



**HAL**  
open science

# Trajectoires paramétriques de systèmes physiques préservants le bilan de puissance

Rémy Muller, Thomas Hélie

► **To cite this version:**

Rémy Muller, Thomas Hélie. Trajectoires paramétriques de systèmes physiques préservants le bilan de puissance. 10èmes Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio (JJCAAS 2016), Nov 2016, PARIS, France. . hal-01466999

**HAL Id: hal-01466999**

**<https://hal.science/hal-01466999>**

Submitted on 17 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

# Trajectoires paramétriques de systèmes physiques préservants le bilan de puissance

Rémy Muller, (Thomas Hélie)

Ecole Doctorale EDITE / équipe S3, Laboratoire STMS, IRCAM-CNRS-UPMC

## 1. Systèmes Hamiltoniens à Ports

**Energie** Système physique passif d'énergie totale  $E(t) = \mathcal{H}(\mathbf{x}(t))$

**Dynamique** Expression sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}))\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x})^T\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})$$

avec  $\mathbf{J}(\mathbf{x})^T = -\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x})^T = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \geq 0$

**Bilan de puissance**

$$\dot{E}(t) = \underbrace{\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) \nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})}_{\text{conservatif } (\mathcal{P}=0)}$$

$$- \underbrace{\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})}_{\text{dissipatif } (\mathcal{P}\geq 0)}$$

$$+ \underbrace{\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}}_{\text{externe}}$$

## 2. Objectifs

Trajectoires régulières  $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$  définies par morceaux qui *préservent le bilan de puissance* avec les propriétés suivantes:

**P1** Consistance d'ordre  $s$

$$\mathbf{x}(t_k + h\tau) - \hat{\mathbf{x}}_k(\tau) = \mathcal{O}(h^{s+1})$$

**P2** Classe de régularité  $\mathcal{C}^n$

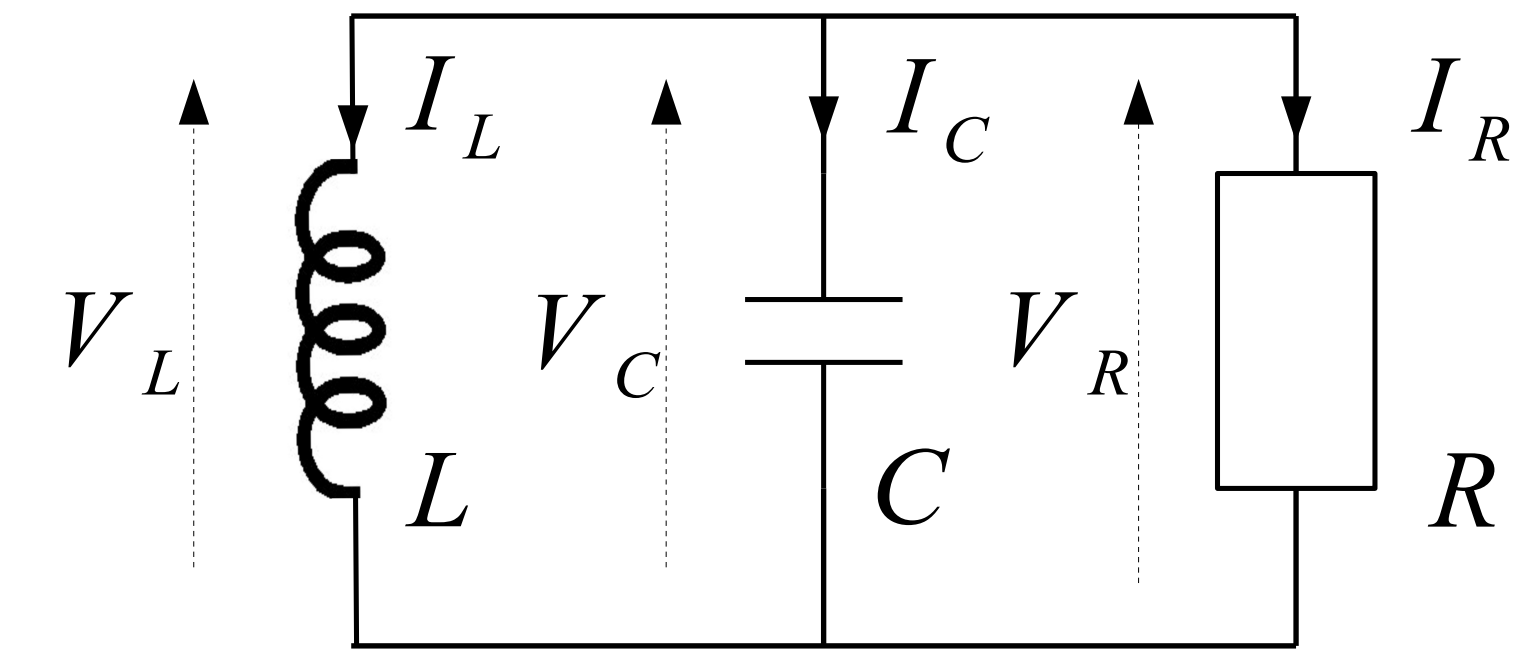
$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}(0) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}(1), i \in \{0 \dots n\}$$

**BP** Bilan de puissance discret satisfait

$$\frac{\Delta\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})|_{\tau=0}^1}{h} = - \int_0^1 \nabla\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}(\hat{\mathbf{x}}) \nabla\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}) d\tau$$

$$+ \int_0^1 \nabla\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

## 3. Circuit RLC



Le circuit de test RLC parallèle et autonome:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \left( \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

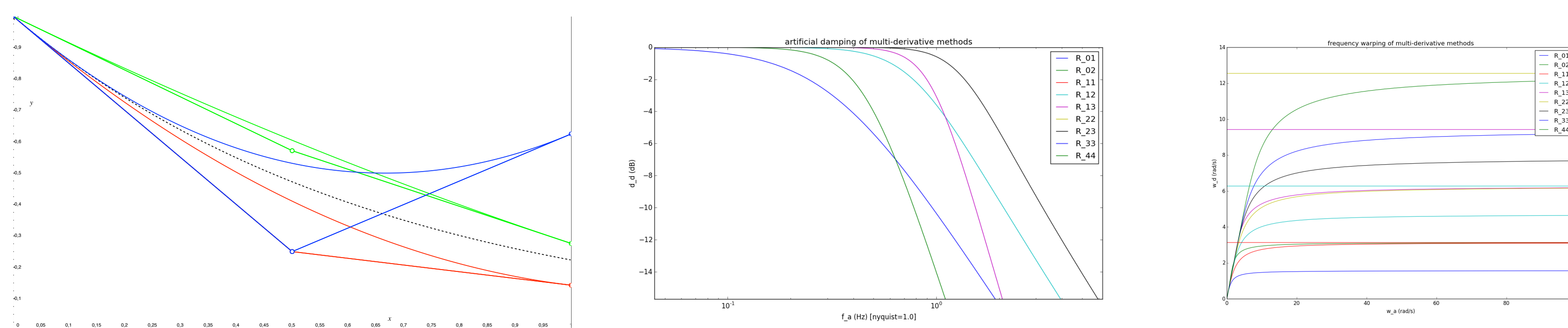
avec  $x = \frac{q}{\sqrt{C}}$ ,  $y = \frac{\phi}{\sqrt{L}}$ ,  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\sigma = \frac{1}{RC}$ ,  $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  suffit à mettre en lumière les problèmes liés à la dissipation non-uniforme

$$\dot{E}(t) = -\sigma x^2(t)$$

## 4. Splines de Bézier (and Hermite-Obreshkov methods)

$$\hat{\mathbf{x}}(\tau) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(\tau) \mathbf{X}_i \quad b_{i,n}(\tau) = \binom{n}{i} (1-\tau)^{n-i} \tau^i \quad \tau \in [0, 1] \quad (\text{polynômes de Bernstein})$$

- Interprétation géométrique *simple* grâce au polygone de contrôle  $\{\mathbf{X}_i\}$
- Calcul des dérivées/intégrales continues par différences/somme finies des  $\{\mathbf{X}_i\}$
- Traitent *simultanément* **P1**, **P2** par *colocation* des dérivées  $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}(\tau_k)$  en  $\tau_k = \{0, 1\}$
- Ce choix régénère *naturellement* les approximations de Padé  $\phi_{p,q}(\lambda) + \mathcal{O}(h^{p+q+1}) = e^\lambda$
- **BP**: degré de liberté supplémentaire (point(s) de colocation variable(s)  $\tau_k \in [0, 1]$ )



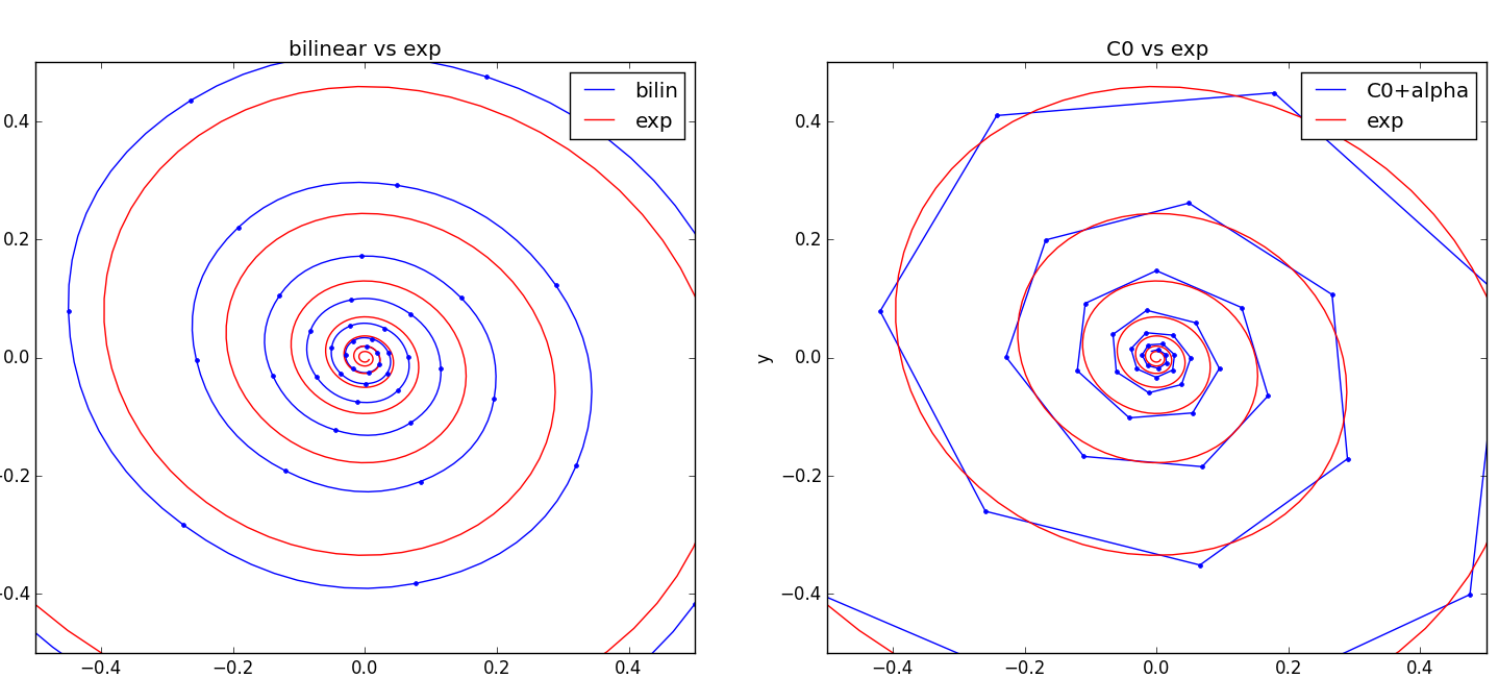
## 5. Modèle Affine $\mathcal{C}^0 + \alpha$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(\tau) = (1-\tau)\hat{\mathbf{x}}_0 + \tau\hat{\mathbf{x}}_1$$

- **P2** Régularité  $\mathcal{C}^0$ :  $\hat{\mathbf{x}}_k(0) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(1)$
- **BP** Colocation  $\hat{\mathbf{x}}'(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$
- **P1** Consistance  $s = 1 \rightarrow 2$  ( $\alpha = \frac{1}{2}$ )
- Solveur itératif Newton  $g(\alpha^*) = 0$

$$g(\alpha) = \Delta\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}) + h \int_0^1 \nabla\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R} \nabla\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}) d\tau$$

- Verouillage de trajectoire dissipative

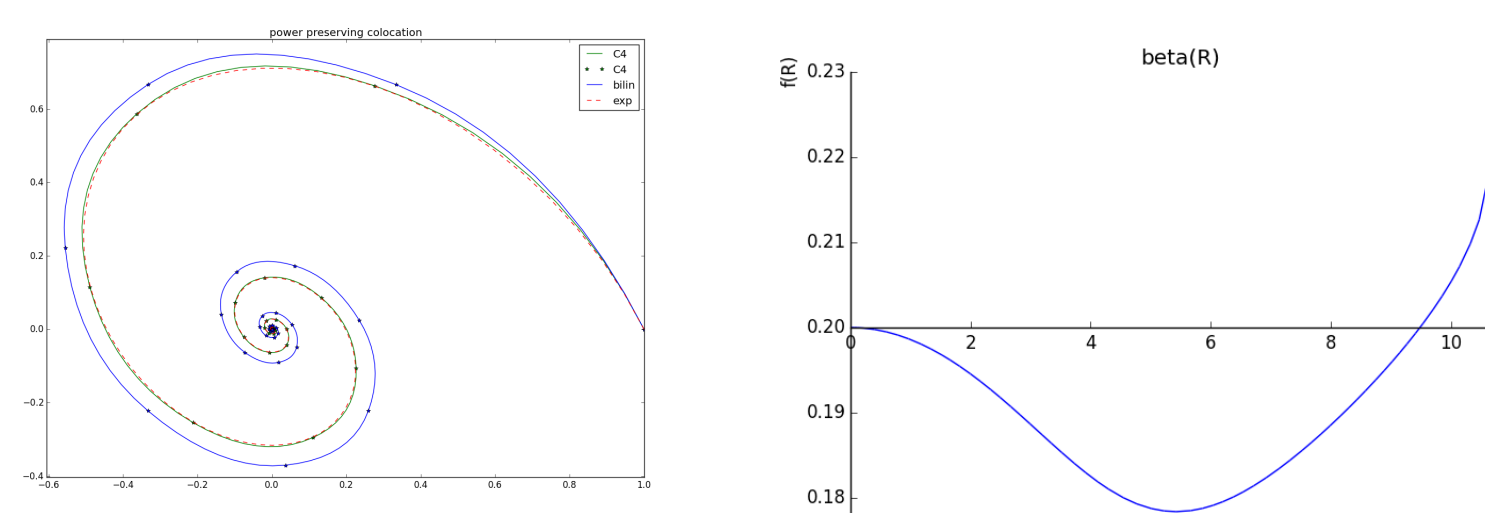


- Fonction de stabilité  $\phi(\lambda) = \frac{1+(1-\alpha)\lambda}{1-\alpha\lambda}$

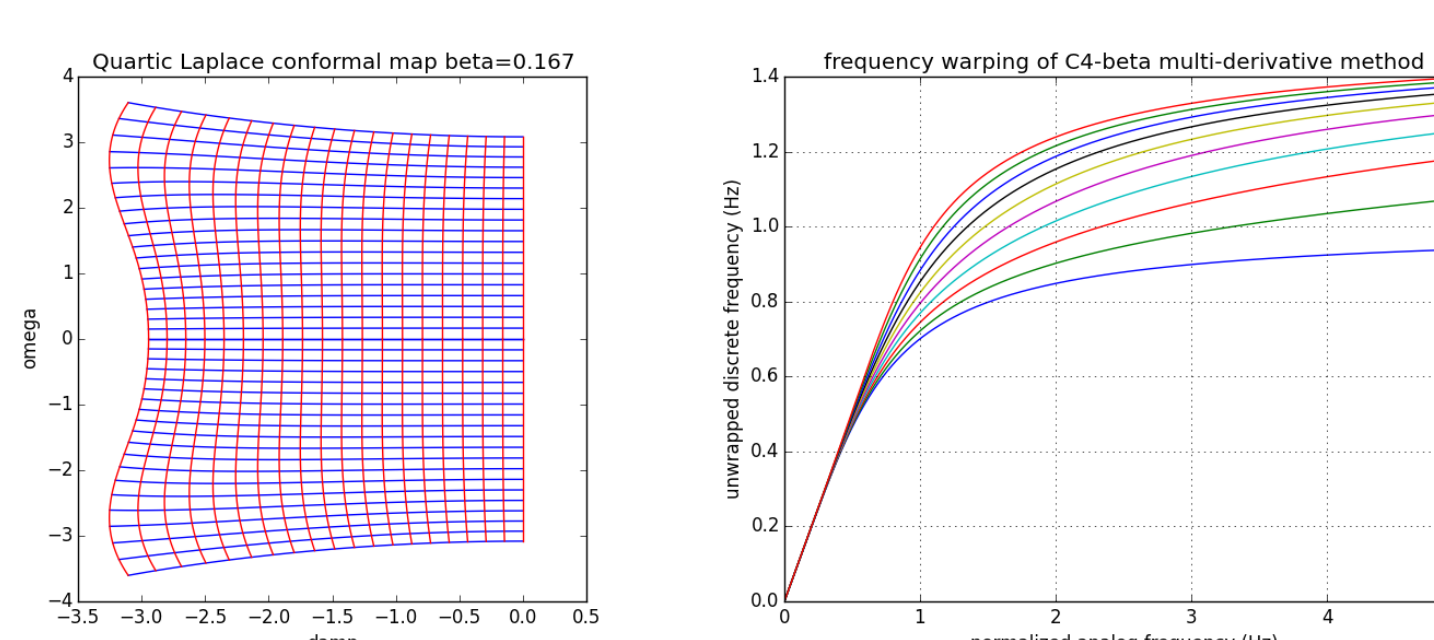
## 6. Modèle Quartic $\mathcal{C}^1 + \beta$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(\tau) = \sum_{i=0}^4 b_{i,4}(\tau) \mathbf{P}_i$$

- **P2** régularité  $\mathcal{C}^1$  colocation  $\tau_{1,2} = \{0, 1\}$
- **BP** Colocation sym.  $\tau_{3,4} = \{\alpha, 1-\alpha\}$
- Paramètre  $\beta = \alpha(1-\alpha)$ ,  $\beta \in [0, \frac{1}{4}]$
- **P1** Consistance  $s = 4 \rightarrow 6$  ( $\beta = \frac{1}{5}$ )
- $\text{dim}=1$ :  $\beta$  analytique  $\frac{|R_{max}|}{h} \approx 10.65$



- $\text{dim}=n$  optimisation  $\beta$  non-linéaire
- $\phi(\lambda) = \frac{1 + \frac{\lambda}{2} + (1-\beta)\frac{\lambda^2}{12} + \beta\frac{\lambda^3}{24}}{1 - \frac{\lambda}{2} + (1-\beta)\frac{\lambda^2}{12} - \beta\frac{\lambda^3}{24}}$  A-stable

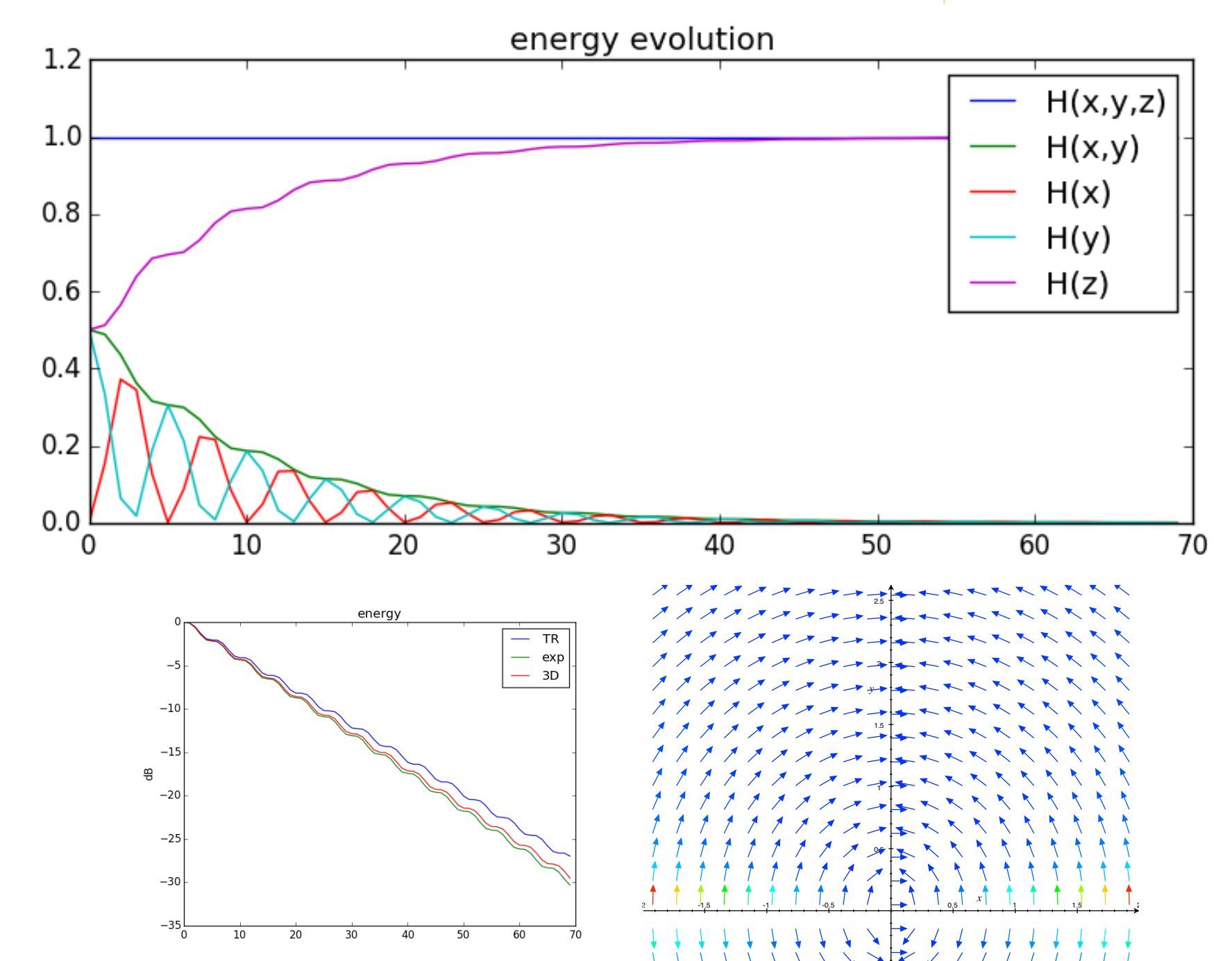
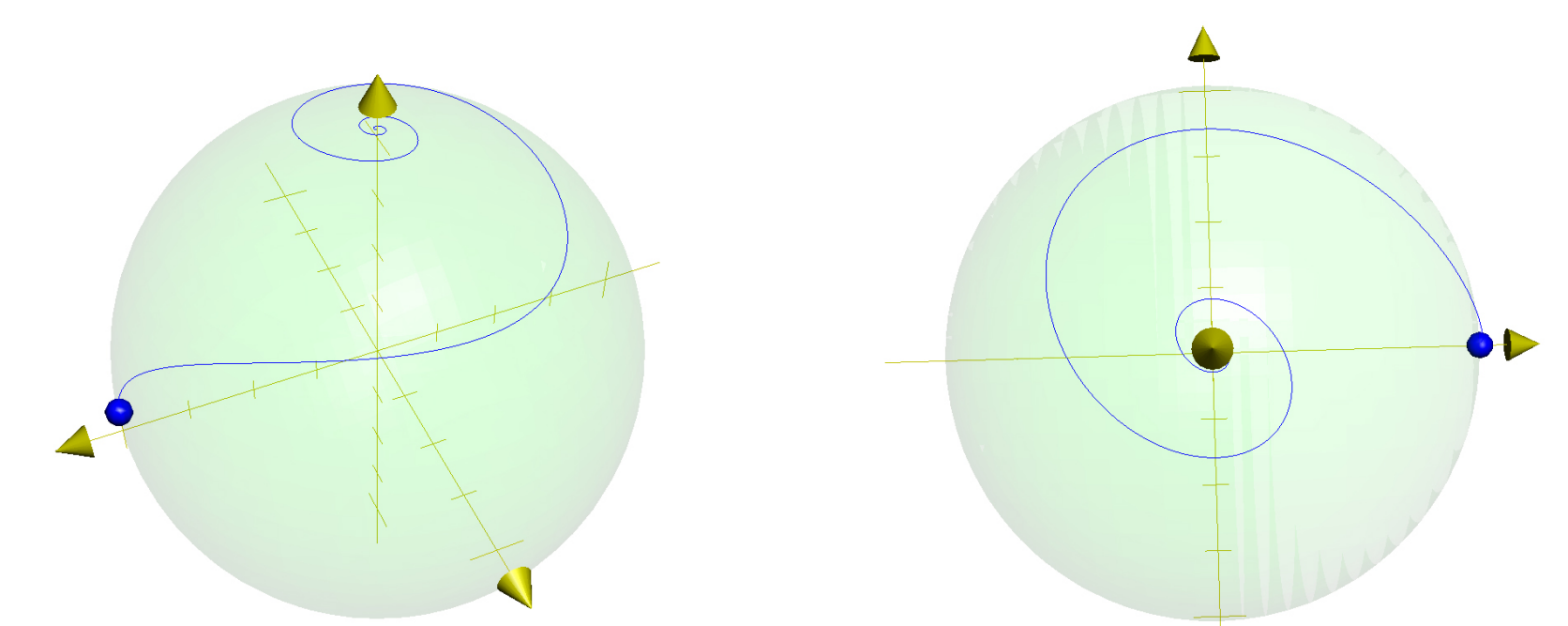


## 7. Irréversibilité

Idée: Simplifier le problème dissipatif en le rendant *conservatif et irréversible* en dimension plus grande.  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, z) = \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(z)$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega & -\sigma \frac{x}{\nabla\mathcal{S}(z)} \\ \omega & 0 & 0 \\ \sigma \frac{x}{\nabla\mathcal{S}(z)} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{x}, z)^T = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, z)} \begin{bmatrix} \nabla\mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \nabla\mathcal{S}(z) \end{bmatrix}$$

- dissipation  $\rightarrow$  modulation  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, z)$
- intégrateurs qui préservent les groupes de Lie (ex:  $SO(3)$ )



## 8. Perspectives

B-splines, E-splines, NURBS. Groupes de Lie. Systèmes Métriptectiques.

## 9. References

- [1] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Springer-Verlag, 2006
- [2] Eberard, Maschke, Van der Schaft. An extension of Hamiltonian systems to the thermodynamic phase space. Reports on Mathematical Physics, 2007