



HAL
open science

Apprendre à calculer en Mésopotamie il y a 4000 ans

Christine Proust

► **To cite this version:**

Christine Proust. Apprendre à calculer en Mésopotamie il y a 4000 ans. Pour la science, 2006, 26, pp.26-29. <hal-01466958>

HAL Id: hal-01466958

<https://hal.science/hal-01466958v1>

Submitted on 13 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Apprendre à calculer en Mésopotamie il y a 4000 ans

Christine Proust (CNRS & Université Paris Diderot)

Les mathématiques mésopotamiennes sont fondées sur une numération sexagésimale positionnelle. Les exercices d'apprentissage trouvés dans les écoles de scribes, parvenus très nombreux jusqu'à nous, permettent de mieux comprendre la nature étonnamment abstraite de ces nombres.



Les civilisations qui se sont épanouies il y a plus de cinq mille ans en Mésopotamie (actuelle Irak) nous ont laissé les plus anciens textes écrits connus. Dès ses origines, l'écriture s'attache à représenter des systèmes numériques et métrologiques élaborés, où la base 60 occupe une place importante mais non exclusive. Ces premiers écrits sont les très lointains ancêtres du système sexagésimal que nous utilisons encore quand nous comptons les secondes et les minutes dans chaque heure.

Figure 1 : Tablette scolaire provenant d'une école de scribes de Nippur, datée du début du IIe millénaire av. notre ère. Elle comporte sur la face (en haut) une liste de signes et sur le revers (en bas) une liste thématique de noms d'animaux.

La civilisation de Sumer, particulièrement brillante au troisième millénaire avant notre ère en Mésopotamie méridionale, est à l'origine d'innovations majeures : un état centralisé, la normalisation des poids et mesures, un vaste réseau d'écoles de scribes. Dans ces écoles, que les Sumériens appelaient « Edubba », mot-à-mot « Maison des tablettes », on apprenait aux futurs scribes l'écriture cunéiforme (c'est-à-dire les signes en forme de coins imprimés dans l'argile), la langue sumérienne et le calcul. C'est dans ce contexte que sont nées les mathématiques mésopotamiennes, dont l'âge d'or se situe dans la période dite « paléo-babylonienne » (début du deuxième millénaire avant notre ère). Ces textes d'érudition abordaient des problèmes du second degré et parfois même du troisième et du quatrième degré, des problèmes linéaires ou quadratiques à plusieurs inconnues, des calculs de volume, des algorithmes numériques complexes.



Figure 2 : Fouille de la ziggourat de Nippur

La cité de Nippur a été fouillée dès la fin du XIXe siècle par une mission archéologique américaine sous la direction scientifique d'Hermann V. Hilprecht. Ce dernier a découvert dans le « quartier des scribes » plusieurs milliers de tablettes scolaires, dont plus de 800 tablettes et fragments mathématiques. C'est H. V. Hilprecht qui a fait connaître au public l'existence des mathématiques mésopotamiennes. Les tablettes de Nippur exhumées lors des campagnes de H. V. Hilprecht sont aujourd'hui conservées dans trois musées : Istanbul, Philadelphie et Jena. La majeure partie de ces tablettes est restée ignorée jusqu'à une date récente et la collection complète est en cours de publication.

Pour comprendre comment les Babyloniens calculaient, la meilleure méthode est de se mettre à l'école des scribes et de suivre leur programme d'enseignement. Comment le connaît-on ? Les apprentis scribes de l'époque paléo-babylonienne nous ont laissé des milliers de « brouillons d'écoliers », exercices écrits sur des tablettes d'argile qu'ils jetaient après usage. On a retrouvé de telles tablettes dans des fondations de maisons, des remblais, des sols, où elles étaient recyclées comme matériau de construction. Parmi les tablettes scolaires, environ 10% sont des exercices de mathématiques.

Nous allons nous concentrer ici sur le calcul numérique, tel qu'il était enseigné dans la plus prestigieuse des écoles de scribes, celle de Nippur.

Les textes scolaires de Nippur

Nippur, située à la frontière entre le « Pays de Sumer », au Sud, et le « Pays d'Akkad », au Nord (à une centaine de kilomètres au sud de Bagdad actuelle) a été pendant toute l'antiquité mésopotamienne une grande capitale culturelle. Réputée pour son tribunal et ses écoles, Nippur est le lieu par excellence de la transmission de l'héritage culturel sumérien. On y a enseigné le sumérien pendant longtemps après que cette langue eut disparu comme langue vivante au profit de l'akkadien, une langue sémitique venue du Nord et de l'Ouest. Les tablettes découvertes dans le « quartier des scribes » de Nippur sont aujourd'hui notre principal accès à la littérature sumérienne.

L'enseignement se déroule en deux phases, reconnaissables à l'aspect et au contenu des tablettes scolaires. Dans un premier niveau « élémentaire », les textes sont énumératifs (listes de signes, de termes sumériens, de proverbes, listes métrologiques, tables de multiplication, etc.). Dans un deuxième niveau « avancé », l'enseignement s'appuie sur des extraits de compositions littéraires, des calculs numériques et des calculs de surface.

Les tablettes les plus utilisées au niveau élémentaire sont partagées, sur leur face, en deux ou trois colonnes. La colonne de gauche contient un court extrait de liste lexicale ou mathématique, soigneusement écrit dans une graphie souvent archaïsante : c'est un modèle de maître. Sur les autres colonnes se trouvent des répliques plus maladroites : ce sont les copies d'élèves. Sur le revers, un texte assez long est écrit de façon plus cursive : c'est la restitution d'un texte appris dans les jours précédents et mémorisé. Par une étude statistique des textes de la face et du revers de ce type de tablette, on peut reconstituer l'ordre dans lequel les listes

Pour découvrir les propriétés de cette numération, examinons la table de 9 (figure 3 ci-dessous).

Figure 3 : table de multiplication par 9 (CBS 8535 <http://cdli.ucla.edu/P263337>).

La tablette se présente en deux colonnes : les multiplicandes dans la colonne de gauche et le résultat de la multiplication par 9 dans la colonne de droite, en écriture sexagésimale positionnelle relative. Le texte complet peut être reconstitué comme suit (noter que le multiplicande 19 s'écrit 20 – 1).



Transcription :

Face :

1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	1.3
8	1.12
9	1.21
10	1.30
11	1.39
12	1.48
13	1.57
14	2.6

Revers :

15	2.15
16	2.24
17	2.33
18	2.42
20 – 1	2.51
20	3
30	4.30
40	6
50	7.30

Par exemple, le produit 9×7 est noté 1.3. Cela signifie 1 soixantaine (1 clou dans la position de gauche) et 3 unités (3 clous dans la position de droite). Mais le dernier chiffre, ici un 3, représente-t-il véritablement des unités ? Poursuivons la lecture de la table : le produit 9×20 est noté 3 et non 3.0 (pour trois soixantaines et zéro unité) comme nous l'écririons dans une numération sexagésimale positionnelle absolue. Ce dernier exemple montre que les scribes n'utilisent pas le chiffre zéro, et que donc leur écriture ne permet pas de déterminer la position absolue des unités, des soixantaines, des soixantièmes, etc. C'est l'équivalent de ce que nous appelons aujourd'hui une écriture en « virgule flottante ». Ecrire $9 \times 20 = 3$ est un peu déroutant, mais cet abus de langage est acceptable dans la mesure où le nombre 3 est considéré non pas comme une quantité déterminée, mais comme un ensemble de valeurs définies à un facteur 60^n près (n entier relatif). Ici le signe « = » signifie « s'écrit comme » ; il devrait en toute rigueur être remplacé par un signe de congruence « \equiv ».

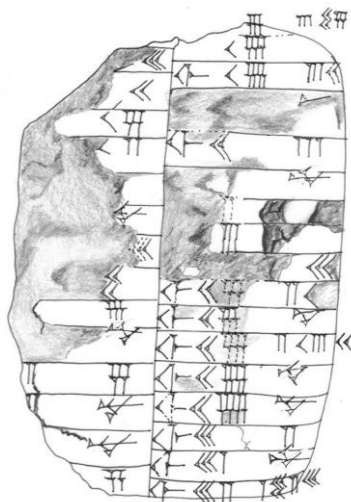
En fait, le signe zéro n'est pas absent des mathématiques cunéiformes. Certes, les scribes mésopotamiens n'ont jamais utilisé de signe pour indiquer une place vide en position finale ou initiale dans le nombre. Mais, à l'époque séleucide (vers 300 avant notre ère) ils ont inventé un signe (𐎶) pour signaler une place vide en position médiane. L'absence de zéro en position finale, loin d'être un défaut de l'écriture cunéiforme, est au contraire un atout qui fait de la numération positionnelle babylonienne un puissant instrument de calcul : les multiplications et divisions se ramènent à du calcul sur des entiers.

Les tables d'inverses

Avant même les tables de multiplication, les élèves de Nippur apprennent la table des inverses. Deux nombres forment une paire d'inverses si leur produit est 1 (l'égalité étant entendue au sens formel précisé ci-dessus). Par exemple, 30 est l'inverse de 2, car $2 \times 30 = 1$. Pour fixer les idées, on peut penser à notre comptage du temps : 1/2 heure, c'est 30 minutes. De même, 15 est l'inverse de 4, car $4 \times 15 = 1$; 7.30 est l'inverse de 8, car $8 \times 7.30 = 1$; 44.26.40 est l'inverse de 1.21, car $1.21 \times 44.26.40 = 1$.

Figure 4 : table d'inverses néo-sumérienne (fin du III^e millénaire avant notre ère)

Pour chacun des nombres compris entre 2 et 60, la table donne son inverse exact en base 60 quand il existe ou un signe de négation quand il n'existe pas. Puis la table indique les nombres qui possèdent un inverse compris entre 60 et 100. On trouvera ici la transcription de la première colonne de la face.



inverse de 2	30
inverse de 3	20
inverse de 4	15
inverse de 5	12
inverse de 6	10
inverse de 7	il n'y en a pas
inverse de 8	7.30
inverse de 9	6.40
inverse de 10	6
inverse de 11	il n'y en a pas
inverse de 12	5
inverse de 13	il n'y en a pas
inverse de 14	il n'y en a pas
inverse de 15	4

Figure 5 : transcription d'une table d'inverses d'époque paléo-babylonienne

Cette table n'indique que les nombres qui possèdent un inverse.

de 1, ses 2/3 sont 40	l'inverse de 24 est 2.30
sa moitié est 30	l'inverse de 25 est 2.2
l'inverse de 2 est 30	l'inverse de 27 est 2.13.20
l'inverse de 3 est 20	l'inverse de 30 est 2
l'inverse de 4 est 15	l'inverse de 32 est 1.52.30
l'inverse de 5 est 12	l'inverse de 36 est 1.40
l'inverse de 6 est 10	l'inverse de 40 est 1.30
l'inverse de 8 est 7.30	l'inverse de 45 est 1.20
l'inverse de 9 est 6.40	l'inverse de 48 est 1.15
l'inverse de 10 est 6	l'inverse de 50 est 1.12
l'inverse de 12 est 5	l'inverse de 54 est 1.6.40
l'inverse de 15 est 4	l'inverse de 1 est 1
l'inverse de 16 est 3.45	l'inverse de 1.4 est 56.15
l'inverse de 18 est 3.20	l'inverse de 1.21 est 44.26.40
l'inverse de 20 est 3	

Les inverses jouent un rôle clé dans le calcul. En effet, ils permettent de ramener les divisions à des multiplications : diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse. Mais dans quel cas peut-on calculer l'inverse en valeur sexagésimale exacte ? La réponse des scribes apparaît en comparant deux tables d'inverses, toutes deux originaires de Nippur, mais de deux époques différentes (voir les figures 4 et 5) : l'une date de la période néo-sumérienne (fin du troisième millénaire) et l'autre de la période paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire). La première table contient deux types d'entrées : celles pour lesquelles il est donné un inverse (par exemple, l'inverse de 6 est 10) ; celles pour lesquelles il n'existe pas d'inverse aux yeux des scribes (par exemple : « l'inverse de 7, il n'y en a pas »). En revanche, les tables d'inverses paléo-babyloniennes ne retiennent plus qu'un seul type de nombres : ceux qui « ont un inverse ».

Précisons ce point visiblement crucial pour les scribes : quels sont les nombres qui « ont un inverse » ? Ce sont les nombres dont l'inverse a un développement sexagésimal fini. Il s'agit donc de nombres qui divisent une puissance de 60 : leurs facteurs premiers sont des diviseurs de 60, c'est-à-dire des 2, des 3 ou des 5. On les appelle des nombres réguliers en base 60. Par exemple, 15 est régulier en base 60 car $15 = 3 \times 5$; mais 14 ne l'est pas car $14 = 2 \times 7$. La méthode de division enseignée dans les écoles impose que le diviseur soit régulier, ce qui explique que les nombres non réguliers aient été expulsés des tables numériques, et des exercices scolaires en général. Cette restriction du champ numérique aux nombres réguliers montre la place centrale occupée par les opérations de multiplication et d'inversion dans le calcul savant babylonien et dans les apprentissages.

Initiation au calcul

Après l'apprentissage des tables, on passe au niveau avancé, et à l'initiation au calcul proprement dit. Les exercices de calcul numérique (multiplications et inversions) ne font intervenir que des nombres positionnels et ne mentionnent aucune unité de mesure. Pour opérer sur des grandeurs métrologiques (par exemple calculer des surfaces ou des volumes), les scribes convertissent d'abord les mesures en nombres positionnels, effectuent leurs calculs, puis convertissent de nouveau le résultat en nombres associés à des unités ; ces conversions sont réalisées grâce aux tables métrologiques.

Montrons maintenant comment le couple multiplication / inversion est utilisé dans une méthode de factorisation qui permet notamment de calculer des inverses, des racines carrées ou cubiques. Considérons par exemple une tablette de provenance inconnue et conservée à Philadelphie (de numéro d'inventaire CBS 1215), dont on a trouvé de nombreux extraits à Nippur. Elle contient une liste de calculs d'inverses. La tablette est divisée en 22 sections, chacune comportant deux colonnes. L'entrée de la première section est 2.5 ; l'entrée de la deuxième est 4.10, soit le double de la précédente ; l'entrée de la troisième est 8.20, etc. Dans chaque section, un algorithme permet de calculer l'inverse de l'entrée ; puis l'algorithme est appliqué à ce résultat, conduisant à l'inverse de l'inverse, c'est-à-dire au nombre initial : le premier et le dernier nombre de chaque case sont identiques.

Examinons l'algorithme dans le cas de la section 1, dont voici la transcription :

2.5	12
25	2.24
28.48	1.15
36	1.40
2.5	

L'entrée 2.5 est divisible par 5, car la divisibilité par un nombre régulier se voit sur les derniers chiffres ; l'inverse de 5 est 12 : on inscrit 12 face à l'entrée, à droite. La division de 2.5 par 5 (soit sa multiplication par 12) donne 25 : on inscrit 25 sous l'entrée, à gauche. L'inverse de 25 est 2.24 : on inscrit 2.24 face à 25, à droite. On a donc décomposé 2.5 en un produit de nombres dont on connaît les inverses par les tables : $2.5 = 5 \times 25$. Notons que c'est le produit des deux nombres inscrits à gauche. Comme l'inverse d'un produit est le produit des inverses, on a : $(\text{inverse de } 2.5) = (\text{inverse de } 5) \times (\text{inverse de } 25) = 12 \times 2.24 = 28.48$.

Autrement dit, le résultat est le produit des deux nombres inscrits à droite. Ainsi la disposition des nombres dans le calcul fait partie intégrante du calcul lui-même.

On soumet ensuite le résultat 28.48 au même algorithme : un diviseur est 48, dont l'inverse vaut 1.15 (posé à droite). La division de 28.48 par 48 (soit la multiplication par 1.15) donne 36 (posé à gauche), dont l'inverse vaut 1.40 (posé à droite). Alors l'inverse de 28.48 est la multiplication des deux nombres posés à droite : 1.15×1.40 , soit 2.5. On retrouve bien le nombre de l'entrée, puisque l'inverse de l'inverse est une opération neutre.

La section n°2 applique la même méthode à l'entrée 4.10, double de la précédente. L'inverse obtenu vaut 12.24, soit la moitié de l'inverse de la section 1. On s'y attendait, puisqu'en doublant un nombre, on divise son inverse par 2. Dans les sections suivantes, lorsque les nombres à inverser sont de grande taille, on voit apparaître un procédé itératif.

Ces deux caractéristiques, résultat connu d'avance et algorithme en boucle, montrent que le texte n'a pas pour but de produire des résultats nouveaux, mais d'utiliser une méthode, la factorisation, et d'en tester la validité. Les mêmes caractéristiques apparaissent dans une autre tablette, dont le but consiste à appliquer la méthode de factorisation à la recherche des racines carrées. On utilise alors la propriété : « la racine d'un produit est égale au produit des racines ». Le calcul d'un carré est suivi de l'opération réciproque, le calcul de la racine carrée, si bien que le résultat final est, là aussi, identique à la donnée initiale.

L'analyse des tablettes scolaires mathématiques montre comment le calcul mésopotamien s'est développé de façon autonome, hors de tout contexte métrologique ou pratique, donnant lieu à l'invention d'algorithmes numériques itératifs élaborés appuyés sur une numération positionnelle abstraite.

Bibliographie

Glassner, J.-J., *Écrire à Sumer. L'invention du cunéiforme*, Seuil, collec. *L'Univers Historique*, Paris, 2000.

Hilprecht, H. V., *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, in *Babylonian Expedition*, vol. 20-1, Philadelphie, 1906.

Proust, C., *La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul*, in *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, p. 1001-1011, 2001.

Proust, C., *Textes mathématiques de Nippur (Mésopotamie, début du IIe millénaire avant notre ère) : reconstitution du cursus scolaire*, Thèse de doctorat (Université Paris 7), 2005.

Thureau-Dangin, F., *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Geuthner, Paris, 1932.