HAL open science

Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local

Laurent Fargues

▶ **To cite this version:**

Laurent Fargues. Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2020, 53 (1), pp.89-124. 10.24033/asens.2418 . hal-01465483v3

HAL Id: hal-01465483

https://hal.science/hal-01465483v3

Submitted on 26 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SIMPLE CONNEXITÉ DES FIBRES D'UNE APPLICATION D'ABEL-JACOBI ET CORPS DE CLASSES LOCAL

par

Laurent Fargues

Théorème[section]
[theo]Proposition
[theo]Corollaire
[theo]Définition [theo]Exemple [theo]Conjecture
[theo]Remarque

Résumé. — On donne une démonstration du type Langlands géométrique de la conjecture de géométrisation de la correspondance de Langlands locale de l'auteur pour GL_1. Pour cela on étudie en détails un certain morphisme d'Abel-Jacobi dont on montre que c'est une fibration pro-étale localement triviale en diamants simplement connexes en grand degré . Ces diamants sont des espaces de Banach-Colmez absolus épointés que l'on étudie en détails.

Table des matières

Introduction 1
1. Rappels sur le cas « classique » 3
2. Le diamant de Hilbert Div^d 5
3. $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et représentations du groupe de Weil 13
4. Construction du symétrisé d'un système local abélien sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 15
5. Énoncé du théorème et application au corps de classes 18
6. Le cas d'égales caractéristiques 20
7. Le cas d'inégales caractéristiques 22
Références 28

Introduction

Cet article concerne le cas abélien de la conjecture de type Langlands géométrique pour la correspondance de Langlands locale formulée par l'auteur ([**?**], [**?**]). Rappelons que cette conjecture affirme que si E est un corps local, G un groupe réductif sur E et

$$\varphi : W_E \to {}^L G$$

un paramètre de Langlands discret on devrait pouvoir construire un faisceau pervers $\mathscr{F}_\varphi$ sur le champ

$$\mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$$

des G-fibrés sur la courbe que l'on a introduite dans notre travail en commun avec Jean-Marc Fontaine ([**?**]). Ce faisceau pervers devrait satisfaire de nombreuses propriétés et en particulier construire les

L'auteur a bénéficié du support du projet ANR-14-CE25 "PerCoLaTor" et du projet ERC Advanced grant 742608 "GeoLocLang".
()2010 Mathematics Subject Classification. Primary : 11G18 ; Secondary : 14G20.

L-paquets locaux munis de leur structure interne (i.e. une paramétrisation de chaque élément du L-paquet) associés à φ pour toute forme intérieure étendue pure de G. Le champ Bun_G lui est un champ perfectoïde pour la topologie pro-étale de Scholze. C'est un objet qui vit dans le monde des diamants introduits par Scholze ([**?**], [**?**]).

Lorsque $G = \mathrm{GL}_1$ on peut déduire la conjecture de la théorie du corps de classes local. Néanmoins on cherche une preuve de ce résultat indépendante du type corps de classes géométrique. Si X est une courbe propre et lisse le point principal dans la construction du faisceau automorphe associé à un système local sur X est le fait que pour $d \gg 0$ le morphisme d'Abel-Jacobi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Div}^d_X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^d_X \\ D & \longmapsto & \mathcal{O}(D) \end{array}$$

est une fibration localement triviale en variétés algébriques simplement connexes (des espaces projectifs). Dans cet article on démontre un résultat analogue dans le cadre de notre conjecture et on en déduit la conjecture pour GL_1 indépendamment de la théorie du corps de classes local. Cela redémontre en particulier celle-ci sous la forme du théorème de Kronecker-Weber local.

Voici une description plus détaillée des principaux résultats. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de notre corps local E. On définit dans la section 2 l'espace de modules des diviseurs effectifs de degré $d > 0$ sur la courbe

$$\mathrm{Div}^d$$

dont on démontre que c'est un diamant. Plus précisément (prop. 2.13)

$$\mathrm{Div}^1 = \mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

ce qui traduit le fait que les débasculements d'un $\mathbb{F}_q$-espace perfectoïde S sur E donnent des diviseurs de Cartier de degré 1 sur la courbe X_S. On montre de plus (prop. 2.16) que pour $d > 0$

$$\mathrm{Div}^d = (\mathrm{Div}^1)^d/\mathfrak{S}_d$$

comme quotient pro-étale. Il s'agit d'une nouvelle application de notre résultat de factorisation des éléments primitifs obtenu avec Fontaine qui est la clef de voûte de [**?**]. Le diamant Div^d admet une description alternative comme espace projectif sur un espace de Banach-Colmez absolu $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$,

$$\mathrm{Div}^d = \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$$

via lequel le morphisme d'Abel-Jacobi en degré d est donné par

$$\mathrm{AJ}^d : \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times \longrightarrow [\bullet/\underline{E}^\times].$$

Ces espaces $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ ne sont pas des espaces de Banach-Colmez usuels, ce ne sont pas des diamants mais des « diamants absolus » i.e. $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est relativement représentable en diamants mais $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ n'en n'est pas un (cf. sec. 7.1). Il est remarquable qu'une fois épointés ces diamants absolus deviennent des diamants (prop. 2.17). On constate donc que AJ^d est une fibration pro-étale localement triviale de fibre $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$. Le résultat principal de ce texte, qui est nettement plus fort que ce dont nous avons besoin afin de développer le programme de Langlands géométrique pour GL_1, est alors le suivant (théo. 5.2).

Théorème. — *Pour $d > 1$, resp. $d > 2$ si $E|\mathbb{Q}_p$, le diamant $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}$ est simplement connexe au sens où tout revêtement étale fini connexe est trivial.*

La preuve de ce résultat est donnée dans les sections 6 et 7. Le cas d'égales caractéristiques est particulièrement plus simple puisqu'alors le diamant $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}$ est un espace perfectoïde. Cependant l'analyse de sa preuve est particulièrement éclairante puisque celle-ci repose en définitive sur le théorème de pureté de Zariski-Nagata. La preuve que nous donnons dans le cas d'inégales caractéristiques consiste essentiellement à démontrer un tel résultat de pureté pour l'inclusion

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$$

et à dévisser ce résultat en un résultat de pureté en géométrie rigide « usuelle » (théo. 7.6).

Une fois ce résultat établi le corps de classes géométrique se décrit de la façon suivante. On constate (sec. 3) que

$$\ll \ \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = W_E \ \gg$$

du moins du point de vue dual des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux (les guillemets sont là pour signifier que cela n'a pas vraiment de sens puisqu'on ne dispose pas à priori d'un bonne théorie du π_1 dans ce contexte) i.e. les L-paramètres ℓ-adiques correspondent aux systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. Partant d'un tel paramètre abélien $\varphi : W_E \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, si $\mathscr{E}_\varphi^{(1)}$ désigne le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ associé, on construit son symétrisé pour $d > 0$

$$\mathscr{E}_\varphi^{(d)} = \left(\Sigma^d_* \mathscr{E}_\varphi^{(1)\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

dans la section 4 où $\Sigma^d : (\mathrm{Div}^1)^d \to \mathrm{Div}^d$ est le morphisme somme de d-diviseurs de degré 1. Par application du théorème précédent celui-ci descend le long de AJ^d en $\mathscr{F}_\varphi^{(d)}$ sur $\mathscr{P}ic^d$. Il s'agit du faisceau $\mathscr{F}_{\varphi|\mathscr{P}ic^d}$ de notre conjecture. Il s'étend alors automatiquement en tous les degrés en utilisant les structures monoïdales de Div et $\mathscr{P}ic$. Cela prouve que $\mathscr{F}_\varphi^{(1)}$ descend le long de AJ^1 et donc que φ se factorise via l'application de réciprocité d'Artin (prop. 3.3).

Remerciements : J'aimerais remercier Peter Scholze et Arthur-César Le Bras pour des discussions sur le sujet. Je remercie également Werner Lütkebohmert de m'avoir expliqué ses résultats d'extension de faisceaux cohérents en géométrie rigide et Ofer Gabber pour des discussions concernant la section 7.4.

1. Rappels sur le cas « classique »

Soit X une courbe propre et lisse sur un corps k algébriquement clos. Pour $d \geq 1$ on note

$$\mathrm{Div}^d = X^d/\mathfrak{S}_d$$

le schéma de Hilbert des diviseurs de Cartier effectifs de degré d sur X. On note également

$$\mathscr{P}ic = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{P}ic^d$$

le champ de Picard de X et

$$\mathrm{Pic} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^d$$

le schéma de Picard de X qui est l'espace de modules grossier de $\mathscr{P}ic$, Pic^0 étant la Jacobienne de X. Le morphisme

$$\mathscr{P}ic \longrightarrow \mathrm{Pic}$$

est une $\mathbb{G}_m$-gerbe qui est scindée après le choix d'un point k-rationnel, $\mathscr{P}ic \simeq \left[\mathrm{Pic}/\mathbb{G}_m\right]$.

Soit maintenant $\mathscr{E}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local étale de rang 1 sur X. Dans ce cadre là le programme de Langlands géométrique s'attache à construire un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local $\mathscr{F}$ de rang 1 sur Pic satisfaisant certaines propriétés. Voici les étapes de sa construction ([**?**] sec. 2).

La première étape consiste à former le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur Div^d, $d > 0$,

$$\mathscr{E}^{(d)} = \left(\Sigma^d_* \mathscr{E}^{\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

où $\Sigma^d : (\mathrm{Div}^1)^d \to \mathrm{Div}^d$ est le morphisme somme de d diviseurs de degré 1. C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 (en toute généralité, si $\mathscr{E}$ n'est plus de rang 1, il s'agit d'un faisceau pervers) qui correspond à $\mathscr{E}$ via l'égalité $\pi_1(X^d/\mathfrak{S}_d) = \pi_1(X)^{ab}$ lorsque $d > 1$.

La seconde étape est la suivante. Pour $d > 0$ il y a un morphisme d'Abel-Jacobi

$$\begin{array}{rcl} AJ^d : \mathrm{Div}^d & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^d \\ D & \longmapsto & [\mathcal{O}(D)]. \end{array}$$

Supposons $d > 2g-2$, g étant le genre de X. Si S est un k-schéma de type fini et $\mathscr{L}$ un fibré vectoriel sur $X \times S$ fibre à fibre sur S de degré d alors d'après le théorème de Riemann Roch $R^1 f_* \mathscr{L} = 0$ où $f : X \times S \to S$. Le complexe parfait $Rf_*\mathscr{L}$ est donc un fibré vectoriel égal à $f_*\mathscr{L}$. Cette construction définit un fibré vectoriel $\mathcal{M}$ sur $\mathscr{P}ic^d$ et Div^d s'identifie à l'espace projectif sur $\mathcal{M}$. Plus précisément, $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ descend le long de $\mathscr{P}ic^d \to \mathrm{Pic}^d$ en une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur Pic^d de classe dans le groupe de Brauer de Pic^d la classe de la $\mathbb{G}_m$-gerbe $\mathscr{P}ic^d \to \mathrm{Pic}^d$. Dès lors

$$\mathrm{AJ}^d : \mathrm{Div}^d = \mathrm{SB}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Pic}^d$$

la variété de Severi-Brauer associée à $\mathcal{A}$. La simple connexité des espaces projectifs implique alors que $\mathscr{E}^{(d)}$ descend le long de AJ^d ([**?**] exp. X théo. 1.3) en un unique système local de rang 1 $\mathscr{F}^{(d)}$ sur Pic^d.

Remarque 1.1. — Puisque $\mathscr{P}ic^d \to \mathrm{Pic}^d$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe et que $\mathbb{G}_m$ est connexe on a $\pi_1(\mathscr{P}ic^d) = \pi_1(\mathrm{Pic}^d)$. Il s'en suit que l'on peut remplacer Pic par $\mathscr{P}ic$ partout. C'est d'ailleurs ce que l'on va faire plus tard car dans notre cas l'espace de modules grossier sera trivial et l'on aura affaire à une $\underline{E}^\times$-gerbe avec $E^\times$ totalement discontinu (cf. sec. 2).

La dernière étape de la construction de $\mathscr{F}$ consiste à utiliser la structure de groupe sur Pic afin d'étendre le système local $\coprod_{d>2g-2} \mathscr{F}^{(d)}$ sur $\coprod_{d>2g-2} \mathrm{Pic}^d$ à tous les degrés. Pour cela on constate que le système local précédent est équivariant relativement à la loi de monoïde sur $\coprod_{d>2g-2} \mathrm{Pic}^d$. Il s'étend alors naturellement à tout Pic en imposant que l'extension soit encore équivariante.

Exemple 1.2. —

1. Si $k = \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Jac}_X^{an} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Jac}_X)/\pi_1(\mathrm{Jac}_X^{an})$ comme tore complexe. On a $\mathrm{Lie}(\mathrm{Jac}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \Omega_X^1)^*$ par dualité de Serre. Dès lors $\pi_1(\mathrm{Jac}_X^{an}) = \pi_1(X^{an})^{ab} = H_1(X^{an}, \mathbb{Z}) \subset H^0(X, \Omega_X^1)^*$ qui est donné par la variante Betti de la construction précédente.
2. Si X est une courbe propre et lisse géométriquement connexe sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ la construction précédente pour $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ est compatible au Frobenius et définit une application

$$\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-sys. loc. de rang 1 de Weil sur } X_{\overline{\mathbb{F}}_q}\} \longrightarrow \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-sys. loc. de rang 1 de Weil équivariants sur } \mathrm{Pic}_{X_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\}.$$

Notons $F = \mathbb{F}_q(X)$ le corps des fonctions de X. Par application de l'application trace de Frobenius (dictionnaire faisceaux fonctions de Grothendieck) on en déduit une application

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-sys. loc. de rang 1 de Weil sur } X_{\overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / \prod_v \mathcal{O}_{F_v}^\times, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times\big).$$

En effet, l'équivariance du faisceau ℓ-adique sur $\mathrm{Pic}_{X_{\overline{\mathbb{F}}_q}}$ implique que sa fonction trace de Frobenius est un caractère du groupe $\mathrm{Pic}_X(\mathbb{F}_q)$. Cette application est un isomorphisme de groupes et définit dualement l'isomorphisme du corps de classe partout non-ramifié

$$F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / \prod_v \mathcal{O}_{F_v}^\times \xrightarrow{\sim} W_{F^{nr}/F}^{ab}$$

où $W_{F^{nr}/F}$ est le groupe de Weil de l'extension maximale partout non ramifiée de F, l'image réciproque de $\mathrm{Frob}_q^{\mathbb{Z}}$ dans $\pi_1(X)$ via $\pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q|\mathbb{F}_q)$.

Traduite du point de vue dual des groupes fondamentaux la construction précédente se résume ainsi. On veut montrer que

$$\pi_1(\mathrm{AJ}^1) : \pi_1(X)^{ab} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Pic}^1).$$

Pour cela on construit un isomorphisme

$$\pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X^d/\mathfrak{S}_d)$$

pour $d > 1$ ([**?**] chap. IV Rem. 5.8) qui est le dual de l'opération $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}^{(d)}$ précédente. On montre alors que pour $d \gg 0$

$$\pi_1(\mathrm{AJ}^d) : \pi_1(X^d/\mathfrak{S}_d) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Pic}^d) = \pi_1(\mathrm{Pic}^1)$$

en montrant que AJ^d est une fibration localement triviale de fibre simplement connexe couplé à la suite exacte de Serre ([**?**] chap. X coro. 1.4).

Dans la suite on va mener à bien ces constructions classiques dans le cadre de notre conjecture.

2. Le diamant de Hilbert Div^d

2.1. Quelques définitions. — Soit E un corps local de corps résiduel le corps fini $\mathbb{F}_q$ et π une uniformisante de E, $\mathcal{O}_E/\pi = \mathbb{F}_q$. On a donc soit $[E : \mathbb{Q}_p] < +\infty$, soit $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$. On note $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ la catégorie des $\mathbb{F}_q$-espaces perfectoïdes munie de la topologie pro-étale.

Rappelons que pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ on note

$$X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

comme E-espace adique pré-perfectoïde. Il s'agit de la « famille de courbes paramétrées par S ». Lorsque $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ est affinoïde perfectoïde

$$Y_S = \mathrm{Spa}(\mathbf{A}_{R,R^+}, \mathbf{A}_{R,R^+}) \setminus V(\pi[\varpi])$$

où $\varpi \in R^{00} \cap R^\times$ est une pseudo-uniformisante,

$$\mathbf{A}_{R,R^+} = \begin{cases} W_{\mathcal{O}_E}(R^+) \text{ si } E|\mathbb{Q}_p \\ R^+[\![\pi]\!] \text{ si } E|\mathbb{F}_q \text{ auquel cas on pose } [a] = a \text{ pour } a \in R^0 \end{cases}$$

est l'anneau A_{inf} de Fontaine associé à R lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $R^+ = R^0$. Ici le Frobenius φ est celui induit par le Frobenius des vecteurs de Witt ramifiés. Via la formule

$$Y_S^\diamond = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$$

on a $\varphi = \varphi_S \times Id$ comme Frobenius partiel sur ce produit.

Il y a une application continue surjective

$$\tau : |X_S| \longrightarrow |S|$$

définie via les égalités

$$|X_S| = |X_S^\diamond| = \left|(S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi_S^{\mathbb{Z}}\right| = \left|(S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi_{E^\diamond}^{\mathbb{Z}}\right| \longrightarrow |S|$$

puisque $\varphi_S \circ \varphi_{E^\diamond}$ est le Frobenius absolu de $S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$ qui agit trivialement sur $|S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond|$. Pour tout ouvert U de S

$$X_U = \tau^{-1}(U)$$

et si $s \in S$

$$|X_{K(s),K(s)^+}| = \bigcap_{U \ni s} |X_U| \hookrightarrow |X_S|$$

où l'on note $K(s)$ le corps résiduel complété de S en s et U parcourt les voisinages ouverts de s. On a ainsi

$$|X_S| = \bigcup_{s \in S} |X_{K(s),K(s)^+}|.$$

Cela donne un support au fait que l'on pense à X_S comme étant la famille $(X_{K(s),K(s)^+})_{s \in S}$. On utilisera le lemme suivant qui signifie intuitivement que « X_S/S est propre ».

L'application continue $\tau : |X_S| \longrightarrow |S|$ est fermée.

Démonstration. — Il s'agit d'une propriété locale sur S que l'on peut supposer quasi-compact quasi-séparé. Le morphisme de diamants $(S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi_{E^\diamond}^{\mathbb{Z}} \to S$ est alors quasi-compact quasi-séparé. Il est de plus partiellement propre puisque $S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond \to S$ est partiellement propre car $\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ est partiellement propre. On en déduit que l'image d'un fermé par τ est un ensemble pro-constructible stable par spécialisations donc fermé. □

Remarque 2.1. — On peut également vérifier que τ est ouverte et que donc « X_S/S est propre et lisse ». Plus précisément, bien qu'il n'y ait pas de morphisme « $X_S \to S$ », $|X_S| = |\mathrm{Div}^1_S|$ (cf. rem. 2.14 qui suit) et le morphisme de diamants $\mathrm{Div}^1_S \to S$ est propre ([**?**] sec. 18) et géométriquement lisse ([**?**] sec. 24).

On aura également besoin du lemme qui suit.
Pour V un ouvert de X_S, resp. Y_S,

$$\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{O}\big(V \cap X_{K(\tau(x)),K(\tau(x))^+}\big), \text{ resp. } \mathcal{O}(V) \hookrightarrow \prod_{x\in V} \mathcal{O}\big(V \cap Y_{K(\tau(x)),K(\tau(x))^+}\big).$$

Démonstration. — Si $C = \widehat{\overline{E}}$ alors $Y_S \hat{\otimes}_E C$ est perfectoïde ([**?**] théo. 2.2). En d'autres termes, Y_S est sous-perfectoïde ([**?**] sec. 6.3). De plus pour $s \in S$

$$Y_{K(s),K(s)^+} \hat{\otimes}_E C = \varprojlim_{U \ni s} Y_U \hat{\otimes}_E C$$

et donc le corps résiduel complété de $x \in Y_S \otimes_E C$ coïncide avec celui de $x \in Y_{K(\tau(x)),K(\tau(x))^+} \hat{\otimes}_E C$. On conclut en utilisant que

$$\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(V \hat{\otimes}_E C) \subset \prod_{x \in V \hat{\otimes}_E C} K(x).$$

□

Définition 2.2. — On note $\mathscr{P}ic$ le champ de Picard des fibrés sur la courbe, pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$\mathscr{P}ic(S) = \text{groupoïde des fibrés en droites sur } X_S.$$

On a une décomposition en sous-champs ouverts/fermés

$$\mathscr{P}ic = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{P}ic^d.$$

Il y a de plus des isomorphismes

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}ic^d & \xrightarrow{\sim} & [\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)/\underline{E}^\times] \\ \mathscr{L} & \longmapsto & \mathrm{Isom}(\mathcal{O}(d), \mathscr{L}) \end{array}$$

où

- $[\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)/\underline{E}^\times]$ est le champ classifiant des $\underline{E}^\times$-torseurs pro-étales
- $\mathcal{O}(d)$ désigne le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_S}(d)$ sur X_S *associé au choix de* π.

En d'autres termes pour tout fibré en droites $\mathscr{L}$ sur X_S fibre à fibre de degré d sur S il existe un recouvrement pro-étale $\widetilde{S} \to S$ tel que $\mathscr{L}_{|X_{\widetilde{S}}} \simeq \mathcal{O}(d)$. Il s'agit d'un cas particulier d'un résultat de Kedlaya-Liu ([**?**] théo. 8.5.12).

Remarque 2.3. — Le fait que l'espace de modules grossier de $\mathscr{P}ic^0$ soit trivial n'est rien d'autre qu'une traduction d'un des théorèmes principaux de [**?**] qui dit que si X est la courbe algébrique associée à un corps perfectoïde algébriquement clos alors $\mathrm{B}_{cris}^{\varphi=Id} = \mathcal{O}(X \setminus \{\infty\})$ est un anneau principal. On a en effet $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathcal{C}l(\mathrm{B}_{cris}^{\varphi=Id})$.

Définition 2.4. — Pour un entier $d \geq 1$ on note Div^d le faisceau sur $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ qui à S associe les classes d'équivalence de couples $(\mathscr{L}, u)$ où

- $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur X_S fibre à fibre sur S de degré d
- $u \in H^0(X_S, \mathscr{L})$ est non nul fibre à fibre sur S
- $(\mathscr{L}, u) \sim (\mathscr{L}', u')$ s'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ envoyant u sur u'.

Fibre à fibre sur S signifie que pour tout $s \in S$, via $X_{K(s),K(s)^+} \to X_S$, la condition est vérifiée par tiré en arrière sur $X_{K(s),K(s)^+}$. Un tel u définit un morphisme $\mathcal{O}_{X_S} \to \mathscr{L}$ qui est en fait injectif. Cela est clair si $S = \mathrm{Spa}(K, K^+)$ avec (K, K^+) un corps affinoïde perfectoïde puisque dans ce cas là le lieu d'annulation d'une section non nulle d'un fibré en droites est un sous-ensemble discret de $|X_{K,K^+}|$. Le résultat général se déduit alors du lemme 2.1. Puisque $\mathcal{O}_{X_S} \hookrightarrow \mathscr{L}$ les automorphismes de $(\mathscr{L}, u)$ sont

triviaux et Div^d est bien un faisceau pro-étale comme annoncé dans la définition.

Si on était dans un « cadre classique » c'est à dire $X_S = X \times_k S$ avec X une courbe propre et lisse sur le corps k et S un k-schéma la définition précédente coïnciderait avec celle d'un *diviseur de Cartier relatif effectif de degré d sur X_S/S*.

Définition 2.5. — Pour $d \geq 1$ on note

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AJ}^d : \mathrm{Div}^d & \longrightarrow & \mathscr{P}ic^d \\ (\mathscr{L}, u) & \longmapsto & \mathscr{L} \end{array}$$

le morphisme d'Abel-Jacobi en degré d.

On va étudier ce morphisme en détails en décrivant de manières différentes Div^d.

2.2. Description de Div^d en termes d'espaces projectifs sur un Banach-Colmez absolu. — Soit $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$. Par définition le site pro-étale de X_S, resp. Y_S, est formé des espaces perfectoïdes pro-étales au-dessus de X_S, les recouvrements pro-étales étant définis de façon usuelle ([**?**] déf. 8.1). Si $\mathscr{F}$ est un faisceau pro-étale sur X_S alors ses sections globales, i.e. ses sections sur l'objet final du topos, sont données par

$$\mathscr{F}(X_S) = \mathscr{F}\big(X_S \hat{\otimes}_E \widehat{\overline{E}}\big)^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)}.$$

Il en est de même pour Y_S. Tout fibré vectoriel sur ces espaces définit un faisceau pro-étale dont les sections globales sont les sections globales usuelles pour la topologie analytique (cf. [**?**] lemme 17.1.8 pour la descente des fibrés vectoriels).

Le morphisme de topos associé à $\tau : |X_S| \to |S|$ s'étend en un morphisme de topos

$$\tau : (X_S)^{\sim}_{\text{pro-ét}} \longrightarrow \widetilde{S}_{\text{pro-ét}}.$$

Cela résulte de ce que si T/S est étale alors X_T/X_S l'est également. Il en est de même pour Y_S. Tout cela se déduit de l'égalité $Y_S^\diamond = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$. Ainsi par exemple si $T \to S$ est étale $Y_T^\diamond \to Y_S^\diamond$ l'est également et on en déduit que $Y_T \to Y_S$ l'est aussi (cf. [**?**] lemme 15.6 pour ce type de résultat).

Définition 2.6. — On note $\mathbf{B}$ le faisceau pro-étale en anneaux sur $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ défini par

$$\mathbf{B}(S) = \mathcal{O}(Y_S).$$

On note φ son endomorphisme de Frobenius.

En d'autres termes pour tout S, $\mathbf{B}_S$ est l'image directe de $\mathcal{O}_{Y_S}$ via $(Y_S)^{\sim}_{\text{pro-ét}} \to \widetilde{S}_{\text{pro-ét}}$.

Pour $d \geq 0$ on appelle le faisceau

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$$

un *espace de Banach-Colmez absolu* (on renvoie à la section 7.1 qui suit pour plus de détails sur la notion « d'objet absolu »). Pour tout $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d} := \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} S$$

est un espace de Banach-Colmez au-dessus de S ([**?**]),

$$\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d} = \tau_* \mathcal{O}_{X_S}(d).$$

C'est un diamant localement spatial sur S. Il est de plus *partiellement propre au-dessus de Spa*$(\mathbb{F}_q)$ au sens où pour $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde perfectoïde

$$\mathbf{B}(R, R^+) = \mathbf{B}(R, R^0)$$

et donc $\mathbf{B}(R, R^+)^{\varphi=\pi^d} = \mathbf{B}(R, R^0)^{\varphi=\pi^d}$. Néanmoins $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ *n'est pas un diamant*. Pour $d = 0$ on a

$$\mathbf{B}^{\varphi=Id} = \underline{E}.$$

Définition 2.7. — On note

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}$$

le faisceau pro-étale

$$S\longmapsto\left\{x\in\mathbf{B}(S)^{\varphi=\pi^d}\mid\forall s\in S, s^*x\neq 0\in\mathbf{B}(K(s))^{\varphi=\pi^d}\right\}.$$

Pour tout S on a

$$\left(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}\right)_S=\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d}\setminus\iota(S)$$

où $\iota : S\to\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d}$ est la section nulle qui est fermée dans $\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d}$.

Démonstration. — D'après le lemme 2.1 on a $\mathbf{B}(S)\hookrightarrow\prod_{s\in S}\mathbf{B}(K(s))$. Maintenant, si $f\in\mathcal{O}(Y_S)^{\varphi=\pi^d}$, $V(f)\subset|Y_S|$ est fermé invariant sous φ et définit un fermé $Z=V(f)/\varphi^{\mathbb{Z}}\subset X_S$. D'après le lemme 2.1 $U=|S|\setminus\tau(Z)$ est ouvert et on conclut. □

Le fait que la section nulle soit fermée se traduit de la façon suivante.

Corollaire 2.8. — *Le morphisme* $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\to Spa(\mathbb{F}_q)$ *est séparé.*

On note

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}/\underline{E}^\times$$

comme faisceau pro-étale quotient.

Proposition 2.9. — *Il y a un isomorphisme de faisceaux pro-étales*

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}/\underline{E}^\times\xrightarrow{\sim}\mathrm{Div}^d$$

via lequel le morphisme d'Abel-Jacobi est donné par

$$AJ^d:\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}/\underline{E}^\times\longrightarrow[Spa(\mathbb{F}_q)/\underline{E}^\times].$$

Démonstration. — Il y a un morphisme naturel $\underline{E}^\times$-invariant

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathrm{Div}^d$$

qui envoie une section de $\mathcal{O}_{X_S}(d)$ non nulle fibre à fibre sur S sur le diviseur associé donné par $\mathcal{O}_{X_S}\to\mathcal{O}_{X_S}(d)$. Cela définit le morphisme

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}/\underline{E}^\times\longrightarrow\mathrm{Div}^d.$$

Ce morphisme est un isomorphisme puisque pour tout $S\in\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$, pro-étale localement sur S tout fibré en droites de degré d fibre à fibre sur S est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_S}(d)$. □

On en déduit en particulier que pour tout $S\in\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$, Div^d_S est un diamant. On verra plus tard qu'en fait Div^d est un diamant (prop. 2.16). Mettons tout de même en exergue le corollaire suivant.

Corollaire 2.10. — *Le morphisme d'Abel-Jacobi* AJ^d *est une fibration pro-étale localement triviale de fibre l'espace de Banach-Colmez absolu épointé* $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}$.

Notons le fait suivant.
Le morphisme $\mathrm{Div}^d\to\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ est séparé.

Démonstration. — Soit $S\in\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ quasi-compact quasi-séparé et $D_1,D_2\in\mathrm{Div}^d(S)$. Soit

$$T\longrightarrow S$$

le $\underline{E}^\times\times\underline{E}^\times$-torseur des trivialisations de $(\mathcal{O}(D_1),\mathcal{O}(D_2))$. D'après le lemme 10.13 de [**?**]

$$T=T_0\underset{\underline{\mathcal{O}_E^\times}\times\underline{\mathcal{O}_E^\times}}{\times}\underline{E}^\times\times\underline{E}^\times$$

où $T_0 = T/\pi^{\mathbb{Z}} \times \pi^{\mathbb{Z}}$ est un $\underline{\mathcal{O}_E^\times} \times \underline{\mathcal{O}_E^\times}$-torseur pro-étale-fini. Le couple (D_1, D_2) est alors donné par deux morphismes $\underline{E}^\times$-équivariants au-dessus de S

$$T \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \left(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}\right)_S$$

où u est $\underline{E}^\times$-équivariant relativement à $E^\times \times \{1\} \subset E^\times \times E^\times$ et v relativement à $\{1\} \times E^\times \subset E^\times \times E^\times$. Notons $u_0 = u_{|T_0}$ et $v_0 = v_{|T_0}$

$$\mathrm{Im}|u_0|, \mathrm{Im}|v_0| \subset \left|(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\})_S\right|$$

sont des sous-ensembles quasi-compacts dans l'espace localement spectral quasi-séparé $\left|(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\})_S\right|$. On vérifie que $\pi^{\mathbb{Z}}$ agit de façon proprement discontinue sur $|(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\})_S|$ et que donc il existe $n \geq 1$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$|k| \geq n \Rightarrow \mathrm{Im}|u_0| \cap \pi^k \mathrm{Im}|v_0| = \emptyset.$$

Soit alors

$$Z = \bigcup_{|k|<n} |\mathrm{Eq}(u_0, \pi^k v_0)| \subset |T_0|$$

qui est fermé puisque $\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d}$ est séparé sur S. Puisque $T_0 \to S$ est pro-étale-fini l'image de Z dans $|S|$ est fermée. On conclut. □

Remarque 2.11. — Comme me l'a fait remarquer Peter Scholze il faut prendre garde au fait que *le diamant* Div^d *n'est pas spatial* ([**?**] déf. 11.17) car il n'est pas quasi-séparé, bien que le morphisme $\mathrm{Div}^d \to \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ le soit. En effet, par exemple pour $d = 1$, $\mathrm{Spa}(E)^\diamond \times_{\mathrm{Div}^1} \mathrm{Spa}(E)^\diamond \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spa}(E)^\diamond$ et donc Div^1 n'est pas quasi-séparé. Typiquement la proposition 21.9 de [**?**] ne s'applique pas à Div^d bien que $|\mathrm{Div}^d|$ soit formé d'un seul point. Tout cela indique que le bon objet à considérer n'est pas Div^d mais plutôt le morphisme $\mathrm{Div}^d \to \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$.

Remarque 2.12. — Bien que nous ne l'utiliserons pas dans la suite, $\mathrm{Div}^d \to \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ est même propre ([**?**] sec. 18) et géométriquement lisse ([**?**] sec. 24).

2.3. Description de Div^1 en termes de débasculements. — On a vu que $\mathrm{Div}^1 = \mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$. On va maintenant donner une description différente de Div^1, le jeu étant dans la suite de passer d'une description à l'autre.

Rappelons que $\mathrm{Spa}(E)^\diamond$ désigne le faisceau des débasculements. Plus précisément, pour tout $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond(S) = \{(S^\sharp, \iota)\}/\sim$$

où $S^\sharp$ est un E-espace perfectoïde et $\iota : S \xrightarrow{\sim} S^{\sharp,\flat}$. Lorsque $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ est affinoïde perfectoïde

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond(R, R^+) = \{\xi \in \mathbf{A}_{R,R^0} \text{ primitif de degré } 1\}/\mathbf{A}_{R,R^0}^\times$$

([**?**] théo. 3.17). Rappelons ici que $\xi = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$ est de degré 1 si $x_0 \in R^\times \cap R^{00}$ i.e. est une pseudo-uniformisante et $x_1 \in (R^0)^\times$. Cela permet de voir un débasculement $S^\sharp$ de S comme un diviseur

$$S^\sharp = V(\xi) \hookrightarrow Y_S$$

qui définit lui-même une immersion

$$S^\sharp \hookrightarrow X_S$$

par composition avec $Y_S \twoheadrightarrow X_S$ (il suffit de le vérifier localement sur S). Un tel élément primitif $\xi \in \mathbf{A}_{R,R^0}$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_{Y_S}$. C'est en effet clair si $S = \mathrm{Spa}(K, K^+)$ avec K un corps perfectoïde. Le cas général résulte alors du lemme 2.1. Le plongement

$$S^\sharp \hookrightarrow X_S$$

définit donc un élément de $\mathrm{Div}^1(S)$.

Cette construction définit un morphisme φ-invariant de faisceau pro-étales

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond \longrightarrow \mathrm{Div}^1 \tag{1}$$

Le faisceau quotient sur $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

est un diamant d'espace topologique sous-jacent un point. Pour tout $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$(\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}})_S = (S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi^{\mathbb{Z}}_{E^\diamond}$$

et le Frobenius partiel $\varphi^{\mathbb{Z}}_{E^\diamond}$ agit de façon proprement discontinue sans points fixes sur $|S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond|$. On en déduit que $\mathrm{Spa}(E)^\diamond \to \mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}$ est une présentation de $\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

Le morphisme (1) induit alors un morphisme de diamants

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}_{E^\diamond} \longrightarrow \mathrm{Div}^1$$

dont on affirme que c'est un isomorphisme. On peut effectivement décrire explicitement ce morphisme. Soit $\mathscr{L}\mathscr{T}$ un $\mathcal{O}_E$-module formel π-divisible de $\mathcal{O}$-hauteur 1 sur $\mathcal{O}_E$. Lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ il s'agit d'un groupe de Lubin-Tate. Lorsque $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ on peut prendre $\mathscr{L}\mathscr{T} = \widehat{\mathbb{G}}_a$ où l'action de $\pi \in O_E$ est donnée par $x \mapsto x^q + \pi x$, $x \in \widehat{\mathbb{G}}_a$. Soit

$$\widetilde{\mathscr{L}\mathscr{T}}_{\mathbb{F}_q} = \varprojlim_{\times\pi} \mathscr{L}\mathscr{T}_{\mathbb{F}_q}$$

le revêtement universel de $\mathscr{L}\mathscr{T}_{\mathbb{F}_q}$ comme E-espace vectoriel formel ([**?**] chap. 4)

$$\widetilde{\mathscr{L}\mathscr{T}}_{\mathbb{F}_q} \simeq \mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q[\![T^{1/p^\infty}]\!]).$$

Il y a alors un isomorphisme de périodes

$$\widetilde{\mathscr{L}\mathscr{T}}_{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{\varphi=\pi}$$

([**?**] théo. 4.1.4 ou bien [**?**] sec. 4.4 pour le cas des points à valeurs dans un corps perfectoïde (mais la preuve est identique pour les points à valeurs dans une algèbre perfectoïde)). Fixons une clôture algébrique $\overline{E}$ de E et soit $E_\infty|E$ le complété de l'extension de LT engendrée par les points de torsion de $\mathscr{G}$ dans $\overline{E}$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ sur $T_\pi(\mathscr{G})$ est donnée par un caractère de Lubin-Tate

$$\chi_{\mathscr{L}\mathscr{T}} : \mathrm{Gal}(E_\infty|E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E^\times.$$

On a alors une identification compatible à l'action de $E^\times$ ([**?**])

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}^\flat_{E_\infty}) = \mathbf{B}^{\varphi=\pi}$$

où π agit sur $\mathcal{O}^\flat_{E_\infty}$ comme le Frobenius. Cela induit une identification

$$\mathrm{Spa}(E^\flat_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}$$

compatible à l'action de $E^\times$ et donc

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spa}(E^\flat_\infty)/\underline{E}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times.$$

Résumons cela dans la proposition suivante.

Proposition 2.13. — *Il y a un isomorphisme de diamants*

$$\mathit{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}^1 = \mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times. \tag{2}$$

Le tiré en arrière à $\mathit{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}$ du $\underline{E}^\times$-torseur pro-étale

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{B}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times \tag{3}$$

se décrit de la façon suivante. Considérons le $\underline{E}^\times$-torseur de Lubin-Tate

$$\mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T}} = \mathit{Spa}(E^\flat_\infty) \underset{\underline{\mathcal{O}_E^\times}}{\times} \underline{E}^\times \longrightarrow \mathit{Spa}(E)^\diamond$$

obtenu par inflation de $\mathcal{O}_E^\times$ à $E^\times$. Il est muni de sa structure de Frobenius canonique

$$\mathit{can} : \varphi^*_{E^\diamond}\mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T}}.$$

Alors le $\underline{E}^\times$-torseur φ-équivariant sur Spa$(E)^\diamond$ déduit de (2) et (3) est donné par

$$(\mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T}}, \pi \times can).$$

Remarque 2.14. — On a donc pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$

$$X_S^\diamond = (S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi_S^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Spa}(E)^\diamond$$

tandis que

$$\mathrm{Div}_S^1 = (S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond)/\varphi_{E^\diamond}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow S.$$

Puisque $\varphi_{E^\diamond} \circ \varphi_S$ est le Frobenius absolu de $S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$ il agit trivialement sur son espace topologique, resp. son site étale. On a donc

$$\begin{array}{rcl} |X_S| & = & |\mathrm{Div}_S^1| \\ (X_S)_{\text{ét}} & = & (\mathrm{Div}_S^1)_{\text{ét}} \end{array}$$

mais les diamants $X_S^\diamond$ et Div_S^1 ne sont pas isomorphes.

En termes d'éléments primitifs de degré 1 ce torseur s'interprète comme *un torseur des renormalisations de produits infinis non convergents.* Plus précisément, soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde perfectoïde et $\xi \in \mathbf{A}_{R,R^0}$ primitif de degré $d \geq 1$. Soit

$$S^\sharp \hookrightarrow X_S$$

associé à ξ défini par l'idéal localement libre de rang $1, \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_S}$. Le diviseur associé

$$(\mathcal{O}_{X_S} \hookrightarrow \mathcal{I}^{-1}) \in \mathrm{Div}^1(S)$$

se calcule concrètement de la façon suivante. Quitte à multiplier ξ par une unité de $\mathbf{A}_{R,R^0}^\times$ on peut supposer que via l'application de réduction

$$W_{\mathcal{O}_E}(R^0) \to W_{\mathcal{O}_E}(R^0/R^{00}), \text{ resp.} R^0[\![\pi]\!] \to R^0/R^{00}[\![\pi]\!] \text{ si } E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!),$$

on a $\xi \equiv \pi$.

Notons $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{Y_S}$ muni de la structure de Frobenius

$$u : \varphi^*\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{L}$$

donnée par la multiplication par ξ. L'objet $(\mathscr{L}, u)$ est un Shtuka sur Y_S (ce que l'on appelle un φ-module dans [**?**] déf. 4.28). On peut alors lui associer le système inductif/projectif comme dans la proposition 4.29 de [**?**]

$$\cdots \longrightarrow \varphi^{n+1*}\mathscr{L} \xrightarrow{\varphi^{n*}u} \varphi^{n*}\mathscr{L} \xrightarrow{\varphi^{(n-1)*u}} \varphi^{(n-1)*}\mathscr{L} \longrightarrow \dots \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En restriction à tout ouvert quasi-compact de Y_S se système inductif/projectif est essentiellement constant et donc

$$\mathscr{L}_\infty = \varprojlim_{n \geq 0} \varphi^{n*}\mathscr{L} \hookrightarrow \varinjlim_{n \leq 0} \varphi^{n*}\mathscr{L} = \mathscr{L}^\infty.$$

est un monomorphisme de fibrés en droites φ-équivariants que l'on identifie à un monomorphisme de fibrés sur X_S. On a alors

$$(\mathscr{L}_\infty \otimes \mathscr{L}^{\infty,\vee} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_S}) \simeq (\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_S}).$$

Grâce à l'hypothèse faite sur ξ le produit infini

$$\Pi^+(\xi) = \prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(\xi)}{\pi} \in \mathcal{O}(Y_S)$$

est convergent dans l'algèbre de Fréchet $\mathcal{O}(Y_S)$. Il satisfait l'équation fonctionnelle

$$\frac{\xi}{\pi}.\varphi(\Pi^+(\xi)) = \Pi^+(\xi)$$

et donc

$$\Pi^+(\xi) \in H^0(X_S, \mathscr{L}_\infty(d)).$$

Cela définit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{X_S}(-d) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_\infty.$$

On a donc une identification de torseurs pro-étales sur S

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}) = \mathrm{Isom}(\mathcal{O},\mathscr{L}^{\infty}).$$

Afin de trouver une section globale de $\mathscr{L}^{\infty}$ trivialisant celui-ci on aimerait former

$$\ll \Pi^{-}(\xi) = \prod_{n<0} \varphi^{n}(\xi) \gg$$

mais malheureusement ce produit infini n'est pas convergent. Analysons la structure de celui-ci par approximations successives. Si $\xi \equiv a \bmod \pi$ avec $a \in R^{00} \cap R^{\times}$ alors

$$\ll \prod_{n<0} \varphi^{n}(\xi) \equiv a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\dots} \equiv a^{\frac{1}{q-1}} \bmod \pi \gg \tag{4}$$

qui est une solution formelle d'une equation de Kummer que l'on peut résoudre après un revêtement étale fini de S. Si $x \in 1+\pi^{k}\mathbf{A}_{R,R^0}$, $k \geq 1$, avec $x \equiv 1+[b]\pi^{k} \bmod 1+\pi^{k+1}\mathbf{A}_{R,R^0}$ alors

$$\ll \prod_{n<0} \varphi^{n}(x) \equiv 1+\left[b^{\frac{1}{q}}+b^{\frac{1}{q^2}}+\dots\right]\pi^{k} \bmod 1+\pi^{k+1}\mathbf{A}_{R,R^0} \gg \tag{5}$$

où $\ll b^{\frac{1}{q}}+b^{\frac{1}{q^2}}+\dots \gg$ est un solution formelle d'une équation d'Artin-Schreier que l'on peut résoudre après un revêtement étale fini de S.

En d'autres termes si $\mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Spa}(E)^{\diamond}$ est notre $\underline{E}^{\times}$-torseur déduit de (2) et (3) :

- le $\mathbb{F}_q^{\times}$-torseur
$$\mathbb{T}/\pi^{\mathbb{Z}}.(1+\pi\mathcal{O}_E) \to \mathrm{Spa}(E)^{\diamond}$$
est « de type Kummer obtenu par renormalisation de produits du type (4) »
- pour $k \geq 1$ le $\mathbb{F}_q$-torseur
$$\mathbb{T}/\pi^{\mathbb{Z}}.(1+\pi^{k+1}\mathcal{O}_E) \longrightarrow \mathbb{T}/\pi^{\mathbb{Z}}.(1+\pi^{k}\mathcal{O}_E)$$
est « de type Artin-Schreier obtenu par renormalisation de produits du type (5). »

Remarque 2.15. — La proposition 2.13 est un cas particulier d'identification entre un espace de modules de Shtukas locaux à une patte et un espace de Rapoport-Zink associé au groupe $\mathbb{G}_m$ sur E et au cocaractère de Hodge $\mu(z) = z$ ([**?**]).

2.4. Description de Div^d comme puissance symétrique de Div^1. — On va maintenant montrer que Div^d est la d-ème puissance symétrique de Div^1. Cette propriété est fondamentale dans la suite de ce texte puisqu'elle est à la base de la construction de la section 4, le principe étant alors de jouer entre les deux descriptions de Div^d, $\mathrm{Div}^d = \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}/\underline{E}^{\times}$ et $\mathrm{Div}^d = d$-ième puissance symétrique de Div^1.

On dispose d'une structure naturelle de monoïde commutatif sur

$$\coprod_{d>0} \mathrm{Div}^d.$$

Le résultat clef suivant est une traduction « en famille » de notre résultat clef de factorisation obtenu avec Fontaine ([**?**] chap. 2 sec. 2.4).

Proposition 2.16. — *Pour $d > 0$ l'application somme de d diviseurs de degré 1, $\Sigma^d : (\mathrm{Div}^1)^d \to \mathrm{Div}^d$ est un morphisme surjectif quasi-pro-étale de diamants qui induit un isomorphisme*

$$(\mathrm{Div}^1)^d/\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}^d$$

où le quotient est un quotient de faisceaux pro-étales.

Démonstration. — Soit $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ strictement totalement discontinu muni d'un morphisme

$$S \to \mathrm{Div}^d.$$

Montrons que dans le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ (\mathrm{Div}^1)^d \arrow[r, "\Sigma^d"] & \mathrm{Div}^d \end{tikzcd}$$

le morphisme $T \to S$ est -pro-étale quasi-compact surjectif entre espaces perfectoïdes et donc un épimorphisme pro-étale. Le diagramme précédent se réécrit en un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ (\mathrm{Div}^1)^d_S \arrow[r, "\Sigma^d"] & \mathrm{Div}^d_S. \end{tikzcd}$$

L'avantage de cette réécriture est que maintenant $(\mathrm{Div}^1)^d_S$ et Div^d_S sont des diamants spatiaux séparés sur S et donc T est un diamant spatial et f est séparé. On peut alors appliquer la proposition 13.6 de [**?**] pour conclure que f est un morphisme affinoïde pro-étale entre espaces affinoïdes perfectoïdes. D'après le théorème 6.2.1 de [**?**] f est surjectif au niveau des (C, C^+)-points pour tout corps affinoïde perfectoïde algébriquement clos (C, C^+) (nos diamants sont partiellement propres et leurs (C, C^+)-points coïncident avec leurs $(C, \mathcal{O}_C)$-points). On en déduit que Σ^d est quasi-pro-étale et est un épimorphisme de faisceaux pro-étales.

Il y a un morphisme

$$g : (\mathrm{Div}^1)^d \times \mathfrak{S}_d \longrightarrow (\mathrm{Div}^1)^d \times_{\mathrm{Div}^d} (\mathrm{Div}^1)^d.$$

Appliquant la même technique que précédemment, pour tout S strictement totalement discontinu et tout morphisme $S \to (\mathrm{Div}^1)^d \times_{\mathrm{Div}^d} (\mathrm{Div}^1)^d$ on vérifie que le morphisme déduit par tiré en arrière par g vers S est affinoïde pro-étale surjectif. On conclut que g est un épimorphisme de faisceaux pro-étales. Cela permet de conclure. □

On en déduit le résultat suivant qui n'était pas évident à priori.

Proposition 2.17. — *Pour $d > 0$ le diamant absolu $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$ est un diamant.*

Démonstration. — Le morphisme $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \to \mathrm{Div}^d$ est pro-étale surjectif et on peut appliquer la proposition 11.7 de [**?**]. □

Remarque 2.18. — On verra dans la section 6 que lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ alors $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$ est même un espace perfectoïde.

3. $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et représentations du groupe de Weil

Soit ℓ un nombre premier éventuellement égal à p. Soit D un diamant. Si $[\mathbb{Q}_\lambda : \mathbb{Q}_\ell] < +\infty$, par définition un $\mathbb{Q}_\lambda$-système local sur D est un faisceau de $\underline{\mathbb{Q}_\lambda}$-modules localement constant de dimension finie sur le site quasi-pro-étale de D ([**?**] déf. 14.1). Par définition un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local sur D est « un objet de la forme $\mathscr{F} \otimes_{\mathbb{Q}_\lambda} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ pour $\mathscr{F}$ un $\mathbb{Q}_\lambda$-système local et $\mathbb{Q}_\lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ comme précédemment. »

Fixons une clôture algébrique $\overline{E}$ de E de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_q$ et soit $\breve{E}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de E dans $\overline{E}$ dont on note σ le Frobenius. On note W_E le groupe de Weil de E. La proposition qui suit dit en quelque sorte que

$$\ll \ \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = W_E \ \gg .$$

Bien qu'une telle théorie du π_1 n'ait pas été développée pour de tels objets, du point de vue de la géométrie rigide usuelle il faut penser à un tel π_1 hypothétique comme étant l'analogue du π_1 prodiscret de de Jong ([**?**]) et non le π_1 profini de Grothendieck classifiant les revêtements étales finis.

Proposition 3.1. — *La catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ s'identifie à celle des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations continues de W_E.*

Démonstration. — Puisque pour tout $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ le morphisme $Y_S \to X_S$ est un isomorphisme local la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux sur

$$\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q} = (\mathrm{Spa}(E)^\diamond \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q))/\varphi_{E^\diamond}^{\mathbb{Z}}$$

s'identifie à celle des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux $\varphi_{E^\diamond}$-équivariants sur

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q).$$

Puisque le Frobenius absolu $\varphi_{E^\diamond} \circ \varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ de ce diamant agit trivialement sur le site quasi-pro-étale cette dernière catégorie s'identifie à la catégories des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux $\varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q}$-équivariants sur ce même diamant. Remarquons maintenant que

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q) = \mathrm{Spa}(\breve{E})^\diamond$$

et que via cette identification $Id \times \varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q} = \sigma$. Notre catégorie s'identifie donc à celle des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux σ-équivariants sur $\mathrm{Spa}(\breve{E})^\diamond$. Tout revêtement pro-étale de $\mathrm{Spa}(E)^\diamond$ possède une section au-dessus de $\mathrm{Spa}(\widehat{\overline{E}}^\flat)$. Le résultat s'en déduit. □

Remarque 3.2. — La proposition précédente est la raison principale pour laquelle on ne travaille pas avec des coefficients de torsion. L'apparition du groupe de Weil et non du groupe de Galois dans cet énoncé est un indice sérieux que l'objet $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ est le bon objet à considérer et non $\mathrm{Spa}(E)^\diamond$ dont le π_1 serait $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$.

Soit maintenant $\chi : E^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ un caractère. Il définit un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 $\mathscr{E}_\chi$ sur

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$$

par poussé en avant par χ du $\underline{E}^\times$-torseur $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\} \to \mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$. La proposition qui suit dit en quelque sorte que le morphisme

$$\ll\ W_E = \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) \xrightarrow{\pi_1(\mathrm{AJ}^1)} \pi_1(\mathscr{P}ic^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = E^\times\ \gg$$

est donné par l'inverse de l'application de réciprocité d'Artin.

Proposition 3.3. — *Via l'identification $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q} = \mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$ le caractère de W_E associé à $\mathscr{E}_\chi$ est obtenu en composant χ^{-1} avec l'inverse de l'application de réciprocité d'Artin Art : $E^\times \xrightarrow{\sim} W_E^{ab}$.*

Démonstration. — Fixons un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$ associé au choix de π et soit $\chi_{\mathscr{LT}}$: $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E) \to \mathcal{O}_E^\times$ le caractère de Lubin-Tate associé. Avec les notations de la section 2.3 on a

$$W_E^{ab} \subset \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)^{ab} = \mathrm{Gal}(\breve{E}_\infty|E) = \mathrm{Gal}(\breve{E}_\infty|E_\infty) \times \mathrm{Gal}(E_\infty|E).$$

ce qui permet de définir canoniquement $\sigma \in W_E^{ab}$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall \tau \in I_E,\ Art^{-1}(\tau) &= \chi_{\mathscr{LT}}(\tau)^{-1} \\ Art^{-1}(\sigma) &= \pi. \end{aligned}$$

On applique maintenant la proposition 2.13. On part du $\underline{E}^\times$-torseur $\varphi_{E^\diamond}$-équivariant

$$\mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q} := \mathbb{T}_{\mathscr{LT}} \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow \mathrm{Spa}(E)^\diamond \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$$

muni de

$$\pi \times can : \varphi_{E^\diamond}^* \mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q}$$

On lui applique $\varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q}^*$ pour obtenir

$$\mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q} = (\varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q}\varphi_{E^\diamond})^* \mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q} \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{\mathbb{F}}_q}^* \mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q}$$

dont on prend l'inverse. La donnée de descente obtenue donc sur

$$\mathbb{T}_{\mathscr{LT}} \otimes_E \breve{E} = \mathbb{T}_{\mathscr{LT},\overline{\mathbb{F}}_q} \to \mathrm{Spa}(\breve{E})^\diamond,$$

$\sigma^*\mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T},\overline{\mathbb{F}}_q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{\mathscr{L}\mathscr{T},\overline{\mathbb{F}}_q}$, est donnée par π^{-1} fois la donnée de descente canonique. Le résultat s'en déduit. □

4. Construction du symétrisé d'un système local abélien sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$

On montre dans cette section que la construction qui à un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ associe son symétrisé sur $\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ a bien un sens comme dans le cas « classique » i.e. on a un morphisme

$$\ll \pi_1(\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^{ab} \gg$$

(dont on montrera finalement que c'est un isomorphisme).

4.1. Construction. — Dans cette section on utilise constamment le fait que les morphismes étales finis entre espaces perfectoïdes satisfont la descente pro-étale ([**?**] prop. 9.7). Par exemple, si D est un diamant et Γ un groupe fini tout G-torseur étale au-dessus de D est représentable par un diamant étale fini au-dessus de D.

Soit G un groupe abélien fini et

$$U \to \mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

un G-torseur étale. Pour $d > 0$,

$$U^d \to (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d$$

est un G^d-torseur que l'on peut pousser en avant via l'application somme $s : G^d \to G$ et obtenir un G-torseur

$$U^d \underset{G^d,s}{\times} G \longrightarrow (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d. \tag{6}$$

Il est muni d'une action de $\mathfrak{S}_d$ compatible à celle sur $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d$.

Le quotient pro-étale par $\mathfrak{S}_d$

$$\big(U^d \underset{G^d,s}{\times} G\big)/\mathfrak{S}_d \longrightarrow (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d/\mathfrak{S}_d \tag{7}$$

est un G-torseur étale qui descend le G-torseur (6) via $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d \to (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d/\mathfrak{S}_d$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U^d \underset{G^d,s}{\times} G & \longrightarrow & \big(U^d \underset{G^d,s}{\times} G\big)/\mathfrak{S}_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d & \longrightarrow & (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d/\mathfrak{S}_d. \end{array}$$

est cartésien. En effet, si c'est le cas alors (7) est un G-torseur étale localement pour la topologie quasi-pro-étale au-dessus du diamant $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d/\mathfrak{S}_d$ est est donc un G-torseur étale par descente des morphismes étales finis pour la topologie pro-étale. La surjectivité du morphisme

$$f : U^d \underset{G^d,s}{\times} G \longrightarrow (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d \underset{(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d/\mathfrak{S}_d}{\times} \big(U^d \underset{G^d,s}{\times} G\big)/\mathfrak{S}_d$$

est immédiate. Pour l'injectivité, remarquons que l'on a

$$U^d \underset{G^d,s}{\times} G = H\backslash U^d$$

où $H = \{(g_1, \ldots, g_d) \in G^d \mid \prod_{i=1}^d g_i = 1\}$. On note $[x_1, \ldots, x_d]$ la classe d'une section de U^d modulo l'action de H. Si $f([x_1, \ldots, x_d]) = f([y_1, \ldots, y_d])$ il existe (étale localement) $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ et $(g_1, \ldots, g_d) \in G^d$ tels que

$$\begin{aligned} [y_1, \ldots, y_d] &= [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}] \\ (y_1, \ldots, y_d) &= (g_1.x_1, \ldots, g_d.x_d). \end{aligned}$$

Il existe donc (toujours étale localement) $h_1, \ldots, h_d \in G$ vérifiant $\prod_{i=1}^d h_i = 1$ tels que

$$(h_1.y_1, \ldots, h_d.y_d) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}).$$

On obtient alors pour tout indice i, $h_i g_i.x_{\sigma(i)} = x_i$. En itérant d-fois cette relation on en déduit que

$$\big(\prod_{i=1}^d h_i g_i\big).x_1 = x_1$$

et que donc $\prod_{i=1}^d h_i g_i = 1$ puisque l'action de G sur U est libre. Cela permet de conclut que $(g_1, \ldots, g_d) \in H$ ce qui démontre l'injectivité. □

Remarque 4.1. — La preuve précédente s'applique dans un contexte très général. Par exemple, si X est une courbe projective lisse sur un corps, $\mathrm{Div}^1 = X$ et $\mathrm{Div}^d = X^d/\mathfrak{S}_d$ (quotient fppf) puisque les morphismes étales finis satisfont à la descente pour la topologie fppf.

Proposition 4.2. — *Soit Λ un anneau fini et $\mathscr{E}$ un faisceau de Λ-modules localement constant libre de rang 1 sur $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})_{\text{ét}}$. Pour $d > 0$ le faisceau*

$$\big(\Sigma_*^d \mathscr{E}^{\boxtimes d}\big)^{\mathfrak{S}_d}$$

est localement constant libre de rang 1 sur $(\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q})_{\text{ét}}$.

Démonstration. — Soit

$$U = \mathrm{Isom}(\underline{\Lambda}, \mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

le $\Lambda^\times$-torseur sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ des trivialisations de $\mathscr{E}$. On a

$$(\Sigma_*^d \mathscr{E}^{\boxtimes d})_{|(U^d \underset{G^d,s}{\times} G)/\mathfrak{S}_d} = f_*\big(\mathscr{E}^{\boxtimes d}\big)_{|U^d \underset{G^d,s}{\times} G}.$$

où

$$f : U^d \underset{G^d,s}{\times} G \longrightarrow (U^d \underset{G^d,s}{\times} G)/\mathfrak{S}_d.$$

On a $(\mathscr{E}^{\boxtimes d})_{U^d} \simeq \underline{\Lambda}$ et l'action de monodromie de $G^d \to \Lambda^\times$ déduite se factorise via le noyau de s. On en déduit que

$$(\mathscr{E}^{\boxtimes d})_{|U^d \underset{G^d,s}{\times} G} \simeq \underline{\Lambda}.$$

L'action de $\mathfrak{S}^d$ déduite sur $\underline{\Lambda}$ est triviale et

$$(f_*\underline{\Lambda})^{\mathfrak{S}_d} = \underline{\Lambda}$$

puisque si

$$V \longrightarrow (U^d \underset{G^d,s}{\times} G)/\mathfrak{S}_d$$

est étale

$$(f_*\underline{\Lambda})^{\mathfrak{S}_d} = \mathscr{C}(|V|/\mathfrak{S}_d, \Lambda)$$

et

$$|V|/\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} \big|(U^d \underset{G^d,s}{\times} G)/\mathfrak{S}_d\big|.$$

□

On peut étendre la construction précédente du cas des coefficients de torsion au cas des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-coefficients. En effet, si $[\mathbb{Q}_\lambda : \mathbb{Q}_\ell] < +\infty$ alors la construction s'étend automatiquement au cas des $\mathbb{Z}_\lambda$-systèmes locaux de rang 1. Cela provient du fait que si $\mathscr{E}$ est un tel $\mathbb{Z}_\lambda$-système local de rang 1 alors

$$\mathscr{E} = \varprojlim_{n \geq 1} \mathscr{E}/\ell^n$$

et $\mathscr{E}/\ell^n$ est un faisceau étale localement constant de rang 1 sur $\mathbb{Z}_\lambda/\ell^n\mathbb{Z}_\lambda$ pour la topologie étale (utiliser le fait que les morphismes étales finis satisfont la descente pour la topologie pro-étale). Maintenant si $\mathscr{E}$ est

un $\mathbb{Q}_\lambda$-système locale de rang 1 qui n'est pas de la forme $\mathscr{E}_0 \otimes_{\mathbb{Z}_\lambda} \mathbb{Q}_\lambda$ on peut procéder de la façon suivante. D'après le lemme 10.13 de [**?**] le $\underline{\mathbb{Q}_\lambda^\times}$-torseur pro-étale des trivialisations de $\mathscr{E}$ est de la forme

$$T = T_0 \underset{\underline{\mathbb{Z}_\lambda^\times}}{\times} \underline{\mathbb{Q}_\lambda^\times} = \coprod_{\mathbb{Z}} T_0$$

où $T_0 = T/\varpi_\lambda^{\mathbb{Z}}$ est pro-étale-fini. Utilisant cela on vérifie la proposition suivante.

Proposition 4.3. — *Soit $\mathscr{E}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. Alors pour $d > 0$ le faisceau quasi-pro-étale*

$$\mathscr{E}^{(d)} := \left(\Sigma^d_* \mathscr{E}^{\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$.

Remarque 4.4. — Lorsque $\mathscr{E}$ n'est plus de rang un, plus précisément lorsque la monodromie de $\mathscr{E}$ comme représentation de W_E n'est plus abélienne, alors en général $\left(\Sigma^d_* \mathscr{E}^{\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$ n'est pas un système local mais seulement un « faisceau pervers ».

4.2. Compatibilité au tiré en arrière via l'application d'Abel-Jacobi. — On vérifie maintenant que le diagramme «

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q})^{ab} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1(\mathrm{AJ}^1)"'] & \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^{ab} \arrow[d, "\pi_1(\mathrm{AJ}^d)"] \\
\pi_1(\mathscr{P}ic^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) \arrow[r, equal] & E^\times \arrow[r, equal] & \pi_1(\mathscr{P}ic^d_{\overline{\mathbb{F}}_q})
\end{tikzcd}$$

» commute où la flèche horizontale du haut est duale à l'opération de symétrisation d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1.

Proposition 4.5. — *Pour $\chi : E^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et $d > 0$ soit $\mathscr{F}^{(d)}_\chi$ le système local associé sur $\mathscr{P}ic^{(d)} = [Spa(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{E}^\times]$. Notons $\mathscr{E}^{(1)}_\chi = AJ^{1*}\mathscr{F}^{(1)}_\chi$. On a alors*

$$\mathscr{E}^{(d)}_\chi := \left(\Sigma^d_* \mathscr{F}^{(1)\boxtimes d}_\chi\right)^{\mathfrak{S}_d} = AJ^{d*}\mathscr{F}^{(d)}_\chi.$$

Démonstration. — Il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d \arrow[r, "\Sigma^d"] \arrow[d, "(\mathrm{AJ}^1)^d"'] & \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \arrow[d, "\mathrm{AJ}^d"] \\
\left(\mathscr{P}ic^1\right)^d \arrow[r, "\Pi^d"] & \mathscr{P}ic^d
\end{tikzcd}$$

où $\Pi^d(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) = \mathscr{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_d$. De plus, Π^d s'identifie au morphisme

$$\left(\mathbf{B}^{\varphi=\pi}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times\right)^d \longrightarrow \left(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}\right)/\underline{E}^\times$$

induit par la multiplication de d-éléments de $\mathbf{B}^{\varphi=pi}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. On en déduit que

$$\Pi^{d*}\mathscr{F}^{(d)}_\chi = \mathscr{F}^{(1)}_\chi \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{F}^{(1)}_\chi.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\Sigma^{d*}\mathrm{AJ}^{d*}\mathscr{F}^{(d)}_\chi &= (\mathrm{AJ}^1)^{d*}\Pi^{d*}\mathscr{F}^{(d)}_\chi \\
&= (\mathrm{AJ}^1)^{d*}\mathscr{F}^{(1)\boxtimes d}_\chi \\
&= \left(\mathrm{AJ}^{1*}\mathscr{F}^{(1)}_\chi\right)^{\boxtimes d}.
\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme qui suit 4.2 pour conclure. □

Pour $\mathscr{E}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $Div^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ on a

$$\mathscr{E} = \big(\Sigma^d_* \Sigma^{d*} \mathscr{E}\big)^{\mathfrak{S}_d}.$$

Démonstration. — Il y a un morphisme naturel obtenu par adjonction

$$\mathscr{E} \longrightarrow \big(\Sigma^d_* \Sigma^{d*} \mathscr{L}\big)^{\mathfrak{S}_d}.$$

Si $U \to \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ est un morphisme quasi-pro-étale surjectif avec U perfectoïde tel que $\mathscr{E}_{|U} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ alors après restriction à U cela se ramène à vérifier que

$$|U \times_{\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}} (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d|/\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} |U|$$

ce qui ne pose pas de problèmes. □

4.3. Compatibilité à la structure de monoïde sur Div**.** — Soit $\mathscr{E}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et $\mathscr{E}^{(d)}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ obtenu via la proposition 4.3.

Proposition 4.6. — *Le système local $\coprod_{d>0} \mathscr{E}^{(d)}$ sur $\coprod_{d>0} \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ est compatible à la structure de monoïde abélien sur $\coprod_{d>0} \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ au sens où via $m : \coprod_{d>0} \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \times \coprod_{d>0} \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \to \coprod_{d>0} \mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ on a un isomorphisme*

$$m^* \coprod_{d>0} \mathscr{E}^{(d)} \xrightarrow{\sim} \coprod_{d>0} \mathscr{E}^{(d)} \boxtimes \coprod_{d>0} \mathscr{F}^{(d)}$$

satisfaisant des conditions naturelles de commutativité et associativité.

Démonstration. — Soient $d, d' > 0$ et

$$m_{d,d'} : \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \times \mathrm{Div}^{d'}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow \mathrm{Div}^{d+d'}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

qui s'inscrit dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d \times (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^{d'} & = & (\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^{d+d'} \\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma^d \times \Sigma^{d'}} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{d+d'}} \\ \mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \times \mathrm{Div}^{d'}_{\overline{\mathbb{F}}_q} & \xrightarrow{m_{d,d'}} & \mathrm{Div}^{d+d'}_{\overline{\mathbb{F}}_q}. \end{array}$$

La preuve du lemme 4.2 s'adapte pour montrer que

$$m^*_{d,d'} \mathscr{E}^{(d+d')} = \big[(\Sigma^d \times \Sigma^{d'})_* (\Sigma^d \times \Sigma^{d'})^* m^*_{d,d'} \mathscr{E}^{(d+d')}\big]^{\Sigma^d \times \Sigma^{d'}}.$$

On conclut puisque

$$\begin{aligned} (\Sigma^d \times \Sigma^{d'})^* m^*_{d,d'} \mathscr{E}^{(d+d')} &= \Sigma^{(d+d')*} \mathscr{E}^{(d+d')} \\ &= \mathscr{E}^{(1) \boxtimes (d+d')} \end{aligned}$$

□

5. Énoncé du théorème et application au corps de classes

5.1. Rappels sur le lemme de Drinfeld-Scholze ([?]). — Nous allons utiliser l'assertion d'unicité dans le lemme de Drinfeld-Scholze (qui est la partie « facile » n'utilisant pas le théorème de classification des fibrés sur la courbe). Néanmoins il nous semble bon de réécrire ce lemme entièrement dans le cadre des objets qui nous intéresse. Rappelons donc que d'après Scholze

$$\ll \pi_1\big((\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d\big) = \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d \gg$$

où ici un tel π_1 classifierait des revêtements *étales finis* (les guillemets sont là pour préciser qu'une telle théorie du groupe fondamental n'a pas été développée pour de tels diamants). On a plus précisément le lemme suivant.

[Drinfeld-Scholze ([**?**] théo. 16.3.1, cas abélien] Soit Λ un anneau fini, $d > 0$ et $\mathscr{E}$ un faisceau de Λ-modules localement constant libre de rang 1 sur $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d_{\text{ét}}$. Il existe alors $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_d$ de tels faisceaux localement constants sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ tels que

$$\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{E}_d.$$

De plus, $\mathscr{E}$ détermine la classe d'isomorphisme de la collection $(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_d)$ de façon unique.

Remarque 5.1. — Il faut prendre garde au fait que le lemme de Drinfeld-Scholze ne concerne que les revêtement *étales finis* du produit $(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q})^d$ et non ses revêtements quasi-pro-étales.

On en déduit le résultat suivant qui est celui qui nous intéresse.

Soient $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux de rang 1 sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ de la forme $\mathscr{G} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ où $\mathscr{G}$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-système local. Si $\mathscr{E}_1^{(d)} \simeq \mathscr{E}_2^{(d)}$ comme systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ pour un $d > 0$ on a alors $\mathscr{E}_1 \simeq \mathscr{E}_2$.

Démonstration. — Par application de Σ^{d*} on obtient un isomorphisme

$$\mathscr{E}_1^{\boxtimes d} \simeq \mathscr{E}_2^{\boxtimes d}.$$

Le résultat s'en déduit par application de l'unicité dans le lemme de Drinfeld-Scholze. □

Bien qu'il n'ait pas de contre-exemple, l'auteur ne voit pas de raison pour laquelle ce lemme serait encore vrai sans l'hypothèse que $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ proviennent de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-système locaux.

5.2. Corps de classes géométrique. — Soit

$$\varphi : W_E \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

un caractère dont on veut montrer qu'il se factorise via

$$f : W_E^{ab} \twoheadrightarrow E^\times$$

donné par l'action sur le module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate. Quitte à remplacer φ par $\varphi \otimes \chi \circ f$ pour un χ bien choisi on peut supposer que

$$\varphi : W_E \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times.$$

Notons $\mathscr{E}_\varphi^{(1)}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 associé sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ (prop. 3.1). D'après la proposition 3.3 il s'agit de voir que

$$\mathscr{E}_\varphi^{(1)} = \mathrm{AJ}^{1*}\mathscr{F}_\chi^{(1)}$$

pour un caractère $\chi : E^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. Pour $d > 0$ soit

$$\mathscr{E}_\varphi^{(d)} = \left(\Sigma_*^d \mathscr{E}_\chi^{(1)\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 associé sur $\mathrm{Div}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. Supposons maintenant démontré que pour $d \gg 0$ celui-ci descende le long de AJ^d en un système local $\mathscr{F}_\chi^{(d)}$

$$\mathscr{E}_\varphi^{(d)} = \mathrm{AJ}^{d*}\mathscr{F}_\chi^{(d)}$$

où $\chi : E^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. On a alors d'après le résultat le lemme 5.1 et la proposition 4.5 $\mathscr{E}_\varphi^{(1)} = \mathrm{AJ}^{1*}\mathscr{F}_\chi^{(1)}$ ce qui conclut.

Ainsi, le fait que le morphisme $W_E^{ab} \twoheadrightarrow E^\times$ soit un isomorphisme (i.e. l'extension abélienne maximale de E est engendrée par l'extension maximale non ramifiée et les poins de torsion d'un groupe de Lubin-Tate) découle du théorème suivant.

Théorème 5.2. — *Pour $d > 1$, resp. $d > 2$ si $E|\mathbb{Q}_p$, le diamant $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$ est simplement connexe au sens où tout revêtement étale fini de celui-ci possède une section.*

On va démontrer ce théorème dans les sections qui suivent.

6. Le cas d'égales caractéristiques

On suppose dans cette section que $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$. On va voir alors que dans ce cas là de nombreux diamants qui interviennent dans les constructions précédentes sont en fait des espaces perfectoïdes.

6.1. Démonstration du théorème 5.2. — Rappelons que pour tout $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$,

$$Y_S = \mathbb{D}_S^* = \{0 < |\pi| < 1\} \subset \mathbf{A}_S^1$$

une fibration tirviale en disques ouverts épointés de la variable π sur S. On a donc lorsque (R, R^+) est une $\mathbb{F}_q$-algèbre affinoïde perfectoïde

$$\mathcal{O}(Y_{R,R^+}) = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \pi^n \mid x_n \in R,\ \forall \rho \in]0,1[\ \lim_{|n|\to+\infty} \|x_n\|\rho^n = 0 \Big\}$$

où $\|.\|$ est une norme d'algèbre multiplicative relativement aux puissances définissant la topologie de R. On en déduit une bijection pour tout $d > 0$

$$\begin{array}{rcl} (R^{00})^d & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{B}(R,R^+)^{\varphi=\pi^d} \\ (x_0,\dots,x_{d-1}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} [x_i^{q^{-k}}]\pi^{kd+i}. \end{array}$$

Soit $\mathscr{G}_d$ le $\mathcal{O}_E$-module formel π-divisible sur $\mathbb{F}_q$ donné par

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{G}_d & = & (\widehat{\mathbb{G}}_a)^d \\ \forall (x_0,\dots,x_{d-1}) \in (\widehat{\mathbb{G}}_a)^d,\ \ \pi.(x_0,\dots,x_{d-1}) & = & (x_{d-1}^q, x_0, \dots, x_{d-2}). \end{array}$$

On peut alors former le E-espace vectoriel formel revêtement universel de $\mathscr{G}_d$

$$\widetilde{\mathscr{G}_d} = \varprojlim_{\times\pi} \mathscr{G}_d$$

qui est isomorphe à $\mathrm{Spf}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)$. Il y a alors une identification de faisceaux pro-étales en E-espaces vectoriels

$$\widetilde{\mathscr{G}_d} = \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}.$$

En d'autres termes $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ est représenté par le $\mathbb{F}_q$-espace adique parfait

$$t(\widetilde{\mathscr{G}_d}) = \mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big).$$

Cet espace n'est pas perfectoïde car non analytique. Néanmoins

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\} & = & \mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)\setminus V(x_0,\dots,x_{d-1}) \\ & = & \mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)_a \end{array}$$

est perfectoïde[(1)]. Plus précisément,

$$\mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)_a = \bigcup_{i=0}^{d-1} D(x_i)$$

où

$$D(x_i) \longrightarrow \mathrm{Spa}\big(\mathbb{F}_q(\!(x_i^{1/p^\infty})\!)\big)$$

est une boule ouverte perfectoïde sur le corps perfectoïde $\mathbb{F}_q(\!(x_i^{1/p^\infty})\!)$. Néanmoins l'espace tout entier n'est pas défini sur un corps perfectoïde. On vérifie en effet que

$$\mathcal{O}\Big(\mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)_a\Big) = \mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]$$

qui ne possède par d'unité topologiquement nilpotente.

(1) Dans une version non perfectoïde l'auteur a rencontré pour la première fois ce type d'espaces dans [**?**]

Venons en à la preuve du théorème principal 5.2. On a

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}\sim \varprojlim_{n\geq 0}\ \mathrm{Spa}\Big(\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^n},\dots,x_{d-1}^{1/p^n}]\!],\mathbb{F}_q[\![x_0^{1/p^n},\dots,x_{d-1}^{1/p^n}]\!]\Big).$$

On en déduit (théorème d'approximation d'Elkik ou pureté de Scholze couplé au fait que nos espaces sont quasi-compacts quasi-séparés) que l'on a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} & 2-\varinjlim_{n\geq 0}\ \text{Étales finis}\ /\ \mathrm{Spa}\Big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0^{1/p^n},\dots,x_{d-1}^{1/p^n}]\!],\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0^{1/p^n},\dots,x_{d-1}^{1/p^n}]\!]\Big)_a \\ \xrightarrow{\sim}\ & \text{Étales finis}\ /\ \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}_{\overline{\mathbb{F}}_q}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que tout revêtement étale fini de

$$\mathrm{Spa}\big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0,\dots,x_{d-1}]\!],\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0,\dots,x_{d-1}]\!]\big)_a$$

possède une section. On utilise pour cela le résultat bien connu suivant de type GAGA.

Proposition 6.1. — *Soit A un anneau I-adique noethérien. Il y a alors une équivalence de catégories*

$$\textit{Étales finis}\ /\ \textit{Spec}(A)\setminus V(I)\xrightarrow{\sim}\textit{Étales finis}\ /\ \textit{Spa}(A,A)\setminus V(I).$$

Il suffit de montrer un tel théorème du type GAGA pour les faisceaux cohérents et les fibrés vectoriels. Pour cela une méthode consiste à utiliser le point de vue de Raynaud (couplé à son résultat de platification par éclatements dans le cas des faisceaux cohérents, [**?**] sec. 5.4, qui est plus simple que le cas général). En effet, du point de vue de Raynaud

$$\ll\ \mathrm{Spa}(A,A)\setminus V(I)=\varprojlim_{\widetilde{\mathfrak{X}}\to\mathfrak{X}}\ \widetilde{\mathfrak{X}}\ \gg$$

où $\widetilde{\mathfrak{X}}\to\mathfrak{X}$ parcourt les complétés I-adiques des éclatements I-admissibles de $\mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$. D'après Raynaud tout fibré vectoriel sur $\mathrm{Spa}(A,A)_a$ s'étend en un fibré vectoriel sur un tel éclatement formel admissible $\widetilde{\mathfrak{X}}\to\mathfrak{X}$. On peut alors utiliser le théorème GAGF de [**?**] (sec. 5.7) pour algébriser un tel fibré vectoriel. On renvoie à [**?**] (en particulier la section 5.7) pour plus de détails sur ce point de vue (et bien plus).

Afin de conclure la preuve de 5.2 on utilise le *théorème de pureté de Zariski-Nagata (*[**?**]*,* [**?**] *exp. X théo. 5.4)* qui implique que pour $d>1$ on a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} & \text{Étales finis}\ /\ \mathrm{Spec}\big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0,\dots,x_{d-1}]\!]\big) \\ \xrightarrow{\sim}\ & \text{Étales finis}\ /\ \mathrm{Spec}\big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0,\dots,x_{d-1}]\!]\big)\setminus V(x_0,\dots,x_{d-1}). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme de Hensel qui nous dit que $\mathrm{Spec}\big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0,\dots,x_{d-1}]\!]\big)$ est simplement connexe.

Remarque 6.2. — Soit $C|\mathbb{F}_q$ un corps perfectoïde algébriquement clos. Alors

$$(\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\})_C=\mathring{\mathbb{B}}_C^{d,1/p^\infty}\setminus\{(0,\dots,0)\}$$

une boule ouverte perfectoïde épointée en l'origine sur C. Cet espace n'est pas simplement connexe. Cela montre la nécessité de travailler dans un cadre absolu en particulier dans la section 7 qui suit. On constate de plus sur cet exemple que le π_1 d'un tel objet n'est pas invariant par changement du corps de base algébriquement clos contrairement à Div^d et $(\mathrm{Div}^1)^d$ intervenant dans le lemme de Drinfeld-Scholze.

6.2. Interprétation joaillère des fonctions symétriques élémentaires. — On n'utilise pas le lemme suivant dans ce texte. Néanmoins il nous parait intéressant de le noter.

Il y a un isomorphisme de faisceaux pro-étales

$$\mathrm{Spa}(E)^d/\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_E)^{d-1} \times \mathrm{Spa}(E).$$

Démonstration. — Le diamant $\mathrm{Spa}(E)^d$ représente le foncteur

$$(R, R^+) \longmapsto (R^{00} \cap R^\times)^d$$

sur les $\mathbb{F}_q$-algèbres affinoïdes perfectoïdes. Le faisceau $\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_E)^{d-1} \times \mathrm{Spa}(E)$ est quant à lui donné par

$$(R, R^+) \longmapsto (R^{00})^{d-1} \times (R^{00} \cap R^\times).$$

Il y a alors une application fonctorielle $\mathfrak{S}_d$-invariante

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(E)^d & \longrightarrow & \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_E)^{d-1} \times \mathrm{Spa}(E) \\ (x_1, \ldots, x_d) & \longmapsto & (\sigma_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \sigma_d(x_1, \ldots, x_d)) \end{array}$$

où $(\sigma_i)_i$ sont les fonctions symétriques élémentaires. Pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ cela correspond à un morphisme de S-espaces perfectoïdes

$$f : (\mathbb{D}_S^*)^d \longrightarrow \mathbb{D}_S^d \times \mathbb{D}_S^*$$

où $\mathbb{D}$ désigne un disque ouvert et $\mathbb{D}^*$ un disque ouvert épointé. On vérifie que si $S = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ avec (C, C^+) un corps affinoïde perfectoïde algébriquement clos alors l'application déduite

$$\mathbb{D}^*(C)^d \longrightarrow \mathbb{D}^d(C) \times \mathbb{D}^*(C)$$

est surjective de fibres les $\mathfrak{S}_d$-orbites. On vérifie de plus que f est quasi-compact. Il en résulte que pour tout S, f est quasi-profini et est un épimorphisme pro-étale. De la même façon le morphisme

$$(\mathbb{D}_S^*) \times \mathfrak{S}_d \longrightarrow (\mathbb{D}_S^*)^d \times_{\mathbb{D}_S^d \times \mathbb{D}_S^*} (\mathbb{D}_S^*)^d$$

est quasi-pro-étale surjectif. On en déduit le résultat. □

On en déduit que Div^d est un quotient pro-étale de $(\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_E)^\diamond)^{d-1} \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$. On ignore si ce résultat pourrait être utile.

7. Le cas d'inégales caractéristiques

7.1. Diamants absolus et diamants : une technique de descente. — On prend la définition suivante.

***Définition 7.1.* —** Un espace perfectoïde, resp. diamant, absolu est un faisceau pro-étale X sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ tel que pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ le tiré en arrière X_S soit représentable par un espace perfectoïde, resp. un diamant.

Voici quelques exemples :

1. Bien sûr $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$, l'objet final non représentable du topos pro-étale, est un espace perfectoïde absolu.
2. Plus généralement soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel noethérien formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q)$ i.e. $\mathfrak{X}_{red}$ est de type fini. Alors $\mathfrak{X}$ est un espace perfectoïde absolu qui n'est pas un espace perfectoïde. On a par exemple si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q[\![x_1, \ldots, x_d]\!])$,
$$\mathfrak{X}_S = \mathring{\mathbb{B}}_S^{d,1/p^\infty}$$
la boule ouverte perfectoïde sur S de dimension d. Plus généralement si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q[\![x_1, \ldots, x_d]\!]/I)$, $\mathfrak{X}_S = V(I) \subset \mathring{\mathbf{B}}_S^{d,1/p^\infty}$ comme sous-espace perfectoïde Zariski fermé.
3. Le faisceau pro-étale
$$(R, R^+) \longmapsto R^+$$
est un espace perfectoïde absolu représenté au-dessus de S par la boule fermée perfectoïde de dimension 1 sur S. Il n'est pas associé à un schéma formel sur $\mathbb{F}_q$.
4. Pour $d > 0$, $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ est un diamant absolu et même un espace perfectoïde absolu associé à un schéma formel lorsque $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$. Lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ et $d > 1$ ce diamant absolu n'est pas un espace perfectoïde absolu.

Notons
$$F = \mathbb{F}_q((T^{1/p^\infty})).$$
Le lemme suivant est la remarque clef qui permet d'analyser les objets absolus à partir des objets usuels. Par « topologie analytique » on entend la topologie usuelle de l'espace adique.

Le morphisme $\mathrm{Spa}(F) \to \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$ est un épimorphisme sur le gros site analytique perfectoïde.

Démonstration. — C'est une simple conséquence du fait que par définition toute algèbre perfectoïde possède une pseudo-uniformisante. □

On en déduit aussitôt la proposition suivante.

Proposition 7.2. — *La catégorie des espaces perfectoïdes, resp. diamants, absolus est équivalente à la catégorie des espaces perfectoïdes, resp. diamants, sur Spa(F) munis d'une donnée de descente relativement au diagramme*
$$Spa(F) \times Spa(F) \times Spa(F) \rightrightarrows Spa(F) \times Spa(F) \rightrightarrows Spa(F).$$

On remarquera que ce diagramme de descente est particulièrement agréable puisque *chacune des flèches de ce diagramme est une fibration triviale en disques ouverts perfectoïdes épointés*. Une autre remarque est que *l'on peut remplacer Spa(F) dans la proposition précédente par Spa$(F)/\varphi^{\mathbb{Z}}$*. Donnons un exemple d'application de ceci (nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite). Si X est un diamant absolu par définition un revêtement étale fini de X est un morphisme de faisceaux pro-étales $U \to X$ tel que pour tout S perfectoïde $U_S \to X_S$ soit un morphisme étale fini surjectif de diamants.

L'espace perfectoïde absolu $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est simplement connexe au sens où tout revêtement étale fini possède une section.

Démonstration. — On utilise le lemme de Drinfeld-Scholze ([**?**]) en égales caractéristiques. D'après celui-ci si $F = \overline{\mathbb{F}}_q((T^{1/p^\infty}))$ et $d > 0$
$$\ll \pi_1\big((\mathrm{Spa}(F)/\varphi^{\mathbb{Z}})^d\big) = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)^d \gg .$$
Soit $X \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ un revêtement étale fini d'espaces perfectoïdes absolus et A le $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$-ensemble fini discret associé au revêtement étale fini $X \times_{\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)} \mathrm{Spa}(F)/\varphi^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spa}(F)/\varphi^{\mathbb{Z}}$. Notons $pr_1, pr_2 : \Gamma \times \Gamma \rightrightarrows \Gamma$ les deux projections. La donnée de descente sur le revêtement précédent de $\mathrm{Spa}(F)/\varphi^{\mathbb{Z}}$ induit un isomorphisme de $\Gamma \times \Gamma$-modules $f : pr_1^* A \xrightarrow{\sim} pr_2^* A$, soit encore f est une bijection de A dans lui-même vérifiant $f(\gamma_1.a) = \gamma_2.a$ pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. On en déduit que l'action de Γ sur A est triviale et le résultat s'en déduit facilement. □

Voici une autre application du diagramme de descente précédent. En utilisant le théorème de changement de base lisse ([**?**] théo. 4.5.1) et le fait que les flèches du diagramme de descente de 7.2 sont acycliques on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.3. — *Soit Λ un anneau fini dans lequel p est inversible et X un $\overline{\mathbb{F}}_q$-schéma séparé de type fini. Notons X_{abs} pour l'espace perfectoïde absolu associé à X vu comme faisceau sur le gros site étale perfectoïde. On a alors*
$$H^\bullet_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{\text{ét}}(X_{abs}, \Lambda).$$

7.2. Réduction à un théorème de pureté. — En analysant la preuve du théorème 5.2 en égales caractéristiques on se rend compte que le point crucial est l'utilisation du théorème de pureté de Zariski-Nagata. La preuve en inégales caractéristiques de 5.2 repose sur cette observation.

Le morphisme de diamants « produit de d éléments »
$$\big(\mathbf{B}^{\varphi=\pi}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}\big)^d \longrightarrow \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}$$
est quasi-pro-étale surjectif et induit un isomorphisme de faisceaux pro-étales
$$\big(\mathbf{B}^{\varphi=\pi}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}\big)^d / \underline{\Delta} \rtimes \mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \{0\}$$
où $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in (E^\times)^d \mid \prod_{i=1}^d \lambda_i = 1\}$ qui agit par multiplication.

Démonstration. — La preuve est identique à celle de la proposition 2.16. □

Le résultat suivant ramène la preuve de 5.2 à un résultat de pureté.

Soit $U \to \mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$ étale fini. S'il s'étend en un morphisme étale fini au-dessus du diamant absolu $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d}$ il est alors trivial.

Démonstration. — On utilise le morphisme

$$f : \left(\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}\right)^d \longrightarrow \mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$$

introduit dans le lemme 7.2 précédent. Si U s'étend à $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d}$ alors $f^{-1}(U)$ s'étend en un revêtement étale fini de

$$\left(\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi}\right)^d \setminus \{(0,\dots,0)\} \simeq \mathrm{Spa}\Big(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!], \overline{\mathbb{F}}_q[\![x_0^{1/p^\infty},\dots,x_{d-1}^{1/p^\infty}]\!]\Big)_a$$

dont on sait qu'il est simplement connexe lorsque $d > 1$ (cf. section 6). On a donc

$$f^{-1}(U) \simeq \left(\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}\right)^d \times A$$

où A est un ensemble fini. Puisque l'espace perfectoïde $\left(\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}\right)^d$ est connexe l'action de $\Delta \rtimes \mathfrak{S}_d$ sur $f^{-1}(U)$ est donnée par une action de ce groupe sur l'ensemble fini A. Remarquons maintenant la chose suivante (ce point là de la démonstration est inspiré de [**?**] chap. IV Rem. 5.8). Notons $G = \Delta \rtimes \Sigma_d$. Soit $C|\overline{\mathbb{F}}_q$ un corps perfectoïde algébriquement clos. Pour $x \in (\mathbf{B}(C)^{\varphi=\pi} \setminus \{0\})^d$ notons G_x le stabilisateur de x. On remarque alors que

$$\left\langle G_x \right\rangle_{x \in (\mathbf{B}(C)^{\varphi=\pi} \setminus \{0\})^d} = G$$

(sous-groupe engendré). De plus pour un tel point géométrique x

$$A = f^{-1}(U)_x = U_{f(x)} = A/G_x.$$

et donc G_x agit trivialement sur A. Le groupe G agit donc trivialement sur A. On conclut puisque

$$U = f^{-1}(U)/\underline{G} = \mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \times A$$

comme faisceau pro-étale quotient. □

7.3. Retour au monde réel : dévissage du résultat de pureté à un énoncé de pureté en géométrie rigide. — On veut appliquer le lemme 7.2 afin de conclure quant à la démonstration de 5.2. Le problème bien sûr est que $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d}$ n'est pas un diamant mais seulement un diamant absolu. On va appliquer la proposition 7.2. Pour cela la première étape consiste à choisir une présentation « sympathique » de l'espace de Banach-Colmez $\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d}$.

On note $F = \overline{\mathbb{F}}_q(\!(T^{1/p^\infty})\!)$. Choisissons $t_1,\dots,t_d \in \mathbf{B}(F)^{\varphi=\pi}$ tels que pour tout $i \neq j$, $V(t_i) \cap V(t_j) = \emptyset$ comme sections de $\mathcal{O}(1)$ sur la courbe X_F. Notons pour $i \in \{1,\dots,d\}$

$$\hat{t}_i = \prod_{j \neq i} t_j.$$

Il y a une suite exacte de faisceaux pro-étales sur $\mathrm{Spa}(F)$

$$0 \longrightarrow \underline{V} \xrightarrow{u} \left(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi}\right)^d \xrightarrow{v} \mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d} \longrightarrow 0$$

où

$$\begin{aligned} v(x_1,\dots,x_d) &= \sum_{i=1}^d x_i \hat{t}_i \\ V &= \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_d \in E^d \mid \sum_{i=1}^d \lambda_i = 0\right\} \\ u(\lambda_1,\dots,x_d) &= (\lambda_1 t_1,\dots,\lambda_d t_d). \end{aligned}$$

Démonstration. — On travaille sur la courbe X_F (le mieux étant de travailler sur la version algébrique de [**?**] pour ce genre de problèmes). On vérifie que l'on a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow V \otimes_E \mathcal{O}_{X_F} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_F}(1)^d \longrightarrow \mathcal{O}_{X_F}(d) \longrightarrow 0$$

où les morphismes sont analogues à ceux donnés dans l'énoncé (l'exactitude au milieu se fait en comptant les degrés une fois prouvé que la suite est exacte à ses extrémités). On peut alors appliquer le foncteur $R\tau_*$ où $\tau : \widetilde{(X_F)}_{\text{pro-ét}} \to \widetilde{\text{Spa}(F)}_{\text{pro-ét}}$ (cf. [**?**]). □

Le diamant $(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d$ est un disque perfectoïde ouvert de dimension d sur F et $(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d \setminus \underline{V}$ en est un ouvert. On a alors le résultat de pureté suivant.

Proposition 7.4. — *Si $d > 2$ il y a une équivalence*

$$\textit{Étales finis} \,/\, (\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \,/\, (\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d \setminus \underline{V}.$$

Démonstration. — Fixons un groupe de Lubin-Tate $\mathscr{G}$ sur $\mathcal{O}_E$. Soit $K|E$ un corps perfectoïde contenant les points de torsion de $\mathscr{G}$ et muni d'une identification $K^\flat = F$. On a alors

$$\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi} = \widetilde{\mathscr{G}}_K^\flat$$

où

$$\widetilde{\mathscr{G}} = \varprojlim_{\times\pi} \mathscr{G}. \tag{8}$$

D'après le théorème de pureté de Scholze il s'agit de montrer que

$$\text{Étales finis} \,/\, \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \xrightarrow{\sim} \text{Étales finis} \,/\, \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \setminus \underline{V}$$

où $V \subset \widetilde{\mathscr{G}}^d(K)$. Notons

$$f_n : \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \longrightarrow \mathscr{G}_K^d$$

la projection sur l'étage de niveau n dans la puissance d-ième de la limite projective (8). Ce morphisme f_n est un $\pi^n \underline{T_\pi(\mathscr{G})^d}$-torseur pro-étale et

$$f_n^{-1}(f_n(V)) = V + \pi^n T_\pi(\mathscr{G})^d$$

avec $f_n(V) \subset \mathscr{G}^d(\mathcal{O}_K)$ profini. Puisque

$$\widetilde{\mathscr{G}}_K^d \setminus \underline{V} = \bigcup_{n \geq 0} \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \setminus \underline{V + \pi^n T_\pi(\mathscr{G})^d}$$

il suffit de montrer que pour tout n

$$\text{Étales finis} \,/\, \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \xrightarrow{\sim} \text{Étales finis} \,/\, \widetilde{\mathscr{G}}_K^d \setminus \underline{V + \pi^n T_\pi(\mathscr{G})^d}.$$

Cela se déduit du théorème 7.12. □

Corollaire 7.5. — *Si $d > 2$ il y a une équivalence*

$$\textit{Étales finis} \,/\, \mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d} \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \,/\, \mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}.$$

Démonstration. — En effet, puisque les morphismes étales finis satisfont la descente pro-étale, la catégorie des morphismes étales finis vers $\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d}$, resp. $\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$, est équivalente à celle des morphismes étales finis $\underline{V}$-équivariants vers $(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d$, resp. $(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d \setminus \underline{V}$. □

Afin de conclure pour appliquer la proposition 7.2 il suffit de prouver le résultat suivant.
Pour $S \in \{\text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F), \text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F)\}$ et $d > 2$ le foncteur

$$\text{Étales finis} \,/\, \mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d} \longrightarrow \text{Étales finis} \,/\, \mathbf{B}_S^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. — On traite le cas $S = \mathrm{Spa}(F) \times \mathrm{Spa}(F)$, l'autre cas étant identique. Utilisant la présentation du lemme 7.3 on se ramène à vérifier que

$$\text{Étales finis} \,/\, (\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi})^d \longrightarrow \text{Étales finis} \,/\, (\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi})^d \setminus \big(\underline{V}_F \times_{\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)} \mathrm{Spa}(F)\big)$$

est pleinement fidèle. Fixons une identification

$$(\mathbf{B}^{\varphi=\pi})^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q[\![X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_d^{1/p^\infty}]\!])$$

et donc

$$(\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d = \mathring{\mathbb{B}}_F^{d,1/p^\infty}$$

une boule ouverte perfectoïde sur F. On a alors

$$(\mathbf{B}_S^{\varphi=\pi})^d = (\mathbf{B}_F^{\varphi=\pi})^d \times_{\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)} \mathrm{Spa}(F) = \mathring{\mathbb{B}}_F^{d,1/p^\infty} \times_{\mathrm{Spa}(F)} \mathring{\mathbb{B}}_F^{1,1/p^\infty}.$$

On a de plus

$$V \subset \mathring{\mathbb{B}}_F^d(F)$$

comme sous-ensemble localement profini. Fixons des boules fermées $\mathcal{B}_1 \subset \mathring{\mathbb{B}}_F^d$ et $\mathcal{B}_2 \subset \mathring{\mathbb{B}}_F^1$ et soit $V' = V \cap \mathcal{B}_1$. Il suffit alors de montrer que

$$\text{Étales finis} \,/\mathcal{B}_1^{1/p^\infty} \times \mathcal{B}_2^{1/p^\infty} \longrightarrow \text{Étales finis} \,/(\mathcal{B}_1^{1/p^\infty} \setminus \underline{V'}) \times \mathcal{B}_2^{1/p^\infty}$$

est pleinement fidèle. D'après le théorème d'approximation d'Elkik on peut enlever les perfectisés i.e. il suffit de montrer que le foncteur

$$\text{Étales finis} \,/\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \longrightarrow \text{Étales finis} \,/(\mathcal{B}_1 \setminus \underline{V'}) \times \mathcal{B}_2$$

est pleinement fidèle. Cela résulte du même résultat pour les fibrés vectoriels. En effet, d'après Lütkebohmert ([**?**]) tout fibré vectoriel sur $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ est trivial. Le résultat se déduit alors d'un résultat de type Hartogs : pour $\rho \in |F| \cap]0,1[$

$$\mathcal{O}(\mathbb{B}^d \times \mathbb{B}^1) = \mathcal{O}\big(\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}^d(\rho) \times \mathbb{B}^1\big)$$

(cf. le début de la preuve de 7.6). □

7.4. Un théorème de pureté en géométrie rigide. —

Théorème 7.6. — *Soit X un K-espace rigide lisse quasi-compact quasi-séparé purement de dimension $d > 2$ et $Z \subset X(K)$ un sous-ensemble profini. Il existe alors une famille d'ouverts admissibles quasi-compacts $(U_\alpha)_\alpha$, $U_\alpha \subset X \setminus Z$, qui forment un recouvrement admissible de $X \setminus Z$ et tels que pour tout i le foncteur de restriction à U_α induise une équivalence*

$$\textit{Étales finis} \,/\, X \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \,/U_\alpha.$$

En particulier,

$$\textit{Étales finis} \,/\, X \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \,/X \setminus Z.$$

Par lissité de X tout point de $X(K)$ possède un voisinage isomorphe à $\mathbb{B}^d$ la boule fermée de dimension d sur K. On peut donc supposer que $X = \mathbb{B}^d$. Par compacité de Z pour tout $\rho \in]0,1[\cap |K|$ on peut trouver un nombre fini d'élément $x_1, \dots, x_n \in Z$ tels que

$$Z \subset \coprod_{i=1}^n \mathbb{B}^d(x_i, \rho) \subset \mathbb{B}^d.$$

On peut alors trouver $\rho', \rho'' \in]0,1[\cap |K|^{1/\infty}$ tels que

$$\rho < \rho' < \rho'' < |x_i - x_j| \text{ si } i \neq j.$$

Considérons l'ouvert

$$U = \mathbb{B}^d \setminus \coprod_{i=1}^n \mathring{\mathbb{B}}(x_i, \rho')$$

où $\mathring{\mathbb{B}}$ désigne une boule ouverte. Lorsque ρ, ρ' et ρ'' varient de tels ouverts forment un recouvrement admissible de $X \setminus Z$. Il suffit maintenant de montrer que pour tout i

$$\text{Étales finis} \,/\, \mathbb{B}(x_i, \rho'') \xrightarrow{\sim} \text{Étales finis} \,/\, \mathbb{B}(x_i, \rho'') \setminus \mathring{\mathbb{B}}(x_i, \rho').$$

C'est exactement ce que dit la proposition suivante (la descente relativement à l'extension des scalaires vis à vis d'une extension de degré fini de K implique qu'on peut supposer que nos rayons sont dans $|K|$).

Proposition 7.7. — *Pour $\rho \in]0,1[\cap|K|$ et $d>2$ on a une équivalence de catégories*

$$\textit{Étales finis} \ / \ \mathbb{B}^d \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \ / \ \mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}^d(\rho).$$

Démonstration. — La pleine fidélité résulte du lemme d'Hartogs 7.4 qui suit. D'après le théorème 7.8 de Lütkebohmert tout revêtement étale fini de $\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}^d$ s'étend en un revêtement fini de $\mathbb{B}^d$ que l'on peut supposer normal (i.e. on dispose d'un « main théorème de Zariski » dans ce cadre là, ce qui n'est pas vrai à priori en général en géométrie rigide). On conclut en utilisant la proposition 7.10. □

Pour $d>1$ le foncteur de restriction

$$\text{Fibrés vectoriels sur } \mathbb{B}^d \longrightarrow \text{Fibrés vectoriels sur } \mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho)$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. — D'après [**?**] tout fibré vectoriel sur $\mathbb{B}^d$ est trivial. Il suffit alors de vérifier que

$$\mathcal{O}(\mathbb{B}^d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\big(\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho)\big)$$

ce qui est immédiat par un calcul. □

Théorème 7.8 **(Lütkebohmert [?]).** — *Pour $d>2$ et $\rho \in]0,1[\cap|K|$ tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho)$ s'étend canoniquement en un faisceau cohérent sur $\mathbb{B}^d$ au sens où $\Gamma\big(\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho), \mathscr{E}\big)$ est un $\mathcal{O}(\mathbb{B}^d)$-module de type fini tel que*

$$\Gamma\big(\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho), \mathscr{E}\big) \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{B}^d)} \mathcal{O}_{\mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}(\rho)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}.$$

Remarque 7.9. — Le théorème précédent de Lütkebohmert est plus général que le cas des fibrés vectoriels, il est vrai en profondeur ≥ 3. Il s'agit de l'analogue en géométrie rigide de résultats de Siu en géométrie analytique complexe ([**?**]) (cf. également [**?**], en particulier pour un exemple de faisceau cohérent sur un disque épointé de dimension 2 ne s'étendant pas en un faisceau cohérent). L'analogue en géométrie algébrique de ces résultats est dû à Michèle Raynaud ([**?**]).

Proposition 7.10. — *Soit $U \to \mathbb{B}^d$ avec $d>1$ un morphisme fini avec U normal et $\partial\mathbb{B}^d = \mathbb{B}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}^d$. Si $U_{|\partial\mathbb{B}^d}$ est étale au-dessus de $\partial\mathbb{B}^d$ alors $U \to \mathbb{B}^d$ est étale.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p} = (f)$ un idéal premier de hauteur 1 dans l'anneau factoriel $A = \mathcal{O}(\mathbb{B}^d)$. D'après le lemme 7.4 $V(f) \cap \partial\mathbb{B}^d \neq \emptyset$. On peut donc trouver des points $x_1, \ldots, x_r \in (\partial\mathbb{B}^d)^{an}$, l'espace de Berkovich associé à $\partial\mathbb{B}^d$, tels que si $\mathscr{I} = \mathcal{O}_{\mathbb{B}^d} f$,

$$\forall g \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^d),\ g(x_1) = \cdots = g(x_r) = 0 \Leftrightarrow g_{|\partial\mathbb{B}^d} \in \Gamma(\partial\mathbb{B}^d, \mathscr{I})$$

(il suffit de prendre la réunion de tous les points du bord de Shilov de $V(f) \cap V$ lorsque V parcourt un recouvrement affinoïde admissible fini de $\partial\mathbb{B}^d$). Puisque $\times f : \mathcal{O}_{\mathbb{B}^d} \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}$, d'après Hartogs

$$\Gamma(\partial\mathbb{B}^d, \mathscr{I}) = \mathcal{O}(\mathbb{B}^d) f.$$

Soient alors $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \in \mathrm{Spec}(A)$ les supports des valuations associées à $x_1, \ldots, x_r$. On a donc

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$$

et donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$ pour un indice i. Il existe donc $x \in \partial(\mathbb{B}^d)^{an}$ tel que

$$A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathbb{B}^d)^{an},x}.$$

Si $\mathrm{B} = \mathcal{O}(U)$ le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est étale en $\mathfrak{p}$ puisque c'est le cas après tiré en arrière à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{(\mathbb{B}^d)^{an},x})$. On conclut en appliquant le théorème de pureté de Zariski-Nagata puisque B est normal. □

Soit $d>1$ et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^d)$ qui n'est pas une unité alors $V(f) \cap \partial\mathbb{B}^d \neq \emptyset$.

Démonstration. — Par quasi-compacité de $V(f)$, si $V(f) \cap \partial\mathbb{B}^d = \emptyset$ il existe $\rho \in]0,1[\cap|K|$ tel que

$$V(f) \subset \mathbb{B}^d(\rho).$$

On en déduit que

$$\Gamma(\mathbb{B}^d, \mathcal{O}_{\mathbb{B}^d}/f) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{B}^d(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{B}^d}/f).$$

Puisque cet opérateur de restriction est complètement continu cela implique que $\mathcal{O}(V(f))$ est de dimension finie sur K. C'est impossible puisque $\dim V(f) > 0$. □

Remarque 7.11. — Un autre démonstration plus élémentaire est la suivante. On peut supposer que $\|f\|_\infty = 1$. Soit alors $\tilde{f} \in k_K[X_1, \ldots, X_d] \setminus \{0\}$ sa réduction. Puisque $\tilde{f}$ n'est pas une unité et $d > 1$ il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $\tilde{f} \notin k_K[X_1, \ldots, X_d][X_i^{-1}]^\times$. On conclut grâce à cela. Cependant la démonstration moins élémentaire précédente s'applique dans des contextes plus généraux en rapport avec le bord de Shilov des affinoïdes.

Voici finalement le résultat que nous utilisons dans ce texte.

Théorème 7.12. — *Soit X un K-espace rigide lisse quasi-compact quasi-séparé purement de dimension $d > 2$ et $Z \subset X(K)$ un sous-ensemble profini. Supposons nous donné un système projectif d'espaces rigides $(X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = X$, à morphismes de transition étales finis et un espace perfectoïde X_∞ tel que*

$$X_\infty \sim \varprojlim_{n\geq 0} X_n.$$

On a alors

$$\textit{Étales finis} \,/\, X_\infty \xrightarrow{\sim} \textit{Étales finis} \,/ X_\infty \setminus f^{-1}(Z)$$

où $f : X_\infty \to X$.

Démonstration. — Il suffit de prendre les ouverts U_α du théorème 7.6. En effet,

$$2-\varinjlim_{n\geq 0} \text{Étales finis} \,/\, X_n \xrightarrow{\sim} \text{Étales finis} \,/\, X_\infty$$

$$2-\varinjlim_{n\geq 0} \text{Étales finis} \,/ X_n \times_X U_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{Étales finis} \,/\, X_\infty \times_X U_\alpha$$

puisque X et U_α sont quasi-compacts quasi-séparés. Remarquons maintenant que si $Y \to X_n \times_X U_\alpha$ est étale fini et $\overline{Y} \to X$ désigne l'extension canonique du morphisme étale fini composé

$$Y \longrightarrow X_n \times_X U \longrightarrow U_\alpha$$

alors par pleine fidélité de la restriction au-dessus de U le morphisme $Y \to X_n \times_X U_\alpha$ s'étend de façon unique en un morphisme $\overline{Y} \to X_n$. □

Remarque 7.13. — Ofer Gabber a expliqué à l'auteur pouvoir démontrer le théorème précédent lorsque $d = 2$ et le corps K est de caractéristique 0. La méthode de démonstration de Gabber repose sur les résultats de [**?**] et est différente de la précédente lorsque $d > 2$. Cela permettrait donc améliorer le théorème 5.2 et de montrer que $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^2} \setminus \{0\}$ est simplement connexe.

Références

---

19 novembre 2018

LAURENT FARGUES, Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
E-mail : laurent.fargues@imj-prg.fr