qui renvoie toujours concrètement, pour un problème donné, à des *comparaisons de morceaux d'espace et/ou de temps occupés par les divers événements discutés*. Et nous répétons (cf. nos travaux) que les mesures d'espace et de temps résultent de la confrontation entre différents phénomènes physiques<sup>9</sup> et supposent des choix arbitraires (laissés au libre arbitre) quant à la définition des étalons (une mesure revient en fin de compte à se mettre d'accord sur une relation à un étalon). Suivant les circonstances, suivant l'histoire, on peut être amené à changer d'étalon. On voit ainsi un caractère inéluctable de récursivité dans la démarche : *c'est sur cet aspect relationnel, révisable, de discussion et de choix des étalons au sein même des probabilités que nous nous focaliserons*. Dans les exemples évoqués à l'instant (cf. le paradoxe de Bertrand), les différentes analyses portaient sur la façon de poser le problème physique et / ou mathématique, mais non directement sur les étalons mêmes qui supportent l'édifice.

---

<sup>8</sup> De même que celui de la mécanique quantique ; la présente réflexion a été menée en bonne partie à l'écart des personnes compétentes dont nous attendons la critique.

<sup>9</sup> On peut dire réciproquement que, nous intéressant ici à des phénomènes appréhendés, non de façon déterministe, mais probabiliste, les mesures d'espace et de temps vont être *définies* par des comparaisons de phénomènes de ce type ; voir la fin du texte.

## Première partie : approche relationnelle de la notion de probabilité

### 1. Différentes présentations des probabilités

Depuis quelques siècles, diverses façons de présenter les probabilités ont été proposées. Une approche ancienne est distinguée, par opposition à une approche moderne (e.g. Carraro, 2007). Dans la première, la probabilité  $p$  est définie par le rapport du nombre  $n$  d'événements « favorables » au nombre total d'événements « possibles »  $N$ , soit  $p = n / N$  (cf. Laplace, 1812). Par contraste dans la seconde, on définit un « modèle probabiliste », c'est-à-dire un triplet  $(\Omega, A, P)$  : - un univers  $\Omega$ , constitué d'un ensemble d'événements élémentaires ou épreuves  $\omega_i$ , - auquel on adjoint des événements plus généraux répondant à une structure adéquate appelée  $A$  ( $\sigma$ -algèbre ou tribu), - avec enfin une fonction probabilité  $P$  qui associe à tout élément de  $A$  (à tout événement quelconque) un réel compris entre 0 et 1<sup>10</sup>. La première étape est d'associer aux  $\omega_i$  eux-mêmes des probabilités  $P(\omega_i) = p_i \in [0, 1]$ . On a  $\sum p_i = 1$  (la sommation concerne les événements élémentaires). L'axiomatique de Kolmogorov permet ensuite d'attribuer à tous les événements une probabilité.

La question de l'inférence probabiliste<sup>11</sup> consistant à définir des probabilités pour les  $\omega_i$  partage la communauté scientifique. - D'un côté les fréquentistes assurent que les valeurs cherchées peuvent être estimées par des expériences répétées, et ainsi être mises à l'épreuve, ce qui leur assure un caractère objectif ; ce caractère est un autre nom de la falsifiabilité au sens de Popper, nous redit Matheron (1978). La loi des grands nombres nous assure la connexion logique entre une fréquence et une probabilité ; on parle également d'approche objective. - D'un autre côté, les bayésiens affirment que les probabilités des événements élémentaires ont une valeur subjective<sup>12</sup> et traduisent un degré de confiance que l'on a *a priori* sur telle ou telle hypothèse. Les probabilités peuvent changer suivant la suite des expériences

---

<sup>10</sup> L'obéissance des événements à une tribu exprime que les unions ou intersections dénombrables sont envisagées, comptées comme événements possibles et permettent des mesures (nous ne nous placerons pas ici dans le cas d'infinité d'événements non dénombrable). Les probabilités de tous les événements non élémentaires sont définies ensuite, et les règles sur les relations entre événements (dépendance / indépendance etc.) se traduisent par des règles sur leurs probabilités (addition, multiplication, soustractions, divisions...).

<sup>11</sup> Cette question dépasse le simple cadre discuté ici.

<sup>12</sup> Lartillot (2016) signale qu'il existe une compréhension objective de l'approche bayésienne. Sur cette dernière, voir aussi de Finetti (1937, 1974) et Nau (2001).



(elles sont conditionnées à d'autres probabilités, d'où l'utilisation d'une formule de Bayes, qui donne son nom à cette approche).

Dans l'approche ancienne, on ne donne *a priori* pas de probabilités pour les deux catégories d'événements (favorables / possibles) ; elles ne sont définies qu'en un deuxième temps, par un rapport entre des nombres d'événements. Dans l'approche moderne au contraire, chaque événement élémentaire a sa probabilité *a priori*. Il faut relier ces deux points de vue<sup>13</sup> : les différents événements de l'approche moderne englobent les événements (possibles / favorables) de l'approche ancienne. Les probabilités de l'approche ancienne expriment des proportions entre certains groupes d'événements de la collection des événements de l'approche moderne, obtenues par l'analyse combinatoire (voir section 4.2).

Si nous cherchons à formuler une théorie relationnelle de la probabilité, nous devons examiner quelles dualités faire apparaître dans les deux approches (ancienne / moderne)<sup>14</sup>. Dans la première, les deux séries d'événements (favorables et possibles), serviront directement notre propos. Dans la seconde, la dualité entre événement et probabilité, sera reprise dans notre sens.

## **2. La dualité événement – probabilité (définition moderne des probabilités )**

### *2.1. Approche primale. Les événements « cachés » et leurs probabilités.*

Examinons un exemple simple (Fig. 1a). Soit un ensemble de trois événements élémentaires  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), deux à deux incompatibles (le cas de dépendance pourra être étudié par la suite). Par exemple le temps qu'il fait sur une semaine, et les trois événements : « il fait beau » (événement  $\omega_1$ ), « il fait mauvais » ( $\omega_2$ ) ; « il fait couvert » ( $\omega_3$ ). Pour simplifier les calculs, envisageons une semaine de 10 jours (semaine révolutionnaire). Quelles probabilités associer aux événements ? Considérons que nous pouvons mettre en correspondance ces probabilités avec le nombre de jours de telle semaine tirée au hasard, où tel ou tel temps se manifeste ; soient par exemple cinq jours de beau, trois de mauvais et deux de couvert<sup>15</sup>.

---

<sup>13</sup> Pourquoi continuer à s'intéresser à l'approche ancienne ? - Elle est encore pratiquée. - Son analyse est utile à notre propos, comme on le verra plus bas.

<sup>14</sup> Une dualité est le minimum requis pour exprimer une *relation*.

<sup>15</sup> La durée sur laquelle on définit les probabilités importe peu ; on parle ici de dix jours pour fixer les idées, on pourrait observer les choses sur des durées plus longues. En normant une probabilité à l'unité, on ramène cette

Soient les probabilités  $p_1 = P(\omega_1) = 5/10 = 0.5$  ;  $p_2 = P(\omega_2) = 3/10 = 0.3$  et  $p_3 = P(\omega_3) = 2/10 = 0.2$ .

Cherchons à faire apparaître des événements cachés. Quels peuvent-ils être ? Pour répondre, nous devons nous demander quel sens donner aux événements « il fait beau », « il fait mauvais », « il fait couvert ». Peut-il y avoir un temps plus ou moins beau sans qu'il y ait d'abord de jours ? Peut-il y avoir un temps météorologique sans qu'il y ait d'abord un temps calendaire astronomique ? Lorsque nous réduisons un événement à « il fait beau », nous énonçons en réalité le résultat d'une abstraction. Nous avons abstrait le temps météorologique de la simple possibilité qu'il y ait du temps, qu'il y ait des jours, qu'ils soient beaux ou non, et que ces jours aient une certaine durée. Ce sont ces jours, ces dix jours, qui permettent de définir les probabilités par les proportions des événements qu'ils soutiennent, par les proportions de durées (comme nous l'avons dit, la probabilité de l'événement « il fait beau » est la proportion de jours où il fait beau, et ainsi de suite). Nous mettons donc en évidence des événements cachés, « substrat » des événements apparents. Ce sont des « morceaux de scène » vides (des amplitudes d'espace et/ou de temps), en attente d'être remplis, où vont se déployer les événements apparents. Ils sont formulés par des énoncés tels : « aujourd'hui la durée du jour est de 24 heures »<sup>16</sup>. Nous pouvons énumérer ainsi les différents jours de la série de dix jours. Dans notre exemple, nous définissons dix événements cachés  $\bar{\omega}_1$  à  $\bar{\omega}_{10}$  : « le jour 1, c'est lundi, il a telle durée », « le jour 2 c'est mardi, il a telle durée » etc. Les différents jours (numérotés de 1 à 10 par exemple) sont comme les faces d'un dé à 10 faces que l'on pourrait retirer autant de fois qu'on veut ; ils manifestent notre découpage de la scène spatiale (ou spatio-temporelle) en dix morceaux distincts dont nous pouvons discuter la taille.

Quelles probabilités en effet associer à ces événements cachés ? Nous avons vu que les probabilités des événements initiaux  $\omega_i$  renvoyaient à leur durée ; nous pourrions dire également que les probabilités des  $\bar{\omega}_j$  sont leurs durées, et que tous les  $\bar{\omega}_j$  ont *a priori* même durée, ou même taille  $q_j = P(\bar{\omega}_j) = 1/\text{Card}(\bar{\omega}_j)$  (loi uniforme) ; nous n'avons pas en effet de raison de privilégier tel ou tel jour *a priori*, tous sont sur le même plan, tous ont même

---

durée même à l'unité. On a ici un exemple où l'évaluation d'une probabilité se ramène à celle d'un temps (cf. nos propos introductifs).

<sup>16</sup> Il pourrait y avoir des raisons astronomiques pour que cette durée soit variable, comme elle l'est effectivement rapportée à l'étalon atomique, et comme elle l'a été, rapportée à elle-même, à une échelle significative, au cours des temps géologiques.

durée<sup>17</sup>. Dans la pensée relationnelle qui est la nôtre, on dira également : la durée des jours n'a pas de sens en soi, elle n'a son sens que par comparaison à autre chose ; nous commençons « par un bout », et c'est à ces jours que nous décidons d'accorder le rôle de jauge de longueur constante. En se ramenant à une période de dix jours, chacun des  $\bar{\omega}_j$  a une probabilité de 1/10. Nous aurions pu choisir un autre étalon, par exemple un dixième de la journée (subdivisée en dix heures !) ; on aurait alors 100 événements de probabilités égales 1/100. Nous pouvons aussi choisir la taille commune des  $\bar{\omega}_j$  comme le paramètre  $\alpha$  tel que l'on puisse reconstruire les probabilités  $p_i$  des  $\omega_i$  comme des nombres entiers fois  $\alpha$ . C'est à dire  $p_1 = n_1\alpha$ ,  $p_2 = n_2\alpha$ , et  $p_3 = n_3\alpha$ , où  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont des entiers. On a ici  $\alpha = 0.1$ . On définit des éléments de scène de taille 0.1, tels qu'il y en a cinq de  $\bar{\omega}_1$  à  $\bar{\omega}_5$  ( $n_1 = 5$ ), mesurant la probabilité de  $\omega_1$  ; trois  $\bar{\omega}_6$ ,  $\bar{\omega}_7$ ,  $\bar{\omega}_8$  pour  $\omega_2$  ( $n_2 = 3$ ), et deux pour  $\omega_3$ , soit  $\bar{\omega}_9$  et  $\bar{\omega}_{10}$  ( $n_3 = 2$ ). Soient  $P(\bar{\omega}_j) = \alpha = 0.1 = 1 / n_1 + n_2 + n_3 = \text{cte}$  quel que soit  $j$  (loi uniforme). L'important est la « constance » supposée de cet étalon de temps<sup>18</sup> que constitue la durée commune des  $\bar{\omega}_j$ .

Dans le cadre de la pensée relationnelle où nous nous situons, nous ne connaissons pas la durée « absolue » des périodes de beau ou de mauvais temps, pas plus que celle de la durée d'un jour calendaire ; cela n'a pas de sens, nous ne pouvons qu'établir des rapports entre différentes durées (par exemple, nous ne connaissons que le ratio 5 entre « jours » et « jours de beau »). Nous choisissons<sup>19</sup> certains événements comme référence et leur attribuons une loi uniforme : ce sont dans un premier temps, les jours astronomiques (et ensuite, comme on le verra, un autre point de vue sera adopté). Nous nous restreignons pour l'instant à deux séries d'événements : jour calendaire astronomique / jour météorologique, alors que, dans la réalité, on pourrait en envisager d'autres encore, comparant le jour astronomique à la seconde atomique par exemple (voir plus loin).

Sur la Figure 1a, nous avons proposé une répartition des événements  $\bar{\omega}_j$  en regard des événements  $\omega_i$ . Dans cette façon de faire, on peut définir momentanément, pour cette répartition particulière, deux indices : les  $\bar{\omega}_j$  correspondant à un  $\omega_i$  sont écrits  $\bar{\omega}_{ji}$  :  $\bar{\omega}_{j1}$  pour les jours où il fait beau (par exemple la liste lundi, mardi, mercredi..., soient  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$ ,  $\bar{\omega}_3$ ,  $\bar{\omega}_4$ ,  $\bar{\omega}_5$  ou plus précisément ici  $\bar{\omega}_{11}$ ,  $\bar{\omega}_{21}$ ,  $\bar{\omega}_{31}$ ,  $\bar{\omega}_{41}$ ,  $\bar{\omega}_{51}$ ),  $\bar{\omega}_{j2}$  pour ceux où il fait mauvais ( $\bar{\omega}_6$ ,  $\bar{\omega}_7$ ,  $\bar{\omega}_8$ , ou  $\bar{\omega}_{62}$ ,  $\bar{\omega}_{72}$ ,  $\bar{\omega}_{82}$ ),  $\bar{\omega}_{j3}$  enfin pour les jours où il fait couvert ( $\bar{\omega}_9$ ,  $\bar{\omega}_{10}$ , ou  $\bar{\omega}_{93}$ ,  $\bar{\omega}_{10.3}$ ). Des

<sup>17</sup> Mais nous avons vu à l'instant également que cette durée pouvait varier...

<sup>18</sup> Dans le contexte probabiliste où nous nous situons, constance et uniformité sont synonymes.

<sup>19</sup> Par une décision de nature humaine, sociale, politique, nous y reviendrons.

arrangements différents sont envisageables pour un même jeu de probabilités pour les  $\omega_i$  (il peut faire beau le 1<sup>er</sup>, le 6<sup>e</sup> et le 9<sup>e</sup> jour, et non les trois premiers jours<sup>20</sup>). On pourrait calculer le nombre de façons différentes d'attribuer les dix  $\bar{\omega}_j$  aux trois  $\omega_i$  (voir section 4.2), c'est autant de façons de numéroter les  $\bar{\omega}_j$  par rapport aux  $\omega_i$ .

## 2.2. Approche duale. Echange des probabilités

Nous voulons maintenant échanger les mesures des  $\omega_i$  et des  $\bar{\omega}_j$  en prenant les premières comme jauge, c'est-à-dire dire en demandant qu'elles suivent une loi uniforme, i. e. que les probabilités soient les mêmes. Dans le cadre d'une pensée de la relation, cela revient à dire : on échange la scène et les acteurs ; la scène elle-même est définie par des acteurs inapparents, mais bien réels. C'est une façon de reconnaître qu'aucune durée, que ce soit celle des  $\omega_i$  ou celle des  $\bar{\omega}_j$ , dans une formulation ou une autre, n'a de sens absolu. Seul a un sens une comparaison et son expression numérique repose sur le choix de ce qui est la jauge (il y a plusieurs façons de comparer).

L'échange est indiqué Fig. 1b. Ainsi on a maintenant  $p'_i = P(\omega_i) = 1/3$  pour  $i = 1, 2, 3$  ; nous devons alors ajuster les probabilités  $q'(\bar{\omega}_j)$ . Elles vont se dilater ou se rétrécir en fonction des  $P(\omega_i)$  correspondants, qui vont quant à eux connaître rétrécissement ou dilatation, maintenant écrites  $p'_i$ . Les valeurs des probabilités affectées aux  $\bar{\omega}_j$  sont égales à l'intérieur d'un même groupe (cf. notre discussion plus haut : on n'en privilégie aucun, ils sont tous sur le même plan<sup>21</sup>).

Ainsi, pour l'arrangement choisi, nous pourrions affecter aux événements  $\bar{\omega}_1$  à  $\bar{\omega}_5$  les probabilités  $q' = (1/3).(1/5) = 1/15$ , chacune se partageant un cinquième de  $1/3$  ; de même nous pouvons affecter à  $\bar{\omega}_6$ ,  $\bar{\omega}_7$  et  $\bar{\omega}_8$  les probabilités  $q' = (1/3).(1/3) = 1/9$  ; et à  $\bar{\omega}_9$  et  $\bar{\omega}_{10}$  les probabilités  $q' = 1/3.1/2 = 1/6$ . Nous avons alors la liste suivante de probabilités pour les événements  $\bar{\omega}_j$  :

$$q'_1 = \dots = q'_5 = 1/15$$

$$q'_6 = q'_7 = q'_8 = 1/9$$

<sup>20</sup> Cela correspond à un autre « tirage » du dé à 10 faces représentant les dix morceaux de scène, ou jours, où se déploient les événements « il fait beau », « il fait mauvais », « il fait couvert ».

<sup>21</sup> On décide d'arrêter une récursivité pouvant nous faire tourner en rond infiniment, quitte à reprendre les choses ultérieurement.

$$q'_9 = q'_{10} = 1/6$$

Quelle interprétation donner ? On a changé d'étalon, on a changé ce qui est uniforme, d'où les nouvelles mesures, mais on ne change pas la définition des événements  $\omega_i$  par rapport aux  $\bar{\omega}_j$ . Nous déclarons égales les trois périodes du temps météorologique « il fait beau », « il fait mauvais », et « il fait couvert » et la durée des jours est nouvelle. Elle est variable en fonction du temps qu'il fait, plus précisément de la répartition initiale entre les jours beaux, mauvais et couverts. Si les jours beaux dominent sur la période, ils sont plus rétrécis que les autres en durée astronomique ou calendaire (ce sont les  $q'_j$  pour  $j$  de 1 à 5), en se ramenant à une longueur constante pour les temps météorologiques. Selon cette répartition, le temps passe plus vite quand il fait beau : on s'ennuie moins, alors que les jours mauvais paraissent plus longs. On discutera dans la section 11.2 une situation plus réaliste où plus de deux façons de mesurer le temps seront confrontées (non seulement météorologique / astronomique ; on rajoutera atomique) comme illustration d'une problématique plus générale d'échanges entre paires (événements, probabilités).

### 2.3. *Eléments de formalisation*

Formalisons les calculs précédents de façon un peu plus générale. Les événements élémentaires apparents  $\omega_i$  ont pour probabilités  $p_i = P(\omega_i)$ . Les événements élémentaires cachés  $\bar{\omega}_j$  ont pour probabilités  $q_j = P(\bar{\omega}_j) = 1/\text{Card}(\bar{\omega}_j)$  qui sont toutes égales entre elles du fait de l'uniformité de leur loi. Les  $\bar{\omega}_j$  associés à tel événement  $\omega_i$ , sont appelés  $\bar{\omega}_{ji}$ . Le nombre total d'événements  $\bar{\omega}$  se calcule en sommant sur les sous-groupes correspondants aux  $\omega_i$  de départ ; soit

$$\text{Card}(\bar{\omega}) = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{ji}$$

Dans l'échange, et pour déterminer les nouvelles probabilités des  $\bar{\omega}_j$  qui ne suivront plus une loi uniforme, il convient de préciser à quel  $\bar{\omega}_{ji}$  on a affaire ; nous avons choisi

$$q'_{ji} = P(\bar{\omega}_{ji}) = \frac{1}{\text{Card}(\omega_i)} \frac{1}{\text{Card}(\bar{\omega}_j)}$$

### 3. Variables aléatoires

#### 3.1. Fonction de répartition des événements apparents et cachés (approche primale)

La discussion précédente peut être conduite sur des variables aléatoires. Pour une variable aléatoire discrète  $E$ , on affecte des valeurs  $e_i$ , par exemple dans  $\mathbb{R}$ , aux événements élémentaires  $\omega_i$ . Ainsi on pourra affecter les valeurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  aux trois événements apparents « il fait beau », « il fait mauvais » et « il fait couvert ». Ce sera par exemple la température de l'air. On pourra choisir l'échelle de température de façon que les trois valeurs partagent de façon égale le segment  $[0, 1]$ . Les trois valeurs n'ont pas la même probabilité, et la fonction de répartition correspondante est donnée sur la Fig. 2, en reprenant les mêmes valeurs de probabilités que dans l'exemple précédent.

Pour ce qui concerne les événements cachés, ils correspondent à la variable aléatoire  $F$  de valeurs  $f$ ; les valeurs  $f$  sont les durées cumulées en nombres de jours correspondant aux événements de valeurs  $e_i$ . On considérera que l'on peut normer les valeurs de  $f$ , de façon à les faire rentrer dans l'intervalle  $[0, 1]$  (en divisant la durée totale de 10 jours par 10 par exemple). Les événements cachés sont groupés en fonction de la valeur de la probabilité de chacun des événements apparents; on définit au total dix valeurs  $f_1$  à  $f_{10}$ . Dans la mesure où les événements cachés suivent dans un premier temps une loi uniforme, la taille de chaque jour est ici constante et égale à  $1/10$ . La loi de  $F$  étant uniforme, la fonction de répartition est la première bissectrice.

#### 3.3. Fonctions de répartition dans l'approche duale

On se reporte à la Fig. 3 où l'on a représenté à nouveau les fonctions de répartition  $F_E(e)$  et  $F_F(f)$  (première bissectrice). Les normalisations permettent de représenter les deux fonctions de répartition sur les mêmes diagrammes. On veut maintenant que la nouvelle fonction de répartition  $F'_E(e)$  corresponde à une loi uniforme, c'est à dire soit la première bissectrice. La fonction de répartition nouvelle de la variable aléatoire  $F'_F(f)$  sera alors en dessous de la première bissectrice; en suivant les règles élaborées dans la section précédente, la construction va donner une fonction de répartition  $F'_F(f)$  symétrique par rapport à la première bissectrice de l'ancienne  $F_E(e)$  des événements apparents de l'approche primale. Pour les points A et B étudiés sur la figure, cela revient à baisser l'ordonnée  $y_A$  en  $y_{A'}$  et l'ordonnée  $y_B$  en  $y_{B'}$  pour diviser l'axe des ordonnées en trois parties égales (on affecte à la série

d'événements  $f_i$  la probabilité correspondante des  $e_i$  maintenant déclarée uniforme). On passe des points A à A' et B à B' en échangeant abscisse et ordonnée, c'est-à-dire selon une symétrie par rapport à la première bissectrice (résultat donné sur la Fig. 4). Si nous avons dit plus haut que, dans l'approche duale, la longueur des jours astronomiques était fonction du temps plus ou moins beau, on dira ici qu'elle dépend de la température de l'air.

### 3.4 Cas continu

Le cas continu est traité Fig. 5. Les densités de probabilités, ou dérivées /pentes des fonctions de répartition, soient  $f_E(e)$  et  $f_F(f)$  sont inverses l'une de l'autre, du fait de la symétrie des fonctions de répartition par rapport à la première bissectrice.

## 4. L'ancienne définition des probabilités : les cas possibles et les cas favorables

Comment l'approche décrite dans la section précédente (événements apparents / cachés ; formulation primale / duale) se retrouve-t-elle dans l'ancienne définition des probabilités ? Nous allons montrer que la répartition entre événements possibles et événements favorables est porteuse d'hypothèses « cachées » en matière de probabilités, et peut faire elle-même l'objet d'une formulation duale (la structure du problème dans ce cas est résumée dans le Tableau 2).

### 4.1. Point de départ

Dans l'ancienne définition, comme nous l'avons dit, la probabilité est définie comme le rapport du nombre de cas favorables  $n$  au nombre total de cas possibles  $N$  :

$$P = n / N$$

Les problèmes classiques posés en termes d'événements possibles / favorables sont par exemple celui de connaître les chances d'avoir telle couleur, ou telle valeur, de carte en en tirant une ou plusieurs dans un jeu de 52 cartes. Pour le tirage d'un roi, on a  $p = 4/52 = 1/13$ . Ou celui de prendre une boule d'une couleur donnée, par exemple rouge, dans une urne contenant  $N$  boules dont  $r$  rouges et  $b$  blanches. Dans ce cas, on dira que, en tirant une boule dans l'urne, on a une probabilité  $P = r / N = r / r + b$  d'obtenir une boule rouge. Si la probabilité  $P$  est ainsi attribuée aux événements favorables, quelle probabilité a-t-on pour les

événements possibles ? Peut-on en attribuer une en restant dans le cadre d'une définition des probabilités par des rapports ; en d'autres termes, quel rapport associer aux événements possibles ?

#### *4.2. Lien entre définitions ancienne et moderne des probabilités ; les événements élémentaires cachés*

Pour discuter proprement ces questions, il est utile, au moins pour le raisonnement, de numéroter toutes les boules, rouges ou blanches, en les repérant chacune de façon unique ; les cartes à jouer ont également chacune leur individualité. Nous définissons alors des collections ou arrangements de boules ou de cartes en spécifiant pour chacun la suite ordonnée des éléments qui le constitue, ce sera un événement élémentaire<sup>22</sup> ou possible. Quand on parle du tirage d'un roi, sans préciser lequel, on parle d'un événement non élémentaire, à définir à partir des événements élémentaires bien précisés, c'est à dire contenant le roi de pique, ou le roi de trèfle etc. C'est dire que derrière la probabilité de tirer un roi, se cachent les probabilités de prendre des cartes particulières parmi quatre cartes parmi cinquante-deux, en considérant chacune des cinquante-deux cartes comme unique.

De même pour le tirage d'une boule parmi un lot de boules, on peut lister, par l'analyse combinatoire, tous les arrangements ordonnés possibles de  $r + b$  boules en appelant chacune par son nom ou son numéro, même si elles sont toutes semblables *a priori*. Toute association a son individualité et le calcul des probabilités à la mode ancienne se fait alors à partir de tous les arrangements ordonnés, en regardant la proportion, parmi les arrangements, de ceux qui possèdent telle ou telle propriété.

C'est une façon de relier la notion moderne d'événement à la notion ancienne de probabilité par rapport d'événements. Les divers arrangements correspondent à des événements élémentaires de la formulation moderne. On voit ainsi que, pour que la probabilité écrite comme rapport du nombre de cas favorables au nombre total de cas soit valide, il faut que chacun des éléments élémentaires ait même poids. On retrouve l'hypothèse faite en physique statistique d'une d'équiprobabilité des événements élémentaires, à partir desquels on obtient,

---

<sup>22</sup> Nous nous permettrons d'utiliser le mot « élémentaire » à propos des événements « possibles » ainsi définis de la théorie ancienne des probabilités, même si de tels événements peuvent apparaître composites. Ils ont d'élémentaire la propriété de se partager l'ensemble de la probabilité des événements égale à l'unité. Ils sont relatifs à une façon particulière de poser un problème (le mot élémentaire est plutôt utilisé dans la théorie moderne).



par l'analyse combinatoire, les événements favorables / composés (cette discipline utilise alors l'approche ancienne des probabilités). On se rapproche de notre propos de donner sens à des probabilités d'événements cachés, mais on remarquera que dans le cadre « ancien » où elle est exprimée, la requête n'est pas cohérente avec le reste de la démarche : pour ces événements élémentaires / possibles, on fait en effet appel à une notion de probabilité définie en elle-même (on va déclarer que toutes les probabilités sont égales), alors que pour les autres événements la probabilité est définie par un rapport entre nombres d'événements. Deux définitions différentes des probabilités apparaissent, ainsi qu'une récursivité (on a besoin en somme d'une probabilité, celle des événements élémentaires, pour définir la probabilité des autres événements « favorables »). Dans son ouvrage, R. Lestienne (1993) parle de ce « cercle vicieux ».

Ces difficultés se résolvent dans le point de vue d'une *probabilité relationnelle* : il coexiste dans tout problème deux séries d'événements et deux séries de probabilités définies l'une en opposition à l'autre. Les événements élémentaires possibles de la formulation ancienne jouent ici le rôle des événements cachés de la formulation moderne.

La physique statistique dont on vient de parler a besoin, d'une part de nommer comme différents des arrangements apparemment identiques (en numérotant des particules *a priori* identiques), et d'autre part de dire que les probabilités des événements individuels (ainsi définis) sont égales. Ces hypothèses sont efficaces puisqu'elles permettent par exemple de déterminer une entropie, grandeur macroscopique, à partir de combinaisons d'atomes à des niveaux d'énergie différents à l'échelle microscopique. Le Coze (2010) a discuté cette situation et conclu que le calcul est effectivement, implicitement, permis par la possibilité donnée à celui qui calcule de « voir » des différences que ne perçoit pas l'expérimentateur, c'est-à-dire des assemblages ordonnés de particules en apparence totalement identiques.

Reprenons cela de façon détaillée sur l'exemple du tirage de boules dans une urne : la probabilité (au sens ancien) de tirer une boule rouge soit  $p = r / (r + b)$  correspond à la démarche (au sens moderne) consistant à regarder tous les arrangements (avec boules numérotées) montrant une première boule rouge. Soient par exemple six boules dont deux rouges (Fig. 6), numérotées une par une. Les boules 1 et 2 sont rouges. On examine les permutations (favorables) qui commencent par les boules 1 ou 2 et on va regarder leur proportion par rapport à l'ensemble. Le nombre total de permutations est  $6!$  Parmi elles, les

permutations commençant par la boule rouge numéro 1 sont 5 ! De même celles commençant par la boule rouge numéro 2, en nombre également de 5 ! Il y a donc 2.5 ! permutations favorables parmi les 6 ! permutations et la proportion cherchée est

$$\frac{2.5!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ce 1/3 est bien la proportion trouvée au sens ancien (deux boules rouges sur six).

#### 4.3. Application : formulation primale

Comment se traduit concrètement cette exigence d'égalité de probabilité des événements élémentaires cachés possibles ? On pourrait se poser la question de l'égalité de chance, ou de probabilité, de tirer une boule donnée dans une même urne, à cause de la géométrie compliquée de l'urne qui présenterait divers recoins auxquels on n'aurait pas la même chance d'accéder en plongeant la main. Un problème un peu différent nous permet de discuter cette question. Poincaré (1912) demande : quelle probabilité avons-nous de tirer une boule rouge si l'on dispose maintenant de deux urnes contenant respectivement  $N = r + b$  et  $N' = r' + b'$  boules, et que l'on décide de tirer au hasard dans l'une d'entre elles. Un raisonnement rapide pourrait conduire à dire : il y a en tout  $N + N'$  tirages envisageables et  $r + r'$  cas favorables, ainsi la probabilité cherchée est  $P = (r + r') / (N + N') = (r + r') / (r + r' + b + b')$ . Un examen plus approfondi montre que cette réponse est incorrecte. En effet, on a ici une probabilité composée, la première étape est de choisir une urne parmi les deux, la seconde de tirer une boule dans une urne. La probabilité de choisir une urne parmi les deux est *a priori*  $P = 1 / 2$  (cf. l'hypothèse d'égalité de probabilité), et la probabilité totale cherchée est alors :

$$P = \frac{1}{2} \frac{r}{r+b} + \frac{1}{2} \frac{r'}{r'+b'}$$

On a pondéré la probabilité pour une urne par la probabilité de choisir cette urne ; au total on a sommé les probabilités de tirer une boule rouge dans chaque urne, une fois que l'on a décidé l'urne (1/2 par choix). Cette valeur est égale à la valeur ci-dessus pour  $r + b = r' + b'$  (sachant que l'on a pris le même ratio 1/2 pour le choix d'une urne ou de l'autre). On a alors  $r + b + r' + b' = 2(r + b) = 2(r' + b')$ . Cet exemple nous montre que, si l'on s'intéresse à une collection d'urnes différentes, et que l'on veut tirer une boule parmi elles, il est nécessaire, si l'on veut

garder la même définition brute pour la probabilité d'ensemble par rapport à celle définie pour une urne, d'associer une probabilité cachée au niveau des urnes (dans le fait de choisir et dans le fait d'associer la même quantité de boules à chaque urne). On a là une expression de l'équiprobabilité cachée : le nombre de boules dans les urnes doit aussi être le même (condition  $r + b = r' + b'$ ), avec le même facteur  $1/2$  pour les deux urnes.

En ce rapportant à ce que nous avons dit plus haut, nous dirons qu'une urne correspond à un élément de « scène » sur lequel tel ou tel événement (le tirage d'une boule) va se « dérouler », et il importe que les éléments de scène soient neutres, ou encore soient identiques, c'est-à-dire ne favorisent pas par eux-mêmes tel ou tel événement. La contrainte d'équiprobabilité correspond à une loi uniforme pour cette distribution. L'autre condition  $r/b = r'/b'$  énoncée par Poincaré pour avoir l'identité des résultats ci-dessus, a la même signification ; ce qui importe c'est le ratio permettant de définir une probabilité, quels que soient les valeurs des numérateur et dénominateur. Il est plus habituel de se rapporter à une série d'événements de même dénominateur (on compare implicitement plusieurs tirages dans les mêmes conditions) c'est-à-dire en prenant la condition  $r + b = r' + b'$ . Paul Lévy (1925) fait une remarque analogue en disant : « pour comparer deux probabilités différentes, on peut les supposer réduites au même dénominateur, c'est-à-dire considérer que les groupes de cas comparés sont formés de cas tous également probables » (cet auteur comprend donc implicitement que l'égalité de probabilité implique un même nombre de boules dans chaque « élément de scène », nombre apparaissant au dénominateur des proportions qui sont écrites pour définir des probabilités au sens ancien).

Si l'on revient au jeu de cartes, Paul Lévy fait remarquer que la probabilité de tirer un roi parmi 52 cartes, soit  $4/52$ , est égale à celle de tirer un roi dans une couleur déterminée, soit  $1/13$ . On demande ainsi que le processus de tirage lui-même (que ce soit d'un roi ou d'une autre carte) soit équiprobable, et que la main de celui qui va tirer une carte ne soit pas attirée, sous l'effet de quelque force occulte, vers telle ou telle carte parmi les 52 possibles. Toutes doivent pouvoir être tirées avec une probabilité égale.

Dans les deux exemples précédents, sont apparues des probabilités associées aux événements (élémentaires) « possibles » et non seulement aux événements « favorables » (qui sont composites par rapport à l'élémentarité précédente). Et une hypothèse d'égalité de probabilité, ou de loi uniforme a été proposée. La différence de définitions dans les deux classes de

probabilités (ancienne / moderne), s'estompe ou se résout selon notre point de vue. Poincaré évoque cela rapidement et appelle l'hypothèse d'équiprobabilité de « métaphysique », c'est-à-dire n'étant susceptible d'aucun contrôle. Mais *il ne fait pas la remarque que l'hypothèse d'équiprobabilité concerne des probabilités définies « seules » et non comme proportions entre nombres de cas*. Moyennant quoi, il calcule (par le jeu des règles d'addition, complémentation, intersection etc.) des probabilités d'événements « favorables » (non élémentaires), au sens d'un vrai calcul (non « métaphysique »). Dans cette compréhension des choses, redisons que l'on ne fait que comparer des probabilités à d'autres probabilités. Ce point n'a pas été souligné par Poincaré, mais c'est bien conforme à son état d'esprit.

#### *4.4. Approche duale et échange des probabilités*

Les probabilités que nous accordons aux événements favorables (non élémentaires) nous apparaissent ainsi calculables à partir des probabilités des événements possibles (élémentaires) de probabilités supposées uniformes. Regardons maintenant l'échange entre ces deux séries d'événements, en changeant l'étalon (ou la référence ou la norme). Dans le cas des urnes, nous voulons, non pas rapporter nos tirages à des urnes, mais les rapporter à des boules rouges tirées : elles représentent les événements dont nous cherchions les probabilités. Et ainsi au lieu de poser la question : « combien de boules rouges par rapport à des boules blanches + rouges dans une urne », nous voulons demander plutôt : « combien de boules blanches rapportées à une boule rouge » dans ce que nous pouvons appeler une co-urne ? Pour établir une normalisation par rapport à des boules rouges, il nous faut construire de nouvelles urnes à partir de la donnée initiale d'un ensemble d'urnes et de boules ; ceci constitue une autre façon, en dualité avec la première, de compter les choses. La jauge devient la boule rouge et non l'urne. En bref on effectue un échange entre (favorable = rouge ; possible = rouge + blanc uniforme) et (favorable : des non rouges, des blanches ; possible = rouge uniforme).

Pour cela on est obligé d'affiner notre définition des événements et de numéroter des assemblages ordonnés (cf. section 4.2.). Regardons un exemple d'échange dans le cas des boules. Partons d'un arrangement particulier d'urnes de même taille contenant des boules rouges et des boules blanches et regardons comment nous allons pouvoir fabriquer un ensemble de nouvelles co-urnes définies chacune par une seule boule rouge. Nous pouvons procéder de la façon suivante (voir Fig. 7 et 8). On regarde la première urne, on prend une boule, on s'arrête si elle est rouge. Ensuite on commence à constituer une nouvelle urne

jusqu'à trouver une boule rouge : on s'arrête alors, et ainsi de suite. La question à poser est alors, quand on prend une boule rouge (au lieu d'une urne, la jauge est maintenant appuyée sur les boules rouges), quelle est la taille de l'urne que l'on va obtenir, ou plus précisément quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche ?

Dans l'exemple du jeu de carte, on pourrait aussi reconstruire un tirage en mettant les cartes par paquets définis par l'existence de rois. Je tire les cartes les unes après les autres, dès que je trouve un roi, j'arrête le paquet. Je fais ainsi quatre paquets. C'est une façon de construire quatre paquets. On peut repérer tous les paquets comprenant tel roi (ils vont avoir des tailles variables correspondant à des arrangements distincts des 52 cartes) et, dans la formulation duale, considérer que chacun de ces ensembles de paquets a même probabilité de  $\frac{1}{4}$ . On est alors conduit à donner aux événements élémentaires de tout à l'heure de nouvelles probabilités. Sans prétendre à un grand intérêt de cette opération, nous constaterons qu'elle est possible.

## **Deuxième partie : analyse d'un exemple inspiré de la réalité physique**

Appliquons la démarche précédente à l'étude d'un problème concret issu des sciences de la nature (voir Guy, 1993, 2005). La scène où se déploient les phénomènes, et dont les morceaux servent de jauge, est ici explicitement l'espace (et/ou le temps) ; elle se manifeste dans les variables d'équations aux dérivées partielles et leurs symboles mathématiques  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

### **6. Le problème : champ d'une grandeur physique**

On étudie la distribution dans l'espace, décrit ici par la seule variable  $x$ , de la grandeur scalaire  $c$  d'un champ physique mesurée en tout point ;  $c$ 'est une fonction de  $x$ , soit  $c = c(x)$  ; cette fonction correspond dans notre cas à la valeur, à  $t$  fixé, d'une fonction de  $x$  et de  $t$ , soit  $c(x, t)$  (voir plus loin). On part de la situation où l'on dispose d'une approche déterministe permettant de prévoir la répartition de  $c$  dans l'espace. Plus précisément, la valeur  $c(x)$  provient de la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante régissant  $c(x, t)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f(c)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Où  $t$  est le temps et  $f(c)$  une fonction de  $c$  non linéaire. L'équation s'écrit aussi :

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + \frac{\partial c_f}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Où l'on a fait apparaître deux fonctions de  $x$  et de  $t$ , soient  $c_s(x,t)$  et  $c_f(x,t)$ , correspondant respectivement à  $c$  et  $f(c)$  dans la notation précédente<sup>23</sup>. On voit que, dans cette façon d'écrire l'équation, la fonction  $c_s$  est associée à la variable  $t$ , alors que la fonction  $c_f$  est associée à la variable  $x$  :  $c_s$  est la concentration volumique d'un élément chimique dans une roche à un endroit donné ; on écrit sa variation par rapport au temps ; la roche échange avec un fluide qui la traverse et où la concentration volumique de l'élément chimique en solution est  $c_f$ . L'équation exprime la conservation de l'élément chimique et le terme en  $c_f$  représente la divergence d'un flux (on a omis un terme  $pv$ , où  $p$  est la porosité de la roche et  $v$  la vitesse du fluide ; on suppose que  $pv = 1$ , ou que l'on a normé les variables d'espace et de temps de façon appropriée). On pourrait, en exprimant le bilan dans un repère en mouvement le long du fluide, échanger les rôles de  $c_s$  et  $c_f$  par rapport à  $x$  et  $t$ , le solide alors avançant dans le fluide et le modifiant.

La résolution de cette équation produit des profils  $c(x, t)$  ( $c$  représente  $c_s$  ou  $c_f$ ) à divers instants à partir d'une condition initiale  $c(x, 0) = c_0(x)$ . Pour des raisons de bonne concordance entre les grandeurs discutées par la suite, nous dirons que la fonction  $c(x)$  choisie est  $c_f(x)$  mais la relation  $c_f = f(c_s)$  nous montre que la correspondance avec  $c_s(x)$  est immédiate (sous réserve de conditions de régularité de  $f$  que nous ne discutons pas ici). Nous nous plaçons à un instant particulier  $t_1$  et cherchons à comprendre un profil instantané  $c(x, t_1) = c(x)$  en oubliant la variable  $t$ . Une des caractéristiques importantes de ce type de problème est sa nature hyperbolique impliquant l'apparition possible de discontinuités (ou fronts) dans la fonction  $c(x)$ . Sachant que dans certaines conditions, on peut voir un profil stationnaire se déplacer à la vitesse  $v_F$  (vitesse d'un « front »), on peut aussi dire que l'on examine un profil  $c(x)$  dans un repère mobile à la vitesse  $v_F$ .

---

<sup>23</sup> La relation  $c_f = f(c_s)$  traduit une hypothèse d'équilibre local.

Après normalisation, le domaine d'espace envisagé est l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous faisons une hypothèse de monotonie de la fonction  $c(x)$  (on verra comment éventuellement s'en affranchir par la suite) ; sans perte de généralité on suppose que  $c$  est croissante de dérivée  $c' = dc / dx > 0$  sur  $[0, 1]$ . On a donc une correspondance bi-univoque entre la grandeur physique  $c$  et la variable d'espace  $x$  (voir figure 9a ; le profil présente un choc séparant deux plateaux de valeurs). On pose  $c_0 = c(0)$  et  $c_1 = c(1)$  les valeurs limites de la grandeur  $c$ . On pourra prendre  $c_0 = 0$  et  $c_1 = 1$ .

## 7. Formulation primale : estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire $C$ associée à la grandeur $c$

Notre problème est déterministe mais la question est posée de façon probabiliste en considérant que nous ne savons pas où nous nous situons en espace (on soumet en quelque sorte au tirage au sort la position du point où l'on se trouve) : comment peut-on alors encadrer l'incertitude<sup>24</sup> sur la grandeur  $c$ , par exemple en déterminant sa densité de probabilité ? On s'intéresse donc à la loi de probabilité de la variable aléatoire (incertaine)  $C$  associée à la grandeur physique  $c$ , lorsque la variable d'espace n'est pas connue. La variable d'espace  $x$  va jouer le rôle d'une variable aléatoire cachée  $X$  au sens de la première partie et sa densité est supposée uniforme dans  $[0, 1]$ . Cette hypothèse se comprend en redisant que l'axe des  $x$  est la scène où se déploie le phénomène marqué par  $c$  ; les différentes probabilités associées à  $c$  correspondent à des « étendues » différentes occupées sur la scène, dont les morceaux servent d'étalon de mesure (ils sont de longueur constante par unité de longueur, par propriété – tautologique- d'un étalon). Pour cela on écrit :  $C = c(X)$ , avec  $X$  variable aléatoire uniforme de valeurs  $x$  et on calcule la probabilité pour  $v$  variant dans  $[c_0, c_1]$ . On utilise le symbole  $v$  à la place de  $c$  pour éviter la confusion avec la fonction  $c$  dans les expressions du type  $c^{-1}(v)$ . La fonction de répartition de la variable aléatoire  $C$  est :

$$F_C(v) = P(C = c(X) < v) = P(X < c^{-1}(v)) = c^{-1}(v) \quad (3)$$

---

<sup>24</sup> Le mot incertitude est employé ici non strictement dans le sens de la physique (écart entre une valeur mesurée et une valeur « vraie »), mais dans le sens de la théorie des probabilités (proportion des valeurs de la variable dans telle gamme de valeurs, par rapport à l'ensemble des valeurs, mesurée par une densité de probabilité par exemple).

L'égalité à  $c^{-1}(v)$  provient de l'uniformité de la loi de  $X$ . Ainsi la fonction  $v \rightarrow c^{-1}(v)$  s'interprète comme la fonction de répartition de la grandeur  $C$ . La densité de probabilité est obtenue par dérivation, c'est-à-dire :

$$f_C(v) = \frac{1}{\frac{dc}{dx}(c^{-1}(v))} \quad \text{densité de } C \quad (4)$$

Où l'on a utilisé la propriété des dérivées composées. On remarquera que  $c^{-1}(v)$  est la valeur de  $x$  correspondant à  $c$  dans le profil  $c = c(x)$  (Fig. 9b). On mesure bien le fait que cette densité est faible aux points qui correspondent à une variation importante de  $c$  par rapport à  $x$ . Ce faisant, nous donnons une assise quantitative, portant sur des grandeurs probabilistes (au moins sur cet exemple), à la proposition annoncée en introduction : la propriété de quantification (entendue au sens de la physique, c'est-à-dire qualifiant le saut ou l'omission de certaines valeurs de la grandeur étudiée) se traduit par la faible probabilité accordée aux valeurs intermédiaires (voir la correspondance avec le « spectre de raie » sur la Fig. 9b).

## 8. Formulation duale : estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire $X$

Intéressons-nous maintenant à la formulation duale et cherchons à mesurer l'incertitude sur la grandeur  $x$  quand c'est  $c$  qui nous sert de mesure. On peut dire que l'on fait l'échange entre les deux grandeurs  $c$  et  $x$  quant à leurs rôles d'étalons de mesure. En termes de variables aléatoires, on considère donc  $X = c^{-1}(C)$ , avec cette fois  $C$  uniforme sur l'intervalle  $[c_0, c_1]$ , donc de densité constante égale à  $1 / (c_1 - c_0) = 1$  (en prenant  $c_1 = 1, c_0 = 0$ ). On obtient que  $X$  a pour densité la fonction :

$$f_X(x) = \frac{1}{c_1 - c_0} \frac{dc}{dx}(x) \quad \text{densité de } X \quad (5)$$

En prenant comme on vient de le rappeler  $c_0 = 0$  et  $c_1 = 1$ , on peut s'affranchir du facteur  $c_1 - c_0$ . Voir la figure 9d pour une illustration. On mesure cette fois que  $X$  est beaucoup plus probable là où la variation de la grandeur  $c$  est forte. On retrouve aussi le résultat établi dans la première partie que les densités des variables aléatoires  $C$  et  $X$  sont *inverses l'une de l'autre* dans les formulations primale et duale.



## 9. Situations plus complexes

Nous ne faisons qu'évoquer le cas général où l'on suppose que la grandeur  $c = c(x)$  est une fonction non nécessairement monotone. Lorsqu'on n'a aucune information sur  $x$ , on peut définir sans difficulté la loi de la variable aléatoire  $C = c(X)$  comme la mesure de probabilité image de la loi uniforme :

$$P(C \in [\alpha, \beta]) = \int 1_{[\alpha, \beta]}(c(x)) dx \quad (6)$$

Où  $1_{[\alpha, \beta]}$  est la fonction qui vaut un dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  et zéro à l'extérieur.

Par contre il est impossible de quantifier les incertitudes sur  $x$  si l'on n'a aucune information sur  $c$ . Il faut pouvoir localiser en espace, c'est-à-dire se positionner dans une certaine région de l'espace où  $x$  est en correspondance biunivoque avec  $c$ .

Dans le cas général, on peut se donner des grandeurs physiques  $c_1, c_2, \dots$  ainsi que des variables d'espace  $x_1, x_2, \dots$  et de temps  $t$ . Ces grandeurs sont liées par des équations du type suivant (voir un exemple de ce type dans Sedqui et Guy, 2001).

$$\varphi_k(c_1, c_2, \dots, x_1, x_2, \dots, t) = 0 ; k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

On peut alors mesurer les incertitudes de manière symétrique mais en faisant à chaque fois des hypothèses de localisation des variables inconnues qui garantissent une correspondance univoque, ce qui passe par le théorème des fonctions implicites. Les équations de type (7) peuvent correspondre à des systèmes hyperboliques dont les solutions font apparaître des problèmes aux valeurs propres analogues à ceux de la mécanique quantique (Guy, 2005).

## 10. Retour à l'équation aux dérivées partielles. Considérations générales.

Comme nous l'avons vu, la densité de probabilité  $f_X(x)$  de la variable aléatoire  $X$  de valeurs  $x$  est égale à  $dc/dx$ . Si l'on se souvient maintenant que ce  $dc/dx$  est en fait un  $\partial c/\partial x$  à  $t$  constant, ou plus précisément un  $\partial c_t/\partial x$ , nous tirons mécaniquement de la considération de l'équation

aux dérivées partielles de départ (1) l'identité de la densité en  $x$  à une densité en  $t$ , ce que nous pouvons écrire

$$f_X(x) = f_T(t) \quad (8)$$

Où l'on a fait apparaître une variable aléatoire  $T$  associée aux valeurs du temps  $t$  ; nous sommes alors dans le cadre de la formulation duale, où les incertitudes sur  $X$  et  $T$  sont mesurées par les variables aléatoires  $C_f$  et  $C_s$  de lois déclarées uniformes. Pour respecter les différentes correspondances entre variables, on dira que, de même que l'on se sert de  $c_f$  pour mesurer l'incertitude sur  $X$ , on se sert de  $c_s$  pour mesurer l'incertitude sur  $T$  ; sachant que, via la relation  $c_f = f(c_s)$ , les étalons servant pour mesurer  $X$  et  $T$  peuvent être considérés comme les mêmes à une transformation près (le caractère non-linéaire du passage entre  $c_f$  et  $c_s$  fait que l'uniformité simultanée des deux variables demande de tenir compte précisément de cette transformation).

Un lien d'égalité apparaît entre les deux densités  $f_X(x)$  et  $f_T(t)$  et s'inscrit dans notre compréhension des concepts d'espace et de temps, toujours pensés en composition l'un avec l'autre. La relation précédente peut aussi s'écrire avec des fonctions de répartition<sup>25</sup> :

$$\frac{\partial F_X}{\partial x} = \frac{\partial F_T}{\partial t} \quad (9)$$

L'hypothèse ergodique, conduisant à évaluer des moyennes de grandeurs physiques, calculées en espace et en temps (à la base de la méthode des ensembles de Gibbs) exprime le même résultat<sup>26</sup>, également à la base des approches pragmatiques utiles pour des calculs de cinétique en science des matériaux (« path probability method », Kikuchi, 1966 : les probabilités en temps de sauts des atomes, d'un nœud à un autre d'un réseau cristallin, sont prises égales aux probabilités en espace de coexistence de différents atomes voisins).

---

<sup>25</sup> L'équation (9) est invariante de Lorentz (cf. Guy, 2012). La transformation de Lorentz appliquée à la paire  $(F_X, F_T)$  va faire apparaître de nouvelles fonctions  $F'_X$  et  $F'_T$  qui seront chacune des combinaisons des fonctions  $F_X$  et  $F_T$ , prises d'abord séparées. La compréhension de cette proposition mérite des recherches complémentaires.

<sup>26</sup> L'invariance de Lorentz de l'équation précédente (comme toute invariance de Lorentz) exprime une façon de comprendre les rapports entre concepts d'espace et de temps. Inversement, l'hypothèse ergodique, qui nous dit quelque chose sur les rapports entre temps et espace, est une autre façon d'exprimer l'invariance de Lorentz. Notons que les équations discutées ici devraient être réécrites en utilisant un paramètre pré-temporel à trois dimensions en correspondance avec les trois dimensions de l'espace. Le principe ou l'hypothèse ergodique mériterait aussi une discussion spécifique.

Si l'on revient maintenant à la formulation primale attachée à l'équation aux dérivées partielles initiale (les variables aléatoires de loi non uniforme X et T étaient associées à la formulation duale), la relation entre densités de probabilité concernant les variables aléatoires  $C_f$  et  $C_s$  mesurées par les variables aléatoires X et T de lois uniformes (cachées) s'écrit :

$$\frac{1}{f_{C_f}(v)} = \frac{1}{f_{C_s}(\mu)} \quad (10)$$

soit  $f_{C_s}(\mu) = f_{C_f}(v)$ , où les densités de probabilités nouvelles sont inverses des densités de la formulation précédente. On a noté  $\mu$  et  $v$  les variables associées à  $C_s$  et  $C_f$  pour éviter la confusion avec des fonctions de même écriture, comme on l'a fait plus haut pour  $v$ . Nous serions tentés d'y associer une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial t}{\partial c_s} = \frac{\partial x}{\partial c_f} \quad (11)$$

sans précaution d'écriture du point de vue mathématique (ni sur les signes des facteurs : l'équation aux dérivées partielles de départ regroupant les deux termes du même côté du signe =).

### *Eléments de discussion*

Dans la démarche suivie, nous avons commencé à travailler avec un seul champ physique, celui de la concentration  $c_f$ , mis en relation avec son étalement dans l'espace. Cette première étape (une mise en composition d'un champ unique avec une seule variable) est dans le prolongement direct de la première partie du texte : les probabilités des événements sont mesurées par la « place » occupée dans un seul champ, ici spatial. Dans une deuxième étape, nous avons considéré également le temps et le champ physique  $c_s$ , en prenant en compte l'équation aux dérivées partielles dans son fonctionnement complet ; nous avons alors obtenu le résultat de l'identité des densités de probabilité en temps et en espace<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup> Malgré la similitude de notations par paires, la démarche suivie dans Guy (2016) est différente en ce qu'elle porte d'emblée sur la dualité (x, t) ou (r, t) mise en composition avec une ou plusieurs dualités de champs physiques désignés par des paires (f, g), (h, i) etc. Dans la discussion présente sur les probabilités, les dualités concernent les  $\omega_i$  et les  $\bar{\omega}_j$  et leurs probabilités, et les paires ( $\omega_i$ , p) ne sont pas à mettre sur le même plan que les paires précédentes (f, g), (h, i)...

L'échange de grandeurs (le champ de la grandeur physique et le champ spatial), et la quantification sont liés ; cette dernière est une manifestation (poussée à la limite) de l'inhomogénéité du comportement. Pour la caractériser, nous avons projeté une approche probabiliste sur l'équation différentielle et l'échange porte en fin de compte sur des fonctions à caractère probabiliste. La permutation entre l'espace et la grandeur physique permet la substitution entre une densité quelconque (donnant lieu à quantification) et une densité uniforme. Pour un lien plus précis avec la mécanique quantique, il convient de remarquer que la densité de probabilité  $y$  est donnée par le carré de la fonction d'onde, soit  $f = \psi^2$  ; la densité  $f'$  cherchée sera alors l'inverse, soit  $1/\psi^2$ . Pour que la similitude des deux démarches soit complète, il faudrait traiter une dualité (probabilité, flux de probabilité) un peu analogue à ce que l'on retrouve en mécanique quantique.

## 11. Discussion, conclusions

### 11.1. Dualité dans la conception moderne des probabilités

Pour commencer à faire fonctionner la démarche relationnelle, il faut au minimum des dualités de points de vue, à mettre en opposition / composition les uns avec les autres. Dans la définition moderne des probabilités (construction d'un modèle probabiliste sur un univers et une  $\sigma$ -tribu d'événements), la première dualité rencontrée est celle entre les événements élémentaires et leurs probabilités. Comment met-on en composition les deux termes de cette dualité ? Parler d'un événement, c'est exprimer *a priori* que cet événement peut apparaître : il a alors une probabilité différente de zéro. Il y a donc une scène où il peut apparaître. Parler de plusieurs événements suppose que l'on va considérer ces derniers comme possibles, et, sans autre information, partager entre eux la probabilité totale, partager la scène. Il y a donc une composition naturelle entre les deux termes de la dualité (événement, probabilité). Ce faisant, nous sommes orientés vers des morceaux de « scène » où se manifestent les événements, scène restée implicite pour l'instant. Ces morceaux de scène (parlons alors d'événements cachés), ce sont les faces du dé (avant d'y inscrire ou d'y lire quelque chiffre que ce soit) ; ce sont encore des domaines d'espace-temps de la physique, quand on y parle d'événement. On suppose *a priori* que l'on peut découper l'ensemble de la scène (où vont se manifester les acteurs, ou les événements) en morceaux de taille égale. Les probabilités des événements sont

les proportions de la scène qu'ils occupent, cette dernière étant considérée comme partout égale à elle-même, ou uniforme. Ainsi lorsque l'on considère les  $n = 6$  faces d'un dé, on peut *a priori* associer une probabilité pour chacune  $P = 1/n$ , et dans le cas général écrire

$$P(\bar{\omega}_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}(\omega_i)}$$

où Card désigne le cardinal, ou le nombre total d'événements élémentaires, formule appliquée ici aux  $\bar{\omega}_j$  des événements cachés d'égale probabilité<sup>28</sup>. On voit au total que c'est aussi en affectant des nombres, des probabilités aux événements primaires, que l'on fait apparaître les événements cachés et leurs probabilités.

Ainsi la première dualité « interne » entre les  $\omega_i$  et les  $p_i$  dans  $(\omega, p)$  conduit naturellement à la dualité cachée  $(\bar{\omega}, q)_U$  et à une démarche relationnelle. Pour une variable aléatoire normée entre 0 et 1, l'approche duale correspond directement à un échange entre événement et probabilité (cf. la construction géométrique discutée sur la Fig. 3). Comme on l'a vu, nous pouvons interpréter de façon très proche de la précédente, la dualité entre événements favorables et événements possibles de la définition ancienne des probabilités. La récursivité qui s'y manifeste (il faut définir des probabilités pour des événements possibles et les considérer égaux) révèle le caractère relationnel de la définition des probabilités.

### 11.2. Echanges généralisés entre événements de lois de probabilité différentes

Nous voyons donc comment peut fonctionner une approche relationnelle pour les probabilités. Dès que l'on veut parler et nommer, on est certes obligé de séparer des objets et d'avoir une démarche qui ressemble à une démarche substantielle ; mais il faut aussitôt mettre en relation les objets nommés les uns avec les autres : il apparaît une récursivité entre aspect relationnel et aspect substantiel qui n'est jamais arrêtée de façon définitive. Si l'on a commencé par définir des paires  $(\Omega_1, p_1)$ ,  $(\Omega_2, p_2)$  etc. d'ensembles d'événements apparents et leurs lots de probabilités, on suppose que l'on a pu faire apparaître une paire  $(\Omega_3, p_3)_U$  d'événements

---

<sup>28</sup> Pour la loi uniforme, la dualité entre événements et probabilités est particulièrement forte, puisque la valeur des (égales) probabilités est une conséquence directe du nombre d'événements.

cachés et leurs probabilités de loi uniforme<sup>29</sup> ; ce sont eux qui servent d'étalon de mesure pour les probabilités des ensembles d'événements  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On représente sur la Fig. 10a les fonctions de répartition des événements  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , et  $\Omega_3$  dans le cas de fonctions aléatoires continues, en nous inspirant de la démarche suivie pour construire la Fig. 5 (la fonction de répartition des événements  $\Omega_3$  est la première bissectrice). Mais, dans l'étude d'un problème de ce type, on peut s'apercevoir, ou l'on peut décider, qu'il est plus approprié de choisir les événements  $\Omega_2$  par exemple comme étalon de hasard et leur accorder une loi uniforme. C'est ce que l'on a fait sur la Fig. 10b où la fonction de répartition pour ces événements devient la première bissectrice. Dans ces conditions, les fonctions de répartition des séries d'événements  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$ , c'est-à-dire toutes les probabilités correspondantes, sont modifiées selon ce qui est représenté sur la Fig. 10b (en reprenant la construction discutée plus avant). On peut généraliser cette démarche et supposer que l'on puisse, suivant les circonstances, faire différents choix dans un ensemble de possibilités et accorder l'ensemble des probabilités en conséquence. Dans cette cascade de possibilités d'échanges généralisés, ce qui importe ce sont des relations, des ratios entre probabilités, comme on l'a également discuté plus haut. Et la discussion ne concerne plus tant le caractère apparent ou caché des événements que le choix parmi eux d'un ensemble étalon.

*Illustration.* Reprenons l'exemple des différents événements apparents de nature météorologique (il fait beau, il fait mauvais, il fait couvert) dont on étudie les probabilités en examinant les proportions des jours qu'ils représentent, où tous les jours sont supposés de même durée (événements cachés) ; on peut s'apercevoir ainsi que les jours ont en réalité des durées variables (si on les compte en secondes par exemple) et l'on peut préférer se rapporter à une nouvelle série d'événements cachés s'appuyant sur des durées mesurées d'une nouvelle façon (ce choix peut simplement résulter d'une décision de s'appuyer sur des horloges atomiques et non astronomiques). On pourra alors réviser la répartition des probabilités des événements initiaux pour l'ajuster au nouveau choix d'étalon de probabilité. Si l'on attribue à la série des événements désignés de façon ramassée par « temps météorologique », « temps astronomique », « temps atomique » et leurs probabilités, les paires de symboles  $(\Omega_1, p_1)$ ,  $(\Omega_2, p_2)$  et  $(\Omega_3, p_3)$  respectivement, on partira d'une situation décrite par  $\{(\Omega_1, p_1), (\Omega_2, p_2)_U, (\Omega_3,$

---

<sup>29</sup> Repérons par  $\Omega_1$  un premier *ensemble* d'événements, par  $\Omega_2$  un deuxième ensemble d'événements etc. (et non des événements particuliers : notation différente de celle utilisée au début du texte). Nous continuons avec la notation  $(\Omega_i, p_i)$  sans mettre de  $\bar{\Omega}$  pour les événements de loi uniforme. Dans les échanges discutés ici, on prendra garde de ne pas mettre sur le même plan les paires  $(\Omega, p)$  avec les paires  $(f, g)$ , où  $f$  et  $g$  désignent deux champs physiques en dualité, comme nous l'avons discuté dans Guy (2016). Voir note 27.

$p_3\}$  où les jours astronomiques servent de jauge, à une autre situation décrite par  $\{(\Omega_1, p_1), (\Omega_2, p_2), (\Omega_3, p_3)_U\}$  où ce sont les événements atomiques qui servent de jauge. L'échange, dans le sens discuté dans ce texte, a alors concerné les jours astronomiques et les jours atomiques et l'ensemble des probabilités (en particulier pour les jours météorologiques) a été révisé en conséquence. Dans cet exemple, les changements seront mineurs –de l'ordre de la seconde par an<sup>30</sup>- ; ils le seraient moins si l'on se plaçait sur de très longues périodes géologiques où le ralentissement de la rotation de la terre ne serait plus anodin.

### 11. 3. Formalisation : pistes de recherche

Nous avons présenté les choses à partir d'exemples. Un travail d'axiomatisation serait nécessaire pour aller plus avant. Les événements d'une double sorte (apparents / cachés) discutés ici ont en effet des propriétés particulières à formaliser. Ainsi celle selon laquelle les premiers et les seconds ne sont disjoints d'aucune façon (il n'y pas de beau temps qui ne corresponde d'abord à un jour ; il n'y a pas de jour où l'on ne puisse parler de pluie et de beau temps). L'axiomatique de Kolmogorov pourrait donc être relue dans ce sens, en cherchant à relier les univers  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$ , distincts (les événements élémentaires  $\omega_i$  ne font pas partie de  $\bar{\Omega}$ , pas plus que les  $\bar{\omega}_j$  ne font partie de  $\Omega$ ), ce qui n'empêche pas de mettre en correspondance étroite, comme nous venons de le rappeler, des événements apparents et leurs substrats cachés. Des lois de type Bayes pourraient y être incorporées, la conditionnalisation étant ici celle de savoir que les probabilités attachées aux événements apparents tiennent sous réserve que les événements cachés ont une loi uniforme. L'échange des événements apparents et des événements cachés (formulation duale) doit aussi respecter des contraintes quantitatives que nous avons vues sur les exemples : on ne connaît qu'un ratio entre des probabilités (constance des ratios  $p(\omega_i)/p(\bar{\omega}_j) = p'(\omega_i)/p'(\bar{\omega}_j)$  dans les problèmes primal et dual, pour des indices  $i$  et  $j$  en correspondance ; à rapprocher de l'égalité  $eF(e) = f'F'(f')$  reliant les valeurs des variables aléatoires et leurs fonctions de répartition dans le cas primal et le cas dual, voir Fig. 3).

### 11. 4. Qu'est-ce que le hasard ? Retour sur les débats entre fréquentistes et bayésiens.

Dans une démarche relationnelle, nous voyons que l'on ne peut pas dire ce qu'est le hasard tout seul et des choix sont nécessaires. Ce point de vue permet d'apporter des éléments à la discussion qui oppose les fréquentistes aux bayésiens (sans prétendre la connaître ni la

---

<sup>30</sup> En l'occurrence, on passerait de l'horloge atomique à l'horloge astronomique, dans une situation inverse de celle que nous venons de décrire, car la base de la mesure du temps est de nos jours atomique mais l'on veut garder une correspondance des jours et des années avec l'astronomie.

comprendre dans ses détails, en particulier techniques). A l'adresse des premiers nous dirons qu'il n'existe pas de probabilité purement objective ni intangible (déterminée « objectivement » par des fréquences observées), sans nécessité d'aucun choix : il convient toujours de se mettre d'accord sur des étalons, en l'occurrence ceux des mesures des probabilités. Les conventions peuvent être amenées à changer. Dans cette situation, l'« amélioration » des probabilités de l'approche bayésienne n'est pas impensable dans le cadre fréquentiste (en formulation moderne ou ancienne). Mais, à l'adresse des seconds, nous dirons que la révision possible des probabilités en fonction d'informations nouvelles ne termine pas l'histoire. Il n'y a pas besoin de subjectivité pour pouvoir/devoir réviser. Il reste encore, il reste toujours, des choix amendables, portant sur les échelles de temps et d'espace servant à mesurer les probabilités. A notre connaissance, ni les fréquentistes, ni les bayésiens, n'ont vu, ou mis en valeur, la démarche relationnelle à l'œuvre en probabilités, et la nécessité d'un arrêt provisoire qui lui est liée. Le provisoire n'est pas associé à l'attente d'autres informations : il est social ou politique, et met en jeu une convention décidée au sein d'une communauté humaine<sup>31</sup>. Sans prétendre que les changements concernés peuvent être quantitativement significatifs, leur possibilité même nous semble importante du point de vue conceptuel.

Les éléments de scène sur lesquelles se déploient les événements dont on cherche à évaluer les probabilités peuvent donc être de tailles inégales ; non dans l'absolu, ce qui n'a pas de sens, mais par rapport à d'autres façon de mesurer le temps et l'espace, auxquelles on attache d'avantage de valeur (pour des raisons variées, tenant en particulier à leur commodité de mise en œuvre). Ainsi le dé peut être pipé ; les cartes que l'on tire peuvent être de tailles inégales. On peut suivant ce qui se présente, changer en cours de route les probabilités, c'est-à-dire changer de modèle (Matheron (1978) soulignait déjà : « il n'y a pas de probabilité en soi, il n'y a que des modèles probabilistes »). Insistons : le degré de liberté n'est pas tant de dire : la réalité va nous obliger à changer, mais de dire aussi : pour différentes raisons, nous allons changer de convention.

### *Hasard, espace, temps*

Les relations entre hasard, espace et temps ont été abordées par divers auteurs et nous n'avons pas la prétention de les examiner ici de façon exhaustive. Krivine (2016), par exemple, note

---

<sup>31</sup> Dans un registre un peu différent, Henri Bergson (1932) notait le lien fort entre le contexte humain de telle situation et ce qu'on appelle hasard.



que les probabilités d'un événement vont changer suivant l'amplitude totale d'espace et/ou de temps examinée (si un événement se produit en moyenne une fois par an, l'évaluation de sa probabilité ne sera pas la même si l'on se place sur une durée d'une seconde ou d'un siècle). Dans le présent travail, nous avons parlé du principe ergodique : il manifeste une propriété de l'espace et du temps ; nous pouvons dire également qu'il est une expression, ou une conséquence, des lois de degré zéro (invariantes de Lorentz, cf. Guy, 2012 ; l'équation aux dérivées partielles discutée dans la deuxième partie remplit ces propriétés). La loi forte des grands nombres qui dérive du principe ergodique exprime donc elle-même une propriété de l'espace et du temps. Nous entrevoyons ainsi un lien entre une « propriété » du hasard et une propriété de la composition entre espace et temps. La notion de probabilité déborde pourtant *a priori* l'espace et le temps, nous en fait sortir ? Ou plutôt, elle nous les fait embrasser dans leur totalité, dans leur identité de substance (cf. nos travaux), sans exprimer leur séparation dans une dualité (r, t). Il peut paraître ainsi normal de retrouver quelque part que les probabilités en temps sont les mêmes que les probabilités en espace, pour des phénomènes ayant un minimum de régularité. Nous avons commencé notre propos en soulignant la récursivité entre définition du temps et de l'espace et composition des phénomènes entre eux. Il s'agissait alors de phénomènes appréhendés dans une écriture déterministe au sens premier. Si l'on s'intéresse maintenant à la définition de phénomènes par une approche probabiliste, on pourra retrouver une récursivité analogue à celle mentionnée à l'instant. Elle conduira à la limite à exprimer des définitions auto-récursives que nous pouvons formuler pour l'instant, sans souci de rigueur, comme autant de pistes de recherche, de la façon suivante : le hasard c'est ce qui permet de dire qu'une moyenne en temps est égale à une moyenne en espace ; ou : le temps et l'espace, c'est ce qui donne à la loi des grands nombres une latitude pour fonctionner ; ou encore : espace et temps « libres » (en relation avec un premier phénomène implicite, au sens de Guy, 2016) ont *a priori* des propriétés d'uniformité : les choses peuvent apparaître aussi bien ici que là ; autre façon de dire que la scène ainsi présentée exprime ou attend par définition le hasard élémentaire ; espace et temps peuvent être définis par la comparaison de phénomènes probabilistes etc.

*En résumé, que pouvons-nous dire du hasard ?* On en parle à propos de notre compréhension de la chaîne des événements qui bâtissent notre monde et à partir de laquelle nous construisons des modèles prédictifs ; aussi bien qu'à propos de l'économie même des phénomènes qui sous-tendent ces événements, indépendamment de nos modèles. On ne sait définir le hasard de façon substantielle. On ne sait qu'opposer ou composer ce qui est plus

hasardeux, c'est-à-dire qui ouvre, de façon indifférente les unes par rapport aux autres, à un ensemble d'éventualités, et ce qui est moins hasardeux, c'est-à-dire qui donne plus de poids à telle ou telle éventualité (pour, à la limite, n'en retenir qu'une seule). Après Popper, nous n'opposerons pas le hasard à la certitude, celle-ci n'étant jamais acquise une fois pour toutes. Le plus hasardeux est substantifié provisoirement (de façon révisable) comme étalon. Selon le point de vue relationnel qui nous intéresse, nous ne connaissons qu'un lien entre deux paires  $(\omega, p)$  et  $(\bar{\omega}, q)$  d'événements apparents et cachés et leurs probabilités, et nous décidons « arbitrairement » lesquels sont de loi uniforme, désignant ainsi de quel côté chercher le hasard « pur »<sup>32</sup>. Ce pôle est inatteignable, et ne l'est pas davantage que le pôle symétrique d'une prévisibilité parfaite.

## Remerciements

L'auteur remercie tous ceux avec qui il a discuté la matière présentée ici. Avec une mention spéciale pour Xavier Bay qui l'a de plus aidé à reprendre les formulations mathématiques de la deuxième partie. Nous voudrions rendre hommage à Francis Fer pour son invitation, il y a nombre d'années, à réfléchir sur les « quantifications macroscopiques » (observées à l'époque par nous en géologie) et à relier leur étude aux quantifications de la physique microscopique.

---

<sup>32</sup> On parle parfois de « hasard pur » pour un ensemble d'événements de loi uniforme. La définition de S. Wolfram (« le hasard est ce qui échappe à toute régularité », cité dans Postel-Vinay, 2004 ; voir aussi Barreau, 1991) ne semble pas faire bon ménage avec notre approche. Mais ce propos est prononcé dans le cadre d'une pensée substantielle : ces auteurs n'ont pas vu que l'on ne peut parler d'irrégularité sans l'opposer à une moindre irrégularité (ou plus forte régularité)...

## **Bibliographie**

- Barreau H. (1991) Le concept de hasard, in E. Noël éd. : Le hasard aujourd'hui, Le Seuil, 209-219.
- Bernardo J.M. (1996) The concept of exchangeability and its applications, Universitat de Valencia, 7 p.
- Bergson H. (1932) Les deux sources de la morale et de la religion.
- Bertrand J. (1889) Calcul des probabilités, Gauthier Villars, 392 p.
- Carraro L. (2007) Probabilités et statistiques, Ecole n.s. des mines de Saint-Etienne, 116 p.
- Cournot A.
- Dujardin Ph. et Guy B. (2012) Vers une pensée de la relation, échanges entre un politologue et un physicien, Actes des Deuxièmes ateliers sur la contradiction, coordination B. Guy, Presses des mines, Paris, 77-87.
- De Finetti (1937) La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives, Ann. Inst. Henri Poincaré, 7, 1-68.
- De Finetti (1974) Theory of probability, Vol. 1, New York: John Wiley and Sons.
- Guy B. (1993) Mathematical revision of Korzhinskii's theory of infiltration metasomatic zoning, Eur. J. Mineral., 5, 317-339.
- Guy B. (2005) The behavior of solid solutions in geological transport processes: the quantization of rock compositions by fluid-rock interaction, in: Complex inorganic solids, structural, stability and magnetic properties of alloys, edited by P. Turchi, A. Gonis, K. Rajan and A. Meike, Springer, 265-273.
- Guy B. (2011) Penser ensemble le temps et l'espace, *Philosophia Scientiae*, 15, 3, 91-113.
- Guy B. (2012) Degré zéro des lois physiques, considérations heuristiques, HAL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00723183>
- Guy B (2016) Relier la mécanique quantique et la relativité générale ? Réflexions et propositions, deuxième version <hal-00872968> (première version, 2013).
- Kikuchi R. (1966) The path probability method, Supplement of the progress of theoretical physics, 35, 64 p.
- Krivine H. (2016) Petit traité de hasardologie, Cassini, 166 p.
- Laplace P.S. de (1812) Théorie analytique des probabilités, Courcier, Paris, 464 p.
- Lartillot N. (2016) Inférence bayésienne en phylogénie et biologie évolutive, Université Lyon 1, 17 p.

- Lecoze J. (2010) Le passage du macroscopique au microscopique, de la grosse forge à l'entropie statistique, quelles sont les hypothèses inapparents ; Actes des Ateliers sur la contradiction, coordination B. Guy, Presses des mines, Paris, 103-111.
- Lestienne R. (1993) Le hasard créateur, La découverte, Paris, 288 p.
- Lévy P. (1925) Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 352 p.
- Matheron G. (1978) Estimer et choisir, Les cahiers du Centre de morphologie mathématique de Fontainebleau, fascicule 7, Ecole des Mines de Paris, 176 p.
- Noël E. édit. (1991) Le hasard aujourd'hui, Le Seuil, Paris, 240 p.
- Poincaré H. (1912) Calcul des probabilités, 2<sup>e</sup> édition, Gauthier-Villars, Paris, 336 p. Jacques Gabay, Paris, 1987.
- Nau R.F. (2001) De Finetti was right: probability does not exist, Theory and decision, 51, 89-124.
- Postel-Vinay O. (2004) Saisir l'essence du hasard, La Recherche, 381, 32-35.
- Sedqui A. et Guy B. (2001) Echange chromatographique de deux constituants indépendants entre un fluide aqueux et une solution solide à trois pôles; application à la substitution Ca-Fe-Mn des grenats de skarn. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 332, 227-234.

	<b>Evénements élémentaires « apparents » et leurs probabilités</b>	<b>Evénements élémentaires « cachés » et leurs probabilités</b>
<b>Formulation primale</b>	Evénements élémentaires $\omega_i$	Evénements $\bar{\omega}_j$ « substrats » des événements $\omega_i$
	Probabilités $p_i = P(\omega_i)$ de loi $F_E(e)$ (cas de variable aléatoire $E$ de valeurs $e$ en correspondance avec les événements $\omega_i$ )	Probabilités $q_j = P(\bar{\omega}_j)$ Loi uniforme : $q_j = \text{cste} = 1/\text{Card}(\bar{\omega}_j)$ $F_F(f) = f$ (loi uniforme sur $[0, 1]$ )
<b>Formulation duale</b> (échange de ce qui est apparent et caché)	Evénements $\bar{\omega}_j$	Evénements $\omega_i$
	Probabilités $q'_j = P(\bar{\omega}_j)$ De loi $F'_F(f)$ (cas de variable aléatoire)	Probabilités $p'_i = P(\omega_i)$ Loi uniforme $p'_i = \text{cste} = 1/\text{Card}(\omega_i)$ $F'_E(e) = e$ (loi uniforme sur $[0, 1]$ )

**Tableau 1**

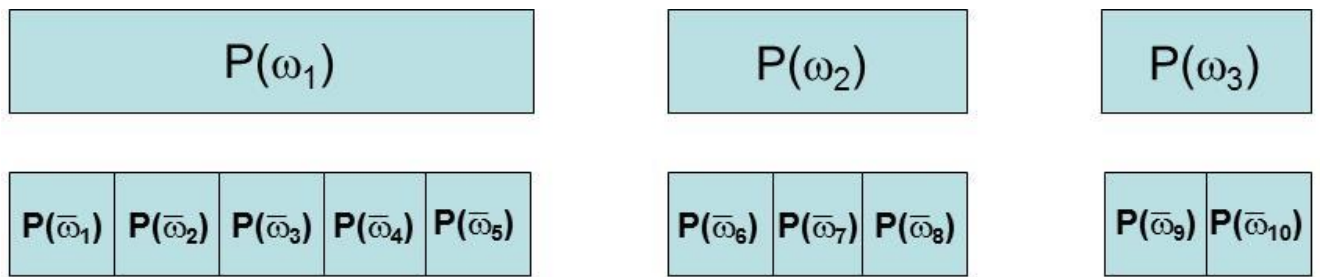
**Structure du problème discuté.**

Les événements et leurs probabilités sont définis en deux paires opposées l'une à l'autre  $(\omega, p)$  vs.  $(\bar{\omega}, q)$  ; dans la formulation primale (premier groupe de lignes), la paire dite apparente est  $(\omega, p)$  et la paire cachée  $(\bar{\omega}, q)$  de loi uniforme. Dans la formulation duale (second groupe de lignes), les rôles des paires sont échangés. Dans le cas de variables aléatoires, on cherche la loi  $F'_F(f)$  si l'on connaît la loi initiale  $F_E(e)$  où les variables aléatoires  $E$  et  $F$ , de valeurs  $e$  et  $f$ , sont mises en correspondance avec les événements  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  de la première formulation.

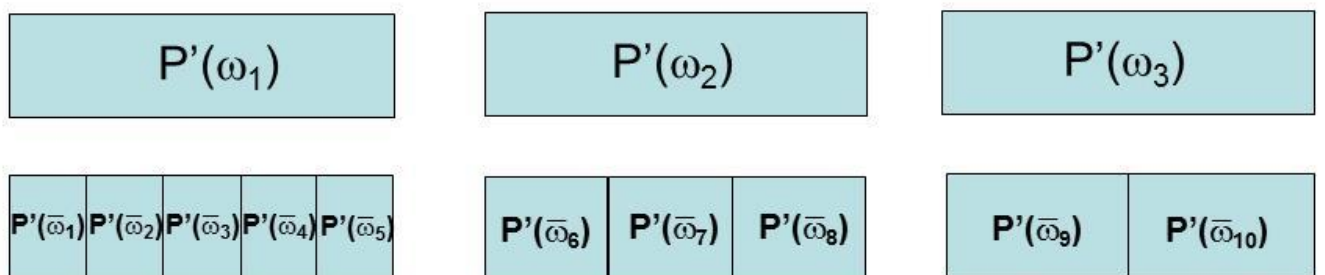
	<b>Événements et probabilités « apparents »</b>	<b>Événements et probabilités « cachés »</b>
<b>Formulation primale</b>	Cas favorables en nombre r	Cas possibles en nombre r + b « substrats » des cas r
	Probabilités $p = \frac{r}{r+b}$	Les « probabilités » des r + b cas possibles sont égales Loi uniforme des arrangements élémentaires
<b>Formulation duale</b> (échange de ce qui est apparent et caché)	Complémentaire des cas favorables, en nombre b	La nouvelle jauge est associée aux anciens cas favorables r
	Probabilités $q' = b/r$	Probabilité uniforme pour les associations contenant r

**Tableau 2**

Structure du problème posé dans le cas de la définition ancienne des probabilités (voir texte).



1a



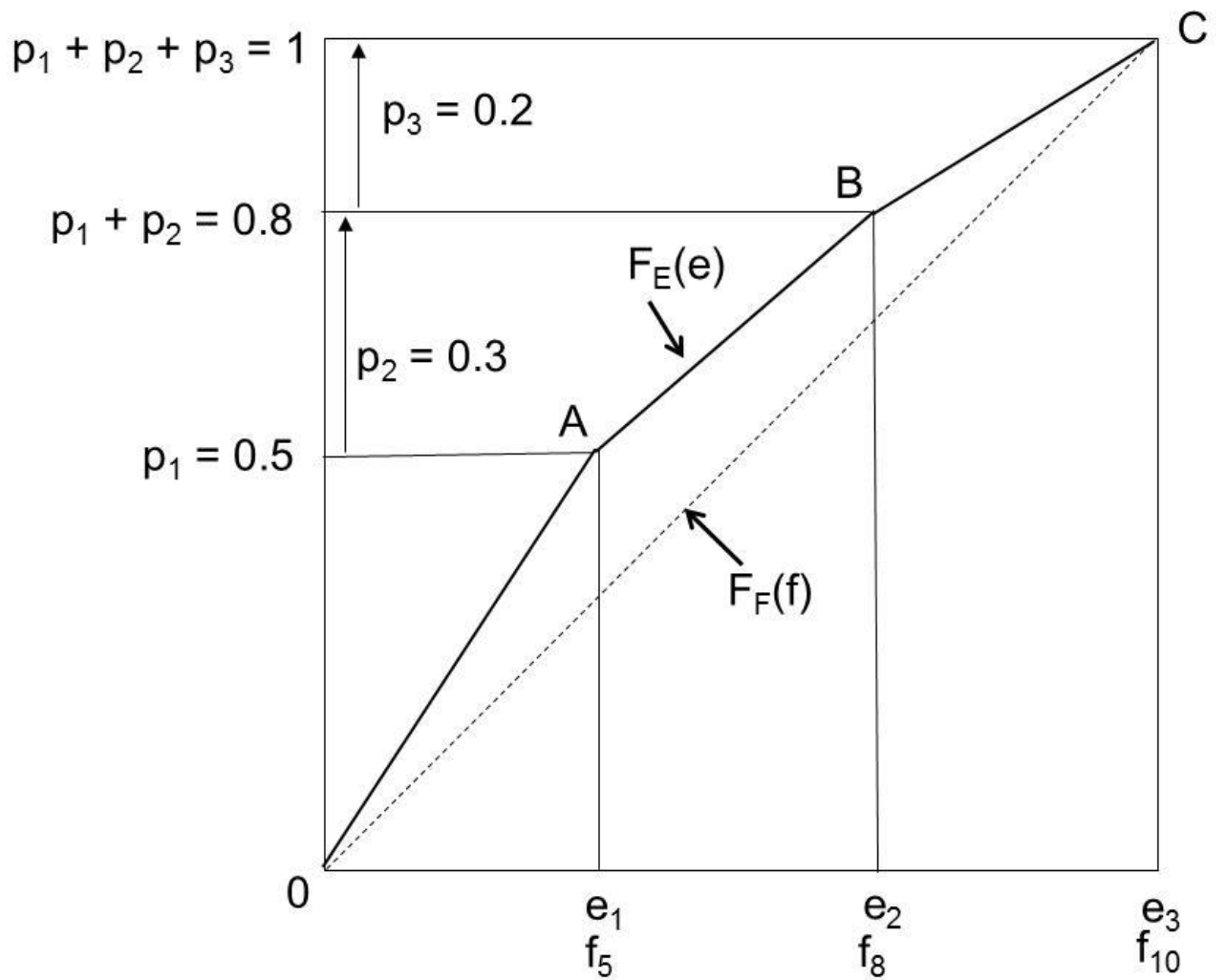
1b

**Figure 1**

Événements apparents et cachés ; formulations primale et duale. Etude d'un exemple.

1a : formulation primale : trois événements « apparents »  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sont distingués (1<sup>ère</sup> ligne) ; leurs tailles sont proportionnelles à leurs probabilités  $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$ . On définit à partir d'eux dix événements cachés, tous sur le même plan, ( $\bar{\omega}_1$  à  $\bar{\omega}_{10}$ ) de tailles égales, c'est-à-dire de probabilités égales (loi uniforme) :  $P(\bar{\omega}_1) = P(\bar{\omega}_2) = \dots = P(\bar{\omega}_{10}) = 1/10$ .

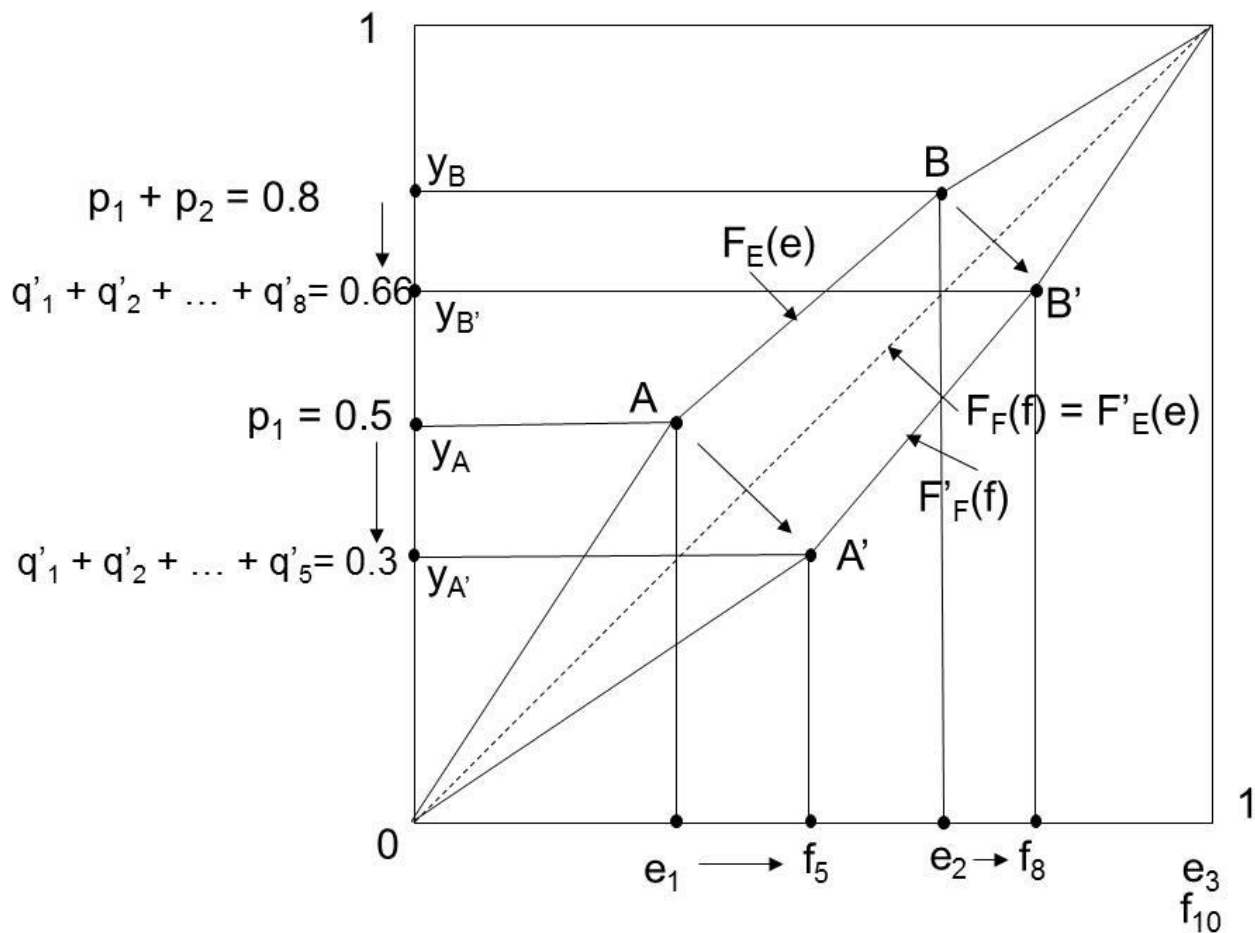
1b : formulation duale : les trois événements initiaux sont pris de probabilités égales (loi uniforme,  $P' = 1/3$ ) ; les événements cachés définis à partir des tailles des événements initiaux changent alors de probabilité et se répartissent en trois groupes de tailles différentes.



**Figure 2**

Fonction de répartition dans le cas d'une variable aléatoire réelle discrète, formulation primale  
 La variable est normée entre 0 et 1, distribuée en trois valeurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ , en correspondance avec l'exemple pris dans la Figure 1. Sa fonction de répartition est désignée par  $F_E(e)$ . Les probabilités des événements apparents, tel  $p_1 = 0.5$  permettent de définir des événements cachés de probabilités uniformes (voir texte). Ainsi de 0 à  $e_1$ , cinq événements  $f_1$  à  $f_5$ , auxquels se rajoutent trois événements  $f_6$  à  $f_8$  pour aller jusqu'à  $e_2$ , puis deux événements  $f_9$  et  $f_{10}$  pour aller jusqu'à  $e_3 = 1$ . L'uniformité de la distribution  $f_1$  à  $f_{10}$  s'exprime par le fait que la fonction de répartition correspondante  $F_F(f)$  dans la formulation primale est la première bissectrice, vérifiant  $F_F(f) = f$ .

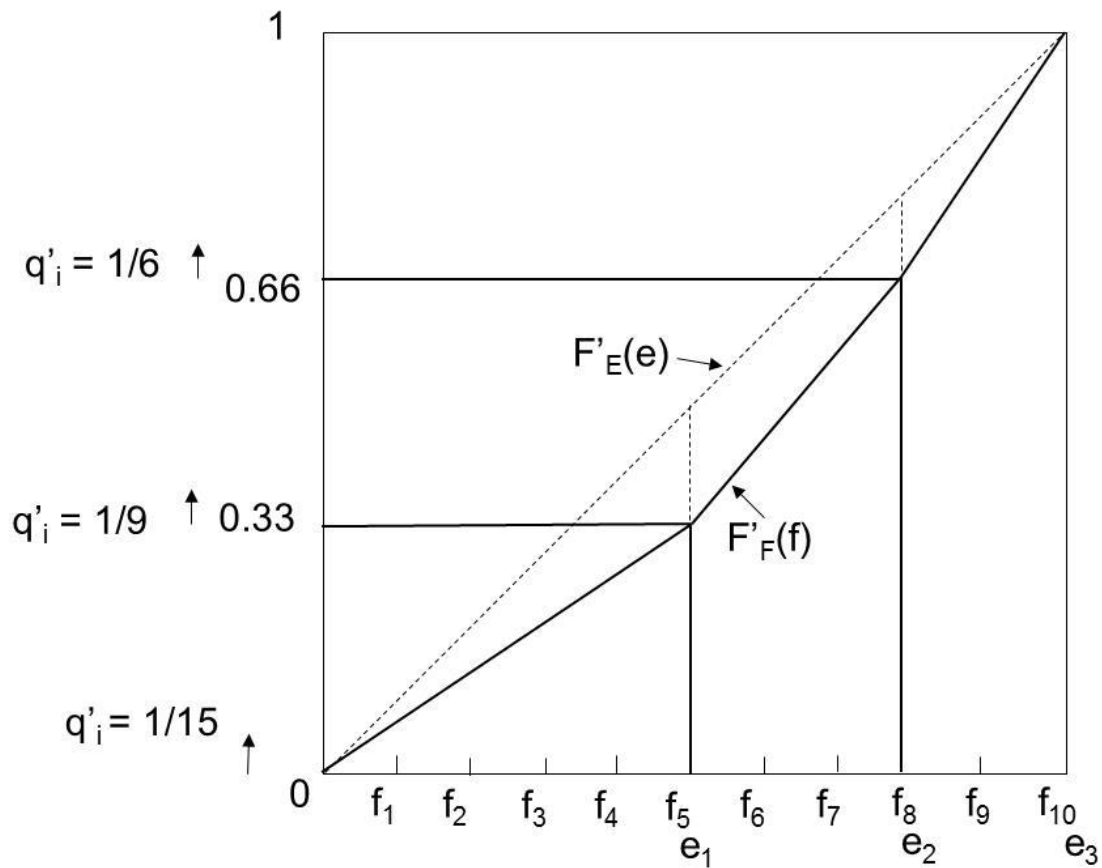




**Figure 3**

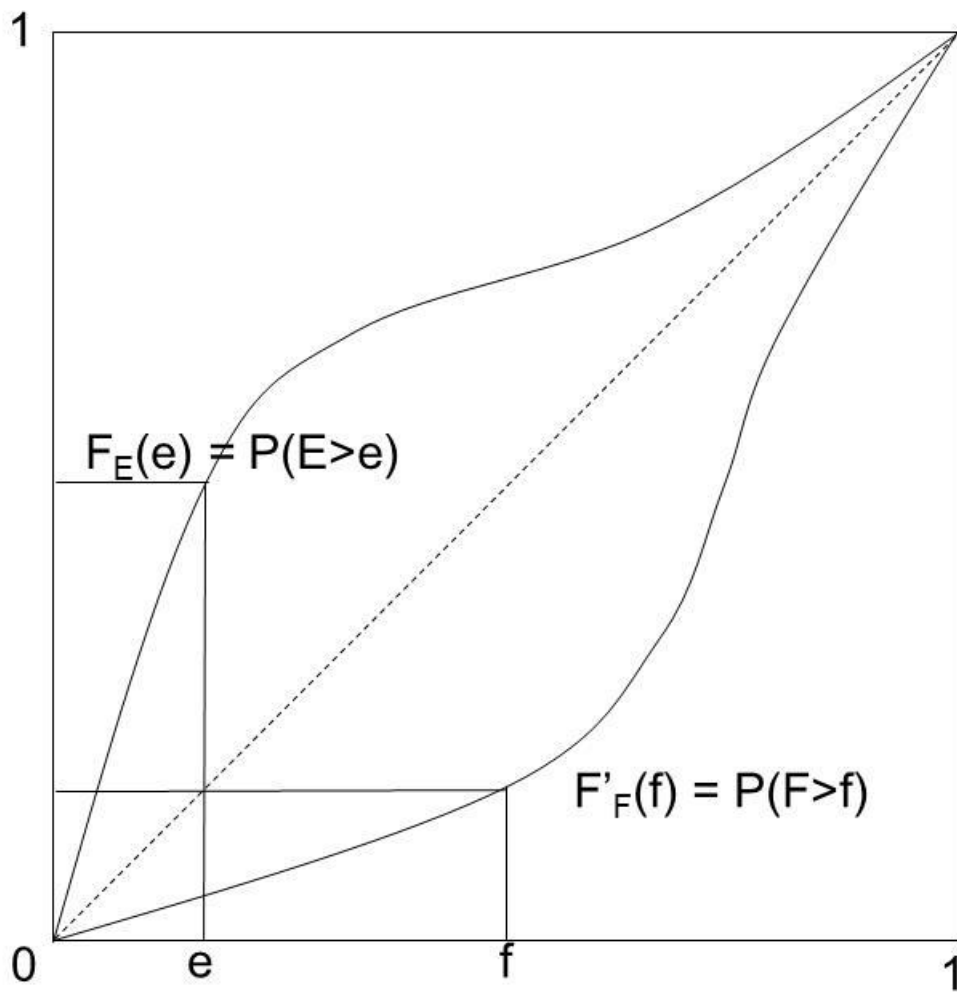
### Fonction de répartition des événements non uniformes de la formulation duale

On échange les événements apparents  $e_i$  et les événements cachés  $f_j$ , dans le cas des variables aléatoires discrètes  $E$  et  $F$ ; les premiers (devenus cachés) ont maintenant une loi de probabilité uniforme. On montre comment obtenir la fonction de répartition  $F'_F(f)$  des nouveaux événements apparents à partir de la loi  $F_E(e)$  des événements apparents initiaux. La construction vérifie des relations du type  $f_5.F'_F(f_5) = e_1.F_E(e_1)$  pour des événements apparents / cachés en correspondance.



**Figure 4**

Fonctions de répartition des événements apparents et cachés dans la formulation duale  
 Résultat de l'opération définie dans la Figure 3, cas de variables aléatoires discrètes. Les événements initiaux apparents  $e_i$  sont maintenant cachés et de loi uniforme  $F'_E(e)$  (première bissectrice) tandis que les événements initiaux cachés sont maintenant apparents de loi non uniforme  $F'_F(f)$ . Pour les événements cachés, on a trois groupes de valeurs des probabilités ( $q' = 1/15, 1/9$  et  $1/6$  respectivement), les changements se faisant aux valeurs de  $F$  égales à 0.33 et 0.66.



**Figure 5**

Fonctions de répartition des deux variables aléatoires continues

Les deux variables  $E$  (événements apparents, formulation primale) et  $F$  (événements initialement cachés, formulation duale) sont normées entre 0 et 1. Les deux fonctions de répartition sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice, leurs densités sont inverses l'une de l'autre.

1 2 3 4 5 6  
 ● ● ○ ○ ○ ○

6! arrangements possibles

1 { 2 3 4 5 6  
 ● ○ ○ ○ ○  
 3 2 4 5 6  
 ○ ● ○ ○ ○  
 4 3 2 5 6  
 ○ ○ ● ○ ○  
 .....

5! arrangements commençant par la boule rouge n°1

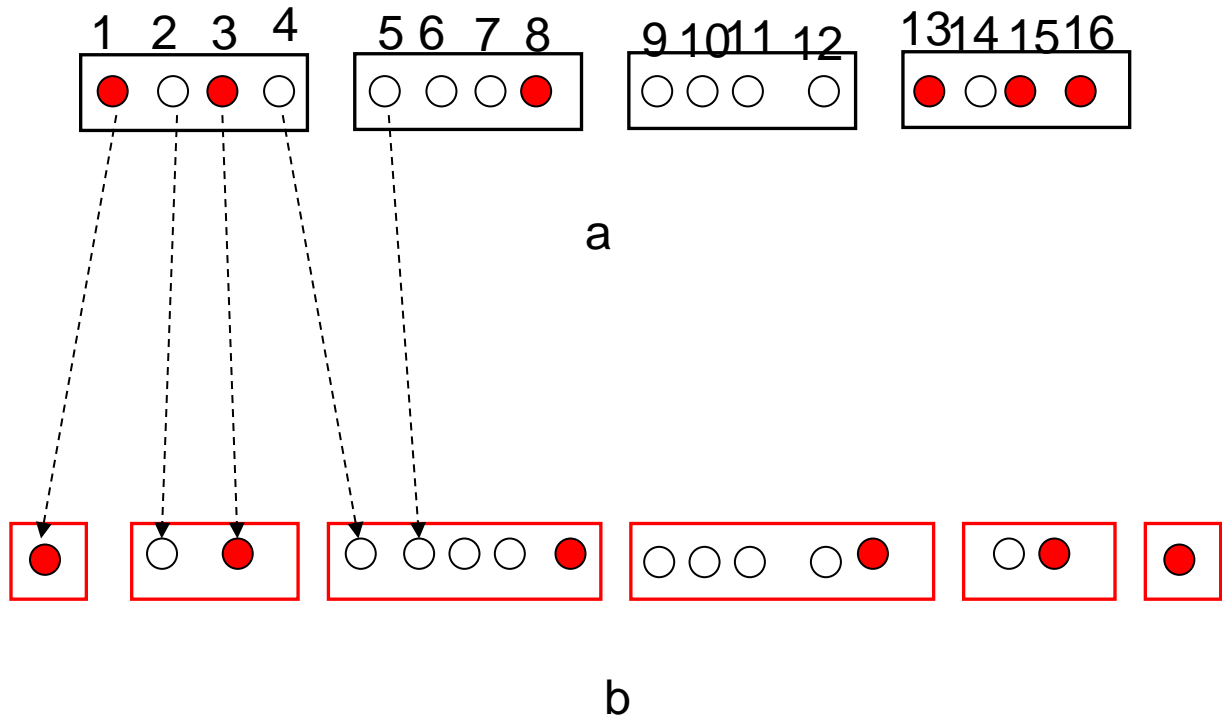
2 { 1 3 4 5 6  
 ● ○ ○ ○ ○  
 3 1 4 5 6  
 ○ ● ○ ○ ○  
 4 3 1 5 6  
 ○ ○ ● ○ ○  
 .....

5! arrangements commençant par la boule rouge n°2

**Figure 6**

Urnes et boules

Définition (ancienne) des probabilités par rapport de nombres d'événements élémentaires (au sens moderne). La probabilité de trouver une boule rouge parmi 6 soit  $2/6 = 1/3$  ici (il y a deux boules rouges) est aussi égale à la proportion du nombre d'arrangements à 5 boules commençant par l'une des deux boules rouges soit  $2 \cdot 5!$  au nombre total d'arrangements  $6!$  (en donnant même poids à chacun des  $6!$  arrangements) :  $2/6 = 1/3 = 2 \cdot 5! / 6!$ .

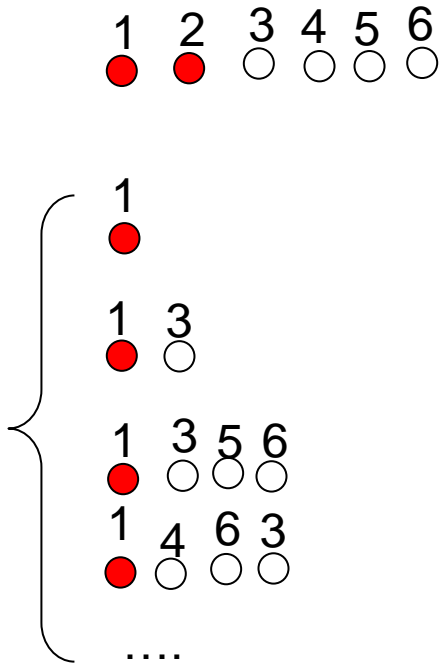


**Figure 7**

### Deux points de vue sur les urnes et les boules

7.a Point de vue « primal » : des urnes de même taille (même nombre total de boules) contiennent des boules rouges et des boules blanches ; on s'intéresse aux boules rouges tirées. On montre ici un arrangement particulier de quatre urnes contenant chacune quatre boules.

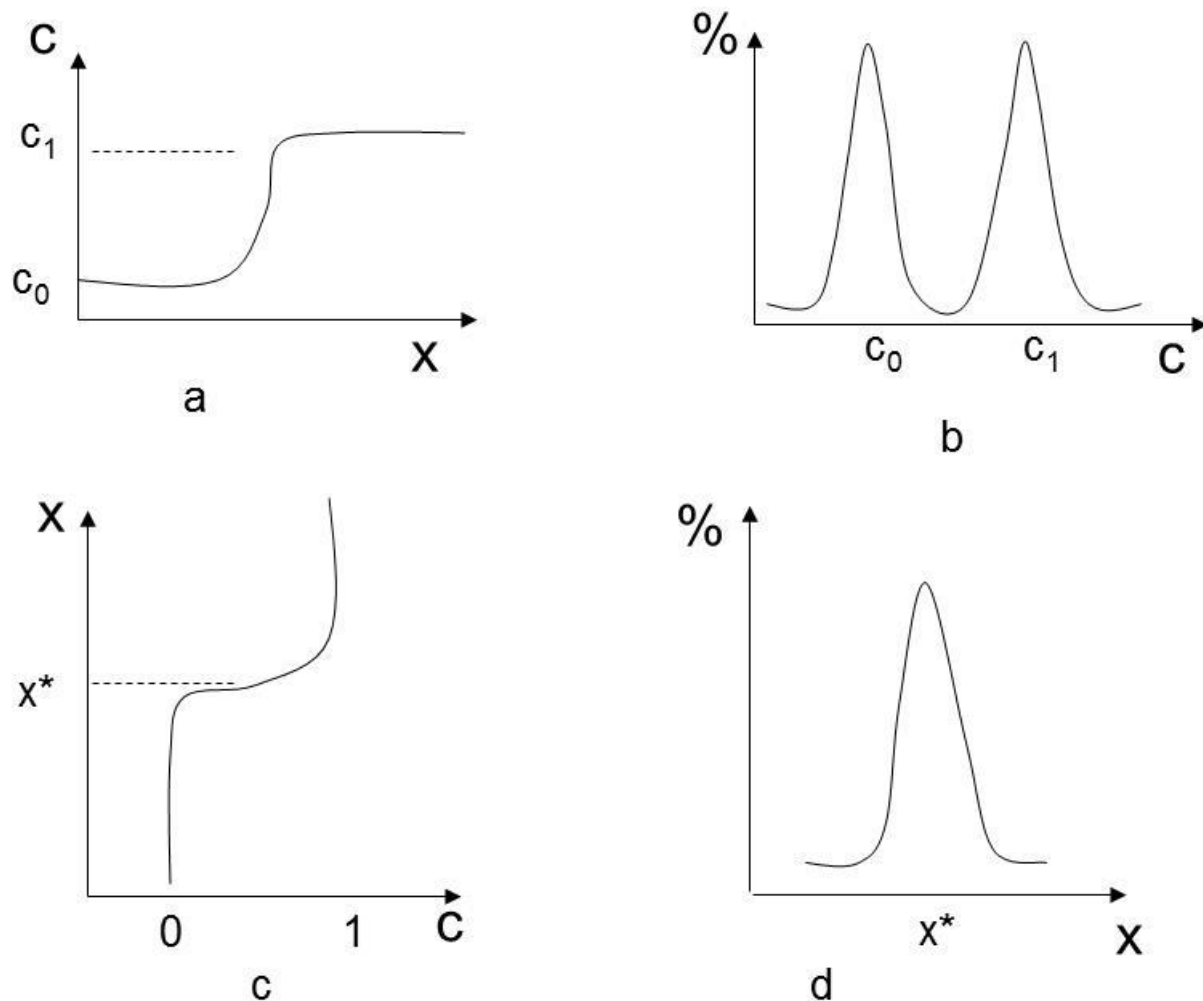
7.b Point de vue dual : de nouvelles urnes sont définies à partir des premières et de leur remplissage ; chaque nouvelle « co-urne », ou « urne rouge », contient une seule boule rouge. On s'intéresse aux boules blanches dans ces nouvelles (co-)urnes, ou encore au nombre de boules dans de telles urnes. On montre ici un arrangement particulier de co-urnes construit à partir de l'arrangement présenté en a. La construction des nouvelles (co-)urnes se fait en examinant les urnes du premier arrangement une par une ; les flèches relient les boules dans leur ancienne disposition, aux mêmes boules dans leur nouvelle disposition (les correspondances sont données pour les cinq premières boules). On s'arrête de construire une co-urne dès que l'on trouve une boule rouge. A ce stade, on ne discute pas les probabilités. Dans la figure 6, les co-urnes commencent par une boule rouge ; dans la figure 7, elles se terminent par une boule rouge.



**Figure 8**

Point de vue dual dans le cas des boules et des urnes de la figure 6.

On groupe maintenant les six boules (numérotées de 1 à 6, avec deux boules rouges et quatre blanches) par arrangements contenant une boule rouge (la jauge uniforme n'est plus un arrangement de 6 boules mais un arrangement contenant une boule rouge). Quelques arrangements de ce type ont été figurés (ils peuvent contenir un nombre variable de boules, et l'ordre du rangement importe toujours). On considère que tous ces arrangements sont équiprobables, et on peut à partir de là calculer des probabilités (au sens « ancien ») en regardant le nombre de tel type d'arrangement rapporté au nombre total de ces arrangements (par exemple probabilité d'avoir des arrangements de 2 boules blanches – toujours rapportées à une rouge-). Cela permet de calculer de nouvelles probabilités  $q'_j$  à partir des anciennes  $p_i$  (les  $p'_i$  étant maintenant toutes égales).



**Figure 9**

9a Champ d'une grandeur physique  $c$  se déployant dans l'espace  $x$  et montrant de façon préférentielle deux niveaux de valeurs  $c_0$  et  $c_1$  (quantification) ; le basculement entre les deux valeurs se fait autour de  $x = x^*$  (Fig. 9c).

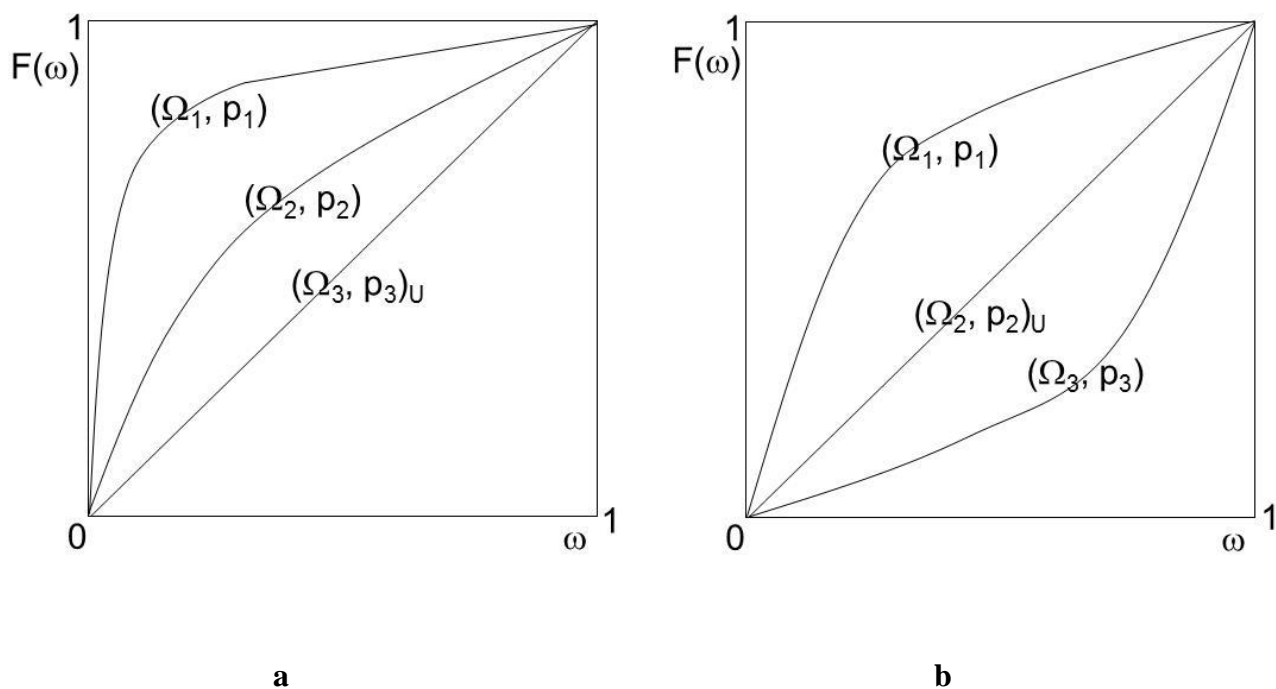
9b La quantification présentée dans la Fig. 9a est illustrée par l'histogramme des valeurs de la grandeur  $c$  : deux pics autour des deux valeurs  $c_0$  et  $c_1$  respectivement.

9c Champ de la grandeur  $x$  en fonction de la grandeur  $c$  (point de vue dual de celui présenté dans la Fig. 9a avec échange des axes de coordonnées) : on déclare que l'espace  $x$  est une fonction de la grandeur  $c$ . Si  $c$  sert maintenant à graduer l'espace, l'espace initial  $x$  est lui aussi quantifié et montre de façon préférentielle une valeur  $x^*$ . On a pris  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$ .

9d La quantification présentée dans la Fig. 9c se voit sur l'histogramme : rapporté à l'évolution continue de  $c$ , l'espace a plus de chance de se situer autour de la valeur  $x^*$ .

Derrière les espaces abstraits sur lesquels on définit les probabilités % se cachent l'espace physique  $x$  pour  $c$  (Fig. 9b) et l'espace  $c$  pour  $x$  (Fig. 9d). Ceci illustre l'aspect relationnel de la quantification pensable seulement dans la comparaison de deux points de vue (elle n'est pas une propriété substantielle). Dans le cas général, une grandeur physique est définie par rapport à un substrat qui est *a priori* implicitement l'espace-temps. On voit sur les exemples précédents que toute courbure d'une fonction  $c(x)$  permet de définir une probabilité non uniforme pour  $c$  (l'uniformité de  $c$  correspondrait à la linéarité  $c = ax + b$ ).

Ces figures ont été présentées dans l'article Guy (2013, 2016)



**Figure 10**

#### Echanges généralisés entre paires (événements, probabilités)

On représente ici les fonctions de répartition  $F(\omega)$  pour diverses associations  $(\Omega, p)$  d'événements et leurs probabilités (cas de variables aléatoires continues). Les associations sont notées  $(\Omega_1, p_1)$ ,  $(\Omega_2, p_2)$  etc. La notation est différente de celle utilisée au début du texte où la suite  $\omega_1, \omega_2$ , etc. renvoie à des événements élémentaires différents appartenant à un même ensemble, alors que, dans la présente notation,  $\Omega_1$  renvoie à lui seul à une série d'événements,  $p_1$  désignant l'ensemble des probabilités correspondantes. Dans la figure 10a (à gauche), les événements  $\Omega_3$ , sont de loi uniforme, ce qui est désigné par la notation  $(\Omega_3, p_3)_U$ . Ce sont eux qui servent de hasard étalon. Dans la figure 10b (à droite), ce sont maintenant les événements  $\Omega_2$  qui servent d'étalons. Les fonctions  $F(\omega_1)$  et  $F(\omega_3)$  sont transformées en conséquence, selon les procédés discutés dans la partie 1.