



**HAL**  
open science

# La proportionnalité numérique dans le Livre VII des Eléments de Campanus

Sabine Rommevaux

► **To cite this version:**

Sabine Rommevaux. La proportionnalité numérique dans le Livre VII des Eléments de Campanus. Revue d'Histoire des Mathématiques, 1999, 5(1), pp. 83-126. hal-01456479

**HAL Id: hal-01456479**

**<https://hal.science/hal-01456479>**

Submitted on 25 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## LA PROPORTIONNALITÉ NUMÉRIQUE DANS LE LIVRE VII DES *ÉLÉMENTS* DE CAMPANUS

Sabine Rommevaux (\*)

---

**RÉSUMÉ.** — La version des *Éléments* d'Euclide de Campanus (XIII<sup>e</sup> siècle) n'est pas une traduction mais une recension faite à partir de versions arabo-latines du XIII<sup>e</sup> siècle et d'ouvrages originaux comme l'*Arithmétique* de Jordanus. L'étude de la théorie de la proportionnalité numérique du Livre VII montre la nature et l'ampleur du travail de Campanus sur le traité euclidien tel qu'il lui a été transmis. Nous verrons que ses réflexions s'inscrivent dans le projet euclidien lui-même qu'il cherche à expliciter et à renforcer, s'attachant tout particulièrement à la structure logique du traité. Pour cela, il dégage les notions fondamentales de cette théorie que sont les notions de « partie » et « parties » et introduit la notion médiévale de « dénomination d'un rapport numérique ».

**ABSTRACT.** — NUMERICAL PROPORTIONALITY IN BOOK VII OF CAMPANUS' *ELEMENTS*. — Campanus' 13th-century version of Euclid's *Elements* is not a translation but a comment written on the basis of Arabic and Latin 12th-century sources and original works such as Jordanus' *Arithmetic*. The study of numerical proportionality in Book VII shows the nature and scope of Campanus' work on Euclid's treatise as it was transmitted to him. We shall see that Campanus' reflexions are inscribed in the Euclidean project itself, which, mostly concerned with the logical structure of the treatise, he sought to explain and strengthen. In this perspective, he distinguished fundamental notions in this theory, such as "part" and "parts", and introduced the medieval notion of "denomination of a numerical ratio".

Au milieu du XIII<sup>e</sup> siècle, Campanus<sup>1</sup> compose une version latine des

---

(\*) Texte reçu le 2 décembre 1998, révisé le 29 septembre 1999.

Sabine ROMMEVAUX, CNRS (CRATS), Université de Lille III, BP 149, 59653 Villeneuve d'Ascq CEDEX. Courrier électronique : rommevaux@univ-lille3.fr.

<sup>1</sup> Campanus est né en Italie dans le premier quart du XIII<sup>e</sup> siècle. Ecclésiastique, il bénéficia de la protection du Pape Urbain IV jusqu'en 1263 puis du Cardinal Ottobono Fieschi, futur Pape Adrien V, en 1263–1264. Il fut ensuite, à Paris, aumônier du Pape Nicolas IV (1288–1292), puis du Pape Boniface VIII. Il passa probablement ses dernières années au couvent de Viterbo en Italie où il meurt en 1296. Parmi les œuvres qui lui ont été attribuées citons sa *Theorica planetarum* (environ 1261–1264) et un *Computus maior* (1268) [Toomer 1971, p. 23–29].

*Éléments* d'Euclide<sup>2</sup>. Elle connut très vite un grand succès : le nombre important de manuscrits conservés des XIII<sup>e</sup> et XIV<sup>e</sup> siècles en témoigne<sup>3</sup>. Par ailleurs elle fut imprimée dès 1482 par E. Ratdolt à Venise, puis constamment réimprimée à la Renaissance [Murdoch 1971, p. 448–452] et fut une source importante des mathématiques de la Renaissance. Commandino et Clavius, par exemple, y puiseront largement pour leurs éditions des *Éléments* [Commandino 1572], [Clavius 1574].

Cette version n'est pas une traduction mais une recension — une réécriture — basée sur des traductions arabo-latines faites au XII<sup>e</sup> siècle et sur des traités mathématiques originaux<sup>4</sup>. Ce travail de compilation et de réécriture est particulièrement intéressant à propos de la théorie des proportions numériques, correspondant, dans l'édition de Campanus, aux définitions, postulats et axiomes du Livre VII et aux propositions VII.1–23, c'est-à-dire aux propositions VII.1–22 de l'Euclide grec<sup>5</sup>.

Dans un premier temps nous nous proposerons d'identifier les sources de Campanus pour le Livre VII. Il s'agit en particulier de préciser la (ou les) version(s) des *Éléments* que Campanus a utilisée(s) pour son édition. En effet, certaines de leurs caractéristiques ne sont pas sans conséquence sur le travail d'interprétation et de réécriture de Campanus. Ensuite, nous ferons état des réflexions de Campanus sur la question du double traitement de la proportionnalité, au Livre V pour les grandeurs et au Livre VII pour les nombres. La réponse apportée à cette question est primordiale, puisqu'elle conduit Campanus à préciser et enrichir le cadre conceptuel du Livre VII. Pour cela, il va puiser dans ses sources les définitions de certaines notions fondamentales qui manquent au Livre VII<sup>6</sup>, même si, pour certaines, elles

---

<sup>2</sup> Le plus ancien manuscrit conservé de la version de Campanus est le manuscrit de la bibliothèque de Florence, BN Magliabecch. XI 112 daté de 1259 [Folkerts 1989, p. 39].

<sup>3</sup> Ainsi Menso Folkerts a répertorié cent trente manuscrits antérieurs au XVII<sup>e</sup> siècle dont une dizaine du XIII<sup>e</sup> siècle et une cinquantaine du XIV<sup>e</sup> siècle [Folkerts 1989, p. 38–43].

<sup>4</sup> Par exemple, Campanus mentionne la traduction faite probablement par Gérard de Crémone du commentaire d'an-Nayrīzī aux *Éléments*, la traduction de Gérard d'un opuscule sur la théorie des rapports d'Aḥmad ibn Yūsuf, le *De proportione et proportionalitate*, et l'*Arithmétique* de Jordanus [Murdoch 1968], [Busard 1998, p. 126–127].

<sup>5</sup> Cette expression renvoie à l'édition de I.L. Heiberg, à laquelle nous reprenons sa numérotation.

<sup>6</sup> Certaines de ces notions sont déjà absentes de l'Euclide grec, d'autres sont des lacunes propres aux versions arabo-latines des *Éléments* que Campanus utilise.

sont présentes dans un autre cadre, au Livre V. La notion de « rapport » en est un exemple. Par ailleurs, il emprunte à l'une de ses sources, des postulats et axiomes — *petitiones et communes animi conceptiones* — qu'il insère à la suite des définitions du Livre VII, et qu'il utilise dans l'ensemble des Livres arithmétiques ainsi qu'au Livre X.

Le cadre conceptuel ainsi mis en place, nous examinerons l'apport majeur de Campanus au traité euclidien tel qu'il l'a reçu : la mise en évidence des notions fondamentales de la théorie de la proportionnalité numérique, les notions de « partie » et « parties ». Cette explicitation se fait au niveau des définitions, mais aussi dans les preuves des propositions VII. 4 et 6 et dans l'ajout de la proposition VII.11. Ce faisant, Campanus enrichit le traité euclidien de la théorie médiévale de la dénomination du rapport numérique.

Par ailleurs, au cours des démonstrations, Campanus explicite deux présupposés euclidiens : la transitivité de l'identité des rapports numériques et la propriété selon laquelle deux nombres ayant un même rapport relativement à un même nombre sont égaux. Ces propriétés sont démontrées par Euclide pour les grandeurs au Livre V, mais sont absentes du Livre VII. La démonstration de ces résultats pour les nombres contribue à rendre le cadre conceptuel du Livre VII indépendant de celui du Livre V, tout en accentuant le parallélisme entre les deux théories. Ce rapprochement est enfin visible dans l'ensemble des résultats ajoutés par Campanus et qu'Euclide ne démontre pas pour les nombres, mais qui figurent au Livre V pour les grandeurs.

## I. LES SOURCES DU LIVRE VII DES *ÉLÉMENTS* DE CAMPANUS

### *1. La (ou les) version(s) des Éléments utilisée(s) par Campanus*

Afin d'apprécier le travail effectué par Campanus sur le traité euclidien, il est nécessaire de connaître le ou les texte(s) qu'il a utilisé(s) pour son édition. L'histoire complexe des différentes traductions des *Éléments* faites au Moyen Âge rend très difficile cette identification. Cependant nous pouvons donner quelques caractéristiques du texte, ou des textes, que Campanus peut avoir eu entre les mains.

Il nous faut donner ici quelques éléments sur l'histoire de la transmission du texte des *Éléments*. La tradition<sup>7</sup> rapporte deux traductions des *Éléments* à al-Ḥajjāj ibn Yūsuf ibn Maṭar (IX<sup>e</sup> siècle), la première pour le Calife Hārūn ar-Rashīd et la seconde pour le Calife al-Ma'mūn. Une autre traduction est attribuée à Ishāq ibn Ḥunayn (mort en 910). Elle aurait été révisée par Thābit ibn Qurra (mort en 901). Aucun des manuscrits arabes conservés<sup>8</sup> ne présente un texte pur de ces différentes traductions ; ce sont plutôt des versions de la traduction d'Ishāq, révisée par Thābit, plus au moins contaminée par celles d'al-Ḥajjāj<sup>9</sup>.

Le XII<sup>e</sup> siècle a vu se constituer un ensemble de traductions latines d'ouvrages de langue arabe — œuvres originales ou traductions du grec. Parmi elles figurent plusieurs versions des *Éléments*<sup>10</sup>. Deux d'entre elles sont des traductions complètes, l'une d'Adélarde de Bath (identifiée comme la version « Adélarde I » par Marshall Clagett), l'autre de Gérard de Crémone<sup>11</sup>. Celle que l'on attribue à Hermann de Carinthie<sup>12</sup> est éloignée du texte grec, toutefois Hubert L.L. Busard la considère comme une traduction « libre » des *Éléments* [Busard 1998, p. 119], alors que John Murdoch [1971, p. 447] y voit une recension s'inscrivant dans la tradition adélarde, à moins que ce ne soit la traduction d'une recension arabe, comme le pense Richard Lorch [1987, p. 54].

Marshall Clagett [1953] attribuait une seconde version à Adélarde.

---

<sup>7</sup> Pour l'histoire du texte euclidien, les bio-bibliographies arabes anciennes, comme le *Fihrist* de Ibn an-Nadīm sont des sources précieuses, de même que les commentaires d'an-Nayrīzī ou d'aṭ-Ṭūsī. Voir [Sezgin 1974, p. 103–115], [Lorch 1987] et [Djebbar 1996].

<sup>8</sup> Il y en a une vingtaine dont on peut trouver la liste dans [Folkerts 1989].

<sup>9</sup> En particulier, on a cru pendant longtemps que le texte du fameux *Codex Leidensis* 399/1 contenait une version d'une des traductions d'al-Ḥajjāj. Nous savons maintenant qu'il s'agit d'une version mixte. Voir [De Young 1984, p. 149].

<sup>10</sup> Un important travail d'identification et d'édition des différentes versions latines médiévales du XII<sup>e</sup> siècle a été entrepris depuis Hermann Weissenborn par Marshall Clagett, John Murdoch, Hubert L.L. Busard et Menso Folkerts : [Weissenborn 1880], [Clagett 1953], [Murdoch 1968], [Busard 1968, 1977, 1983a, 1983b, 1996], [Busard ; Folkerts 1992], [Folkerts 1971, 1987, 1989]. À côté des traductions faites à partir de textes en langue arabe, signalons la traduction anonyme latine faite directement à partir du grec, au XII<sup>e</sup> siècle [Busard 1987].

<sup>11</sup> Elles ont été éditées par Hubert L.L. Busard [1983a, 1983b].

<sup>12</sup> Cette version a été éditée par Hubert L.L. Busard [1968, 1977].

Hubert L.L. Busard et Menso Folkerts, qui en ont fait l'édition, rejettent cette attribution et suggèrent qu'elle serait plus vraisemblablement l'œuvre de Robert de Chester [Busard ; Folkerts 1992, p. 18–31] (nous la nommerons ici « version II »). Celle-ci diffère en certains endroits du texte grec qui nous est parvenu, tel qu'il a été édité par I.L. Heiberg : certaines définitions et propositions sont absentes de la version latine, l'ordre des propositions n'est pas le même dans les deux textes<sup>13</sup>. Ces divergences ne sont pas, à de très rares exceptions près, le fait du traducteur latin mais se trouvent dans d'autres versions arabo-latines<sup>14</sup>. Mais si les énoncés qui figurent dans la version de Robert de Chester sont des traductions d'un texte arabe qui reste encore à identifier<sup>15</sup>, les preuves sont souvent résumées, réduites à la description de la construction et l'indication des propositions à utiliser. Ce faisant, l'auteur met l'accent sur la structure logique du traité. Cette version fut très répandue au Moyen Âge et elle donna lieu, dès le XII<sup>e</sup> siècle, à des rédactions qui lui empruntent ses énoncés et développent ses indications de preuve ou proposent des preuves alternatives ; la version dite « Adélarde III »<sup>16</sup> ou « version III » est l'une d'entre elles.

En ce qui concerne le Livre VII qui nous intéresse ici, la comparaison du texte de Campanus avec les différentes versions arabo-latines du XII<sup>e</sup> siècle montre que les énoncés des propositions proviennent de la version de Robert de Chester (?), ou du moins d'une des nombreuses rédactions tirées de cette version. L'histoire très complexe de ces textes ne nous permet pas de dire avec certitude lequel de ces textes Campanus a utilisé.

---

<sup>13</sup> Le tableau comparatif dressé par Hubert L.L. Busard et Menso Folkerts le montre clairement [Busard ; Folkerts 1992, p. 93–99].

<sup>14</sup> La structure globale du texte (absence/présence des définitions et propositions, ordre des propositions), presque identique dans les versions d'Adélarde, d'Hermann de Carinthie et de Robert de Chester, diffère de celle de la version de Gérard de Crémone. Ainsi, les trois premières versions se rattachent à une même tradition textuelle, à laquelle s'apparente la version de Campanus et que l'on appelle généralement « tradition adélarde ».

<sup>15</sup> En l'absence d'une édition des versions arabes cette identification est impossible. Cependant Hubert L.L. Busard pense que le texte arabe utilisé par Robert de Chester pourrait être issu de la tradition hajjajienne [Busard 1983a, p. 5].

<sup>16</sup> Cette version n'est probablement pas d'Adélarde, contrairement à ce que pensait Marshall Clagett [1953]. On peut en trouver une description dans [Clagett 1953] à compléter par [Busard 1998]. Elle est à ce jour inédite. Nous avons consulté les manuscrits Oxford, Balliol College 257, 2r-98v et Oxford, Digby 174, 99r-132v.

Cependant, certaines de ses remarques qui émaillent le Livre VII nous font penser qu'il avait un texte issu de la version II comportant des preuves ou pour le moins des indications de preuves<sup>17</sup> : il peut s'agir soit d'un texte proche de la version de Robert telle que nous la connaissons, soit d'une adaptation du type de la version du XIII<sup>e</sup> siècle éditée récemment par Hubert L.L. Busard [1996] et/ou de la version III. Il est possible aussi que Campanus ait eu plusieurs de ces textes.

## 2. *L'Arithmétique de Jordanus*

Campanus emprunte la plupart des énoncés des définitions, postulats et axiomes qu'il ajoute au début du Livre VII, à l'*Arithmétique* de Jordanus de Nemore, remarquable synthèse entre l'arithmétique euclidienne et celle de Nicomaque transmise par Boèce<sup>18</sup>.

Derrière le nom de Jordanus de Nemore se cache un personnage dont nous ne savons rien. Cependant, si l'on en croit le catalogue de Richard de Fournival, la *Biblionomia* compilée entre 1246 et 1260, on peut attribuer à Jordanus une demi-douzaine d'ouvrages. Dans certains d'entre eux il est fait clairement référence à des traductions du XII<sup>e</sup> siècle. Il est donc probable que l'activité de Jordanus se situe dans la première moitié du XIII<sup>e</sup> siècle<sup>19</sup>.

L'*Arithmétique* de Jordanus s'organise en dix livres<sup>20</sup>. Le Livre I contient, d'une part, la théorie des parties du Livre VII des *Éléments* d'Euclide et d'autre part les formulations arithmétiques des théorèmes d'algèbre géométrique (propositions 1 à 8 du Livre II des *Éléments*)<sup>21</sup>. Les manipulations sur les rapports de nombres font l'objet du Livre II de l'*Arithmétique*. Jordanus y reprend des résultats présentés par Euclide dans les Livres V et VII. Le Livre III s'intéresse aux nombres premiers et composés selon l'exposé fait par Euclide au Livre VII. La recherche de la plus grande commune mesure et du plus petit commun multiple

---

<sup>17</sup> Certains manuscrits de la version II ne contiennent pas les preuves des propositions [Busard 1998, p. 109].

<sup>18</sup> Ce texte a été édité par Hubert L.L. Busard [1991].

<sup>19</sup> Voir [Busard 1991, p. 7–11]. On trouvera une description complète de l'œuvre de Jordanus dans [Hoyrup 1988].

<sup>20</sup> Pour le détail de l'architecture du livre, voir [Busard 1991, p. 12–35].

<sup>21</sup> La source probable en est le commentaire d'Anarithius dans la traduction de Gérard de Crémone [Busard 1991, p. 13].

de deux nombres donnés est exposée au Livre IV. Ces mêmes résultats sont présents dans les Livres VIII et IX des *Éléments*. La multiplication et la division des rapports occupent le Livre V. La théorie des nombres plans et solides figure au Livre VI. Jordanus s'inspire ici de résultats des Livres VIII et IX des *Éléments* et de l'*Arithmétique* de Boèce. Le Livre VII traite des nombres pairs et impairs, objets des Livres VIII et IX d'Euclide. La théorie des nombres figurés reprise par Boèce se trouve au Livre VIII. La nomenclature des rapports numériques due à Nicomaque et transmise au monde latin par Boèce est exposée par Jordanus au Livre IX. Enfin, le Livre X s'intéresse aux médiétés.

Il faut noter que même si les sources de Jordanus sont souvent identifiables, l'auteur réécrit les énoncés dans son propre style et organise à sa guise le matériel qu'il retient, ce qui le conduit à adapter les preuves. Par ailleurs, comme dans la version II, les démonstrations sont souvent réduites à quelques indications.

Une première lecture globale du Livre VII nous a permis de déterminer des sources de l'édition de Campanus : la version II, ou un texte qui en est dérivé, et l'*Arithmétique* de Jordanus. Un examen plus détaillé montre comment Campanus les articule pour composer un texte qui réponde aux buts qu'il s'est fixés et que nous découvrirons au fur et à mesure de nos investigations.

## II. LE CADRE CONCEPTUEL ET AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DE LA PROPORTIONNALITÉ NUMÉRIQUE

### *1. Le double traitement de la proportionnalité dans les Livres V et VII et la question de l'utilisation des résultats du Livre V dans le Livre VII*

Avant d'entamer l'examen du travail de Campanus sur le traité euclidien tel qu'il l'a reçu, nous nous arrêterons quelques instants sur ce qui peut paraître comme une difficulté : le double traitement de la proportionnalité, des grandeurs au Livre V et des nombres au Livre VII. Campanus s'interroge à ce sujet et la réponse qu'il apporte le conduit à faire des ajouts importants au traité euclidien comme nous le verrons plus loin.

La question du double traitement de la proportionnalité a été débattue par les historiens contemporains qui y ont vu une difficulté<sup>22</sup>. Toutefois

---

<sup>22</sup> On trouve les éléments de ce débat dans le chapitre que Bernard Vitrac consacre à

elle peut être résolue en notant que les nombres ne font pas partie des grandeurs et que par conséquent les résultats du Livre V ne sauraient s'appliquer aux entiers<sup>23</sup>. Certes un rapprochement entre les deux théories est possible dans le cas particulier des grandeurs commensurables et c'est ce que fait Euclide au Livre X, sans toutefois le problématiser. Mais aux Livres V et VII, les théories de la proportionnalité sont clairement séparées et fondées sur des principes distincts.

Les mathématiciens médiévaux ne manquent pas de faire eux aussi le parallèle entre le Livre V et le Livre VII. Ainsi, l'auteur de la version III rapproche la proposition VII.5 de la proposition V.1. Dans cette dernière on considère des grandeurs en quantité quelconque,  $A, B, C, etc.$ , et d'autres en même quantité,  $E, F, G, etc.$ , qui sont équimultiples de  $A, B, C, etc.$  On en déduit que la somme  $E + F + G + etc.$  est le même multiple de la somme  $A + B + C + etc.$  que  $E$  de  $A$ . Par ailleurs, dans la proposition VII.5, on se donne quatre nombres  $A, B, C, D$  tels que  $A$  est la même partie de  $B$  que  $C$  de  $D$  et on montre que la somme  $A + C$  est la même partie de la somme  $B + D$  que  $A$  de  $B$ . Après avoir fait le lien entre ces deux propositions, l'auteur de la version III précise toutefois que la théorie des nombres développée au Livre VII ne fait pas double emploi avec celle du Livre V car elles n'ont pas le même objet : l'une s'occupe de quantités discrètes et l'autre de quantités continues<sup>24</sup>. Campanus fait lui aussi la distinction entre les objets des Livres V et VII, qui sont respectivement les « quantités en genre » et les nombres<sup>25</sup>. Ce que recouvre l'expression « quantité en genre » n'est pas

---

cette question [Vitrac 1994, p. 507–538].

<sup>23</sup> C'est l'explication avancée par Jean-Louis Gardies et reprise par Bernard Vitrac, qui rejette l'hypothèse historique selon laquelle le Livre VII porterait les traces d'une théorie ancienne de la proportionnalité, antérieure à la découverte de l'irrationalité et rendue caduque par la théorie eudoxéenne exposée au Livre V. La plupart des partisans de cette hypothèse (par exemple Thomas L. Heath [1956, vol. 2, p. 113]) admettent que la théorie du Livre V s'applique aussi aux nombres qu'il faut alors considérer comme une des espèces de la grandeur, opinion d'ailleurs avancée par certains commentateurs médiévaux [Vitrac 1994, p. 507–508] et [Gardies 1988, p. 10–11].

<sup>24</sup> « *Nec est censendum presentem doctrinam numerorum superfluere post illam, cum ibi erlegerit de continua hic de discreta quantitate, vel ibi de genere hic de specie* » (Oxford, Balliol College 257, fol. 34v).

<sup>25</sup> Ainsi, dans un commentaire au début de la preuve de la proposition VII. 5, Campanus dit : « *Volens Euclides hos libros de numeris aliquo praecedentium non indigere, sed per seipsos stare, partem eius quod proposuit per primam quinti de quantitibus in*

ici explicité, mais traditionnellement, le genre de la quantité contient d'une part les quantités continues ou les grandeurs et d'autre part les nombres. Campanus ne précise pas ce point. Son propos est d'un autre ordre : dans un long commentaire à la fin des définitions du Livre V, il présente la problématique du Livre V comme celle des rapports des quantités continues, tant rationnels, qu'irrationnels ; il fait alors le lien entre les rapports rationnels et les rapports de nombres au moyen de la notion de dénomination<sup>26</sup>, lien légitimé ensuite au Livre X.

Bien que l'auteur de la version III fasse une distinction très nette entre les objets des deux livres, il ne s'interdit pas d'utiliser, à plusieurs reprises, des résultats du Livre V dans les démonstrations du Livre VII. Il n'est pas le seul : l'auteur de la version II, toujours dans la proposition VII.5, après avoir remarqué que les deux plus grands nombres sont des équi-multiples des deux plus petits, conclut en disant que le résultat est prouvé grâce à V.1<sup>27</sup>. Dans VII.11 (selon la numérotation de la version II = VII.12 de Campanus), il fait appel à V.19, dans VII.12 à V.1, dans VII.13 à V.16, dans VII.14 et 17 à V.11, dans VII.16 et 19 à V.9.

Campanus fait lui aussi le parallèle entre ces propositions. Il remarque ainsi que l'argumentation de la preuve de VII.5 est la même que celle de V.1<sup>28</sup>, mais il refait la démonstration dans le cas des nombres indépendamment de V.1. Il souligne en effet qu'Euclide a voulu proposer une théorie des nombres indépendante de la théorie des quantités du Livre V<sup>29</sup>.

Il est encore plus explicite dans son commentaire à la proposition VII.12 (= VII.11 du grec et de la version II). Il remarque que d'aucuns y ont utilisé la proposition V.19. Il rejette cet usage pour une raison de structure logique interne du traité : la démonstration de V.19 utilise la proportionnalité permutée (V.16) qui est démontrée dans VII.14, donc après VII.12, pour les nombres. Il est notable que Campanus manifeste ainsi son souci de respecter la structure déductive du traité puisqu'il

---

*genere, proponit per hanc quintam huius septimi de numeris*» [Campanus 1516, p. 174].

<sup>26</sup> Voir plus loin notre commentaire à la définition VII. 20 et le paragraphe II. 5.

<sup>27</sup> « *Quoniam igitur duo maiores duorum minorum eque sunt multiplices, ex prima quinti libri quod propositum est necessario comprobatur* » [Busard; Folkerts 1992, p. 190].

<sup>28</sup> « *argumentare sicut in prima quinti* » [Campanus 1516, p. 174].

<sup>29</sup> Voir note 25.

s'interdit d'utiliser dans le cours d'une démonstration un résultat qui se trouve quelques propositions plus loin dans l'organisation du livre. Par ailleurs, Campanus<sup>30</sup> souligne que les Livres V et VII sont fondés sur des principes différents. Ceux du Livre V sont rendus difficiles à comprendre et à appliquer en raison de la « malignité » des grandeurs incommensurables. Ceux du Livre VII, propres aux nombres, sont plus faciles. Au passage il remarque que la théorie de la proportionnalité numérique est rendue nécessaire par son utilisation au Livre X.

La position de Campanus à l'égard du double traitement de la proportionnalité aux Livres V et VII est clairement affirmée et assumée. Elle peut s'énoncer de la manière suivante : les principes de la proportionnalité numérique sont indépendants de ceux de la proportionnalité des grandeurs et, par conséquent, les résultats du Livre V ne peuvent pas être utilisés dans les preuves des propositions du Livre VII. Sur ce point, Campanus s'oppose à l'opinion des éditeurs latins qui l'ont précédé<sup>31</sup>. Cette prise de position n'est pas sans conséquence sur le travail éditorial de Campanus, puisqu'elle va le conduire à faire des ajouts importants au traité euclidien tel qu'il lui a été transmis.

## 2. Les définitions

L'état du texte des *Éléments* utilisé par Campanus diffère de manière

---

<sup>30</sup> « *Volunt autem quidam secundam partem huius probare per 19 quinti, sed si hoc intenderet Euclides, cum ipsa proponat particulariter quod illa universaliter, vane (illa demonstrata in quinto) proposuisset hanc hic in septimo, et quia iterum non demonstrant eam simpliciter per 19 quinti. At vero nec modum demonstrationis illius possunt affirmare ad demonstrationem huius, cum illa demonstratur in quantitativibus in genere per proportionalitatem permutatam quae infra demonstratur in numeris. Existimo autem, et rationabiliter convinci videtur Euclidem (quem vultum demonstratoris arithmetici, gratia decimi in quo sine numerorum aliqua praecognitione transire non poterat constat assumere) idcirco plurima eorum quae in quinto de quantitativibus in genere demonstravit, hic repetere demonstranda de numeris, quoniam per alia principia propria, videlicet numerorum, quae magis nota sunt intellectui quam ea per quae processit in quinto, ipsa demonstrare intendit, principia enim quinti propter malitiam quantitativum incommunicantium difficilia sunt, principia vero numerorum, magis ultro se intellectui applicant faciliusque quam illa* » [Campanus 1516, p. 179]. Sur les liens entre les Livres V et VII chez Campanus, voir aussi [Murdoch 1968, p. 89–90].

<sup>31</sup> L'auteur de la version III et Campanus s'opposent clairement sur ce point, contrairement à ce que suggère John Murdoch [1968, p. 87, note 74]. En effet, le premier utilise des résultats du Livre V dans les démonstrations de certains théorèmes du Livre VII, alors même que le second s'y refuse et se contente de faire le parallèle, légitime, entre les deux livres.

significative pour notre propos du texte grec que nous connaissons. Ainsi, les versions de la tradition dite «*adélardienne*», c'est-à-dire celles d'Adélard, de Robert de Chester (version II) et d'Hermann de Carinthie, se caractérisent par l'absence de définitions des notions fondamentales de partie, parties et multiple d'un nombre<sup>32</sup>. Ces définitions sont présentes dans le texte grec (déf. VII. 3–5) et dans la version de Gérard de Crémone. Par ailleurs, dans la version II, la proportionnalité numérique est ainsi définie (déf. VII. 20) :

«*Numeri proporcionales sunt, quorum primus in secundo tamquam tercius in quarto aut in primo secundus tamquam in tercio quartus*» [Busard ; Folkerts 1992, vol. 1, p. 187], qui peut être rendu par :

«*Proportionnels sont les nombres dont le premier est dans le second de la même manière que le troisième dans le quatrième ou le second dans le premier de la même manière que le quatrième dans le troisième*».

Ce qu'on entend, pour un nombre, par «*être dans*» un autre nombre n'est pas précisé de sorte que quatre nombres étant donnés, cette définition ne permet pas de savoir s'ils sont proportionnels. La définition euclidienne (déf. VII. 21)<sup>33</sup> est, quant à elle, plus explicite :

«*Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont des équi-multiples, ou la même partie, ou les mêmes parties*» [Vitrac 1994, p. 262].

Toutefois il faut noter qu'Euclide n'envisage pas ici les cas où le premier nombre serait un multiple du second avec une ou des parties de ce dernier (cas des rapports épimores, épimères, multiples-épimores et multiples-épimères). Cependant, on peut se ramener aux cas de la définition par passage aux rapports inverses<sup>34</sup>.

Voyons à présent ce qu'il en est de l'édition de Campanus. Le Livre VII s'ouvre sur un ensemble de vingt-trois définitions<sup>35</sup>. Sept d'entre elles sont

<sup>32</sup> Ces lacunes ne sont pas le fait des traducteurs latins. Ces mêmes définitions manquent dans la version arabe contenue dans le manuscrit Pétersbourg 2145 [De Young 1981].

<sup>33</sup> Je suis ici la numérotation de I.L. Heiberg qui est aussi celle de Bernard Vitrac. Cette définition a le numéro 20 dans les traductions de Jean Itard et Thomas L. Heath.

<sup>34</sup> Voir à ce propos le commentaire de Bernard Vitrac à cette définition [Vitrac 1994, p. 262].

<sup>35</sup> On trouvera en annexe, un tableau comparatif des définitions entre les différentes versions qui nous intéressent ici.

copiées à partir de la version II<sup>36</sup>. Il s'agit des définitions de l'unité et du nombre (déf. 1–2), des nombres premiers et composés, des nombres premiers entre eux et composés entre eux<sup>37</sup> (déf. 5–8 dans Campanus mais déf. 9–12 dans la version II), du produit comme résultat de la multiplication de deux nombres (déf. 10 de Campanus et déf. 14b de la version II). Pour ce qui est de la définition de la « multiplication » elle-même, Campanus préfère la formulation de Jordanus à celle de la version II.

Certaines définitions présentes dans la version II ont été déplacées par Campanus au début des livres concernés : Livre VIII pour les nombres plans, solides, carrés et cubes, et Livre IX pour tout ce qui concerne la théorie du pair et de l'impair.

Les quinze définitions restantes, absentes de la version II, sont tirées de l'*Arithmétique* de Jordanus. Il s'agit de la déf. 3 (= Jordanus, déf. I.2) qui porte sur la série naturelle des nombres, de la déf. 4 (= Jordanus, déf. I.4) qui définit la différence de deux nombres, des déf. 11 à 16 (= Jordanus, déf. I.7–10 et 13–14) qui traitent des notions fondamentales du Livre VII que sont la mesure, la partie, les parties, enfin des déf. 17–21 et 23 (= Jordanus, déf. II.2, 6–9 et III.5) qui concernent la proportionnalité numérique. Seule la déf. 22 ne se trouve ni dans Jordanus, ni dans la

---

<sup>36</sup> Il y a quelques différences minimes de rédaction. Pour la version II, j'utilise l'édition de Hubert L.L. Busard et Menso Folkerts. Pour la version de Campanus, j'utilise l'édition Paris 1516 contrôlée grâce aux manuscrits Paris BNF, lat. 16197, f. 2-134v (XIII<sup>e</sup> siècle), Paris BNF, lat. 7213, f. 1-173, lat. 7214, f. 1-207 et lat. 16198, f. 2-73v (XIV<sup>e</sup> siècle).

<sup>37</sup> L'auteur de la version II propose deux définitions, l'une des « *numeri communicantes* » : « *Numeri communicantes dicuntur, quos alius numerus quam unitas metitur nullusque eorum ad alium primus* » (déf. VII.12), et l'autre des « *numeri ad invicem compositi* » : « *Numeri ad invicem compositi dicuntur quos preter unitatem alius numerus eis communis numerat* » (déf. VII.13) [Busard; Folkerts 1992, p. 187]. Ces deux définitions sont présentes dans une famille de manuscrits arabes de la traduction d'Ishāq ibn Ḥunayn révisée par Thābit ibn Qurra [De Young 1984, p. 150–151]. Elles définissent mathématiquement les mêmes objets et sont probablement la trace de deux traditions textuelles indépendantes antérieures, soit grecques, soit arabes. Campanus les regroupe en une seule définition qui reprend l'énoncé de la première : « *Numeri adinvicem compositi sive communicantes dicuntur, quos alius numerus quam unitas metitur, nullusque eorum est ad alium primus* » (déf. VII.8), [Campanus, 1516, p. 168]. Voir à ce propos le commentaire de John Murdoch [1968, p. 88]. Jordanus parle quant à lui de « *numeri commensurabiles sive communicantes* » qu'il définit ainsi : « *Commensurabiles sive communicantes vocantur quos communiter aliquis numerus numerat* » (déf. III.3) [Busard 1991, p. 83].

version II. Toutes ces définitions sont absentes du texte grec, à l'exception des définitions de la partie et du multiple (déf. 12 de Campanus et déf. 3 et 5 d'Euclide)<sup>38</sup>.

Avec ce dernier ensemble de définitions, Campanus offre un cadre conceptuel à la théorie de la proportionnalité numérique différent de celui d'Euclide. Nous nous y arrêtons quelques instants afin de préciser les notions fondamentales utiles pour la suite de notre analyse. La traduction que nous proposons des définitions 11 à 23 se veut proche du texte latin, au détriment peut-être du style<sup>39</sup> :

11. — *Un nombre est dit en nombrer<sup>40</sup> un autre si, étant multiplié par quelque ⟨nombre⟩, il le produit.*

12. — *Un nombre est une partie d'un nombre, un plus petit d'un plus grand, quand le plus petit nombre le plus grand. Et celui qui est nommé est appelé multiple de celui qui nombre.*

13. — *Dénommant est le nombre selon lequel une partie est prise dans son tout.*

Ainsi le nombre 6 contient sa partie 2 trois fois. Ce nombre 3 permet de nommer la partie 2 dans son tout 6 : c'est la troisième partie ou le tiers. Nous reviendrons plus loin sur cette notion fondamentale de « nombre dénommant ».

14. — *Sont dites semblables, des parties qui sont dénommées par le même nombre.*

15. — *La première partie simple d'un nombre est l'unité.*

16. — *Quand deux nombres ont une partie commune, le plus petit est dit être autant de parties du plus grand que la même partie ⟨commune⟩ est dans le plus petit, et ⟨il sera⟩ les mêmes ⟨parties⟩<sup>41</sup> que celle-ci (la partie commune) est dans le plus grand.*

---

<sup>38</sup> Les définitions de la partie et du multiple que Campanus reprend à Jordanus ont des formulations différentes de celles du grec (voir annexe), mais aussi de celles qui se trouvent dans la traduction latine de Gérard de Crémone.

<sup>39</sup> On trouvera les énoncés latins en annexe.

<sup>40</sup> Campanus utilise le verbe *numerare* (que je traduis par nombrer) plutôt que *mensurare* qui rendrait le terme grec *καταμετρεῖν*.

<sup>41</sup> J'ai choisi de traduire ici l'expression latine « *totae ... quoties* » par « les mêmes ⟨parties⟩ que », en ne retenant de l'adjectif « *totae* » que son aspect qualificatif qui se rapporte ici aux genres ou la taille des parties. Ce choix de traduction se trouvera éclairé par l'explication qui suit, au paragraphe II.4.

Cette définition doit s'interpréter ainsi :

Soient deux nombres  $A$  et  $B$ ,  $A < B$  et  $D$  une partie commune de  $A$  et  $B$ . Revenons à la définition : le nombre de parties de  $A$  dans  $B$  est égal au nombre de fois que  $D$ , la partie commune, est dans  $A$  : notons ce nombre  $E$  (tel donc que  $A = E \cdot D$ ); et les parties que  $A$  est de  $B$  sont semblables à celles que  $D$  est de  $B$ , c'est-à-dire que ces parties sont dénommées par le même nombre d'après la définition 14 : notons ce nombre  $F$  (tel donc que  $B = F \cdot D$ ). Donc  $A$  est dit être  $E$  parties de  $B$  et en être des  $F$ -ièmes parties.

Euclide, quant à lui, définit la relation «être des parties de» comme négation de la relation «être une partie de»<sup>42</sup>. Ce n'est que dans la preuve de la proposition VII.4 qu'il indique comment, deux nombres étant donnés, déterminer cette relation<sup>43</sup>.

17. — *Est dit rapport d'un nombre relativement à un nombre, précisément d'un plus petit relativement à un plus grand, ce en quoi (le plus petit) est une partie ou des parties du plus grand. Et (rapport) d'un plus grand relativement à un plus petit, ce selon quoi (le plus grand) le contient, et sa partie ou ses parties*<sup>44</sup>.

Campanus distingue ici deux cas :

- Premier cas : un nombre  $A$  est plus petit qu'un nombre  $B$ . La proposition VII.4 nous apprendra que  $A$  est soit une partie, soit des parties de  $B$ .

- Deuxième cas :  $A$  est plus grand que  $B$ . On détermine alors le nombre de fois que  $B$  est dans  $A$ , soit  $n$ ; puis on détermine la partie ou les parties de  $B$  qui sont dans la différence  $A - nB$ <sup>45</sup>.

Dans les deux cas, la «manière d'être» de  $A$  relativement à  $B$  est le rapport  $(A : B)$ <sup>46</sup>.

<sup>42</sup> Euclide, déf. VII.3 et 4 : «Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand. Et des parties, quand il ne le mesure pas» [Vitrac 1994, p. 251].

<sup>43</sup> Voir plus loin, le paragraphe II.6.

<sup>44</sup> Nous avons choisi de rendre «*in eo quod*» et «*secundum quod*» par «ce en quoi» et «ce selon quoi» pour garder toute l'indétermination qui se rattache à ces expressions.

<sup>45</sup> Prenons un exemple :  $A = 11$  et  $B = 4$ .  $A$  contient  $B$  deux fois. Il reste 3. Et 3 est les trois quarts de  $B$ .

<sup>46</sup> Nous notons  $(A : B)$ , le rapport de  $A$  à  $B$ ;  $(A : B) :: (C : D)$ , la proportionnalité

Il faut remarquer que Campanus n'envisage pas le cas où  $A = B$ .

Notons que le rapport de  $A$  à  $B$  ne se réduit pas à la fraction  $A/B$ . Il s'exprime en termes de partie ou de parties et éventuellement de multiple. C'est une relation entre  $A$  et  $B$ .

Signalons enfin qu'Euclide ne définit pas le rapport numérique, alors qu'il définit le rapport entre deux grandeurs au Livre V.

18. — *Lorsque l'on a autant de nombres que l'on veut continûment proportionnels, le rapport du premier au troisième sera dit être celui du premier au second doublé, et au quatrième triplé.*

Campanus reprend les définitions V.9 et 10 en les adaptant aux nombres. Remarquons que le souci de Campanus de respecter l'ordre logique est ici mis en défaut puisque cette définition présuppose la définition de la proportionnalité qui n'est donnée qu'en VII.21.

19. — *Lorsqu'on a des rapports continus, semblables ou différents<sup>47</sup>, le rapport du premier (nombre) au dernier est dit composé à partir de tous (ces rapports).*

Campanus définit ici la composition des rapports numériques. Ainsi dans le cas de trois rapports donnés,  $(A : B)$ ,  $(B : C)$ ,  $(C : D)$ , on a  $(A : D) :: (A : B) * (B : C) * (C : D)$ .

20. — *Est dite dénomination d'un rapport, précisément d'un plus petit nombre relativement à un plus grand, la partie ou les parties de ce plus petit (nombre) qui sont dans le plus grand. Et (d'un rapport) d'un plus grand relativement à un plus petit, le multiple<sup>48</sup>, ou le multiple et la partie ou les parties selon lesquelles le plus grand est en plus<sup>49</sup>.*

La formulation de Campanus, très condensée, est pour le moins obscure. Jordanus est plus explicite dans le cas du rapport d'un plus grand nombre à un plus petit. Il dit en effet que dans ce cas la dénomination du rapport

---

des nombres ou des grandeurs  $A, B, C, D$  et  $(A : B) * (C : D)$ , le composé du rapport  $(A : B)$  par  $(C : D)$ .

<sup>47</sup> La formulation très condensée de Campanus signifie que l'on se donne une suite de nombres  $A, B, C$ , etc. tels que les rapports  $(A : B)$ ,  $(B : C)$ , etc. soient donnés, semblables ou non.

<sup>48</sup> Nous avons choisi de traduire ici «*totum*» par «multiple» pour faciliter la compréhension.

<sup>49</sup> La formulation de Jordanus est différente, sans toutefois que le sens en soit modifié (voir annexe).

est «le nombre selon lequel (le plus grand) contient (le plus petit) et la partie ou les parties du plus petit qui sont en plus dans le plus grand»<sup>50</sup>.

La dénomination d'un rapport est obtenue en déterminant la manière d'être relative des deux nombres  $A$  et  $B$  composant le rapport  $(A : B)$  comme on l'a vu dans la définition 17 :

- si  $A < B$  la dénomination est la partie ou les parties que  $A$  est de  $B$ ;
- si  $A > B$  la dénomination est le nombre de fois que  $B$  est dans  $A$  (notons-le  $n$ ) et la partie ou les parties que  $B$  est dans le reste  $A - nB$ .

Prenons par exemple le rapport  $(29 : 8)$ . Le nombre de fois que 8 est dans 29 est trois. Et il y a cinq huitièmes parties de 8 dans le reste  $29 - 3 \times 8 = 5$ . La dénomination est donc trois et cinq huitièmes parties.

21. — *Sont dits semblables ou l'un le même que l'autre, des rapports qui reçoivent la même dénomination, et plus grand, celui qui en (reçoit) une plus grande, et plus petit, celui qui en (reçoit) une plus petite.*

La proportionnalité peut aussi s'énoncer sans le recours explicite à la notion de dénomination :

- si  $A > B$  et  $C > D$ ,  $(A : B) :: (C : D)$ , si  $B$  est contenu autant de fois dans  $A$  que  $D$  dans  $C$  et si les restes sont la même partie ou les parties de  $B$  et de  $D$  respectivement ;
- si  $A < B$  et  $C < D$ ,  $(A : B) :: (C : D)$  si  $A$  est la (ou les) même(s) partie(s) de  $B$  que  $C$  de  $D$ .

Campanus définit ici la similitude des rapports et non leur égalité. En effet, bien qu'il introduise la notion de dénomination qui tire le rapport vers les nombres, il reste attaché à une définition euclidienne du rapport en termes de relation comme nous l'avons vu dans notre commentaire à la définition 17.

Par ailleurs, dans ce même énoncé, Campanus définit l'ordre sur les rapports de nombres. Au Livre VII, Euclide ne définit pas la relation «avoir un rapport plus grand (ou plus petit) qu'un autre rapport», alors que la définition V.7 donne un critère d'inégalité entre les rapports de grandeurs.

22. — *Et des nombres dont le rapport est le même, sont appelés proportionnels.*

---

<sup>50</sup> Voir Annexe.

Pour cet énoncé, Campanus reprend la définition V.7 (= déf. V.6 du grec) en l'adaptant aux nombres.

23. — *Sont dits termes ou racines (d'un rapport), (les nombres) tels qu'il est impossible d'en prendre de plus petits dans le même rapport.*

### 3 Les postulats et axiomes

Nous avons vu qu'en présence d'une définition peu claire et non opératoire de la proportionnalité numérique telle qu'il la trouve dans le texte de la version II et confronté à l'absence de définitions des notions clés que sont la mesure, la partie, les parties et le rapport, et des relations « être une même ou des mêmes parties » dans cette même version, Campanus fait des emprunts à l'*Arithmétique* de Jordanus, qu'il insère dans son texte des *Éléments*. Il dresse ainsi un ensemble complet de définitions nécessaires aux livres arithmétiques et en particulier au Livre VII. Il lui faut ensuite dégager les règles qui régissent les concepts fondamentaux qu'il vient de définir. C'est ce qu'il fait dans des postulats et axiomes qu'il ajoute au traité euclidien<sup>51</sup> et dont la source est là aussi, pour une partie d'entre eux, l'*Arithmétique* de Jordanus<sup>52</sup>.

Les postulats se rapportent à la progression infinie des nombres. Nous en donnons une traduction aussi fidèle que possible<sup>53</sup> :

1. — *Étant donné un nombre quelconque, on peut en prendre autant que l'on veut qui lui soient égaux ou qui en soient des multiples comme l'on veut.*

2. — *Étant donné un nombre quelconque, on peut en prendre un qui soit plus grand que lui autant que l'on veut.*

3. — *La série des nombres peut progresser à l'infini.*

---

<sup>51</sup> Les historiens n'ont pas manqué de s'étonner de l'absence, dans les *Éléments* d'Euclide, d'une axiomatique propre aux livres arithmétiques. Jean Itard, par exemple, pointe l'absence de postulats concernant l'existence, l'unicité, la commutativité et l'associativité de la somme. Il remarque qu'Euclide admet implicitement que la suite des nombres ne décroît pas indéfiniment, dans les preuves des propositions VII.1, 2 et 31 [Itard 1961, p. 65–75, 86, 91]. Ian Mueller propose plus récemment un ensemble complet de postulats pour les livres arithmétiques [Mueller 1981, p. 37–38, 61–64, 312–314]. Voir aussi les commentaires de Bernard Vitrac [1994, p. 277]. Nous pouvons par ailleurs noter que cette absence n'est comblée ni par les éditeurs grecs, ni par ceux des versions arabes et latines du Moyen Âge.

<sup>52</sup> [Busard 1991, p. 64–65], [Campanus 1516, p. 169].

<sup>53</sup> On trouvera les énoncés latins en annexe.

4. — *Aucun nombre ne peut être diminué à l'infini.*

Ce dernier postulat, absent dans Jordanus, est indispensable pour garantir l'arrêt de l'algorithme d'Euclide pour la détermination de la commune mesure de deux nombres (propositions VII.1–2)<sup>54</sup>. Euclide ne l'explicité pas à cet endroit, contrairement à Campanus qui précise au cours de la preuve de VII.1 : «*cette descente ne peut être faite indéfiniment d'après le dernier postulat*»<sup>55</sup>.

Par contre, ce postulat est explicité par Euclide dans la proposition VII.31 selon laquelle «*tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier*». La preuve consiste à se donner un nombre composé  $A$  et un nombre  $B$  qui le mesure. Soit  $B$  est premier et le théorème est démontré, soit  $B$  est composé. On considère alors  $C$  qui mesure  $B$  : soit  $C$  est premier et  $C$  mesure aussi  $A$  donc on a le résultat voulu, soit  $C$  est composé et l'on recommence. Euclide conclut ainsi : «*Alors l'investigation étant poursuivie de cette façon, un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera [A]. Car s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent; ce qui est impossible dans les nombres*»<sup>56</sup>. Dans la version II, la preuve est résumée en une seule phrase (proposition VII.29) : «*Sinon quelque nombre décroîtrait à l'infini, ce qui est contraire à la nature des nombres*»<sup>57</sup>. La preuve de Campanus (proposition VII.30) est complète et se termine par la référence explicite au postulat 4<sup>58</sup>.

Les axiomes précisant quelques propriétés des notions de partie et de multiple, sont tirés de l'ouvrage de Jordanus (axiomes 1 à 7). Par contre, l'explicitation des propriétés fondamentales de la mesure est ajoutée par Campanus (axiomes 8 à 10)<sup>59</sup> :

<sup>54</sup> Voir à ce propos le commentaire de Bernard Vitrac à ces propositions [Vitrac 1994, p. 292–296].

<sup>55</sup> «... *huius diminutio non potest fieri infinities per ultimam petitionem*» [Campanus 1516, p. 172].

<sup>56</sup> [Vitrac 1994, p. 339–340].

<sup>57</sup> «*Alioquin in infinitum decrescit numerus aliquis, quod contrarium est nature numerorum*» [Busard; Folkerts 1992, p. 197].

<sup>58</sup> «... *alioquin accidet impossibile et contrarium petitioni, numerum in infinitum decrescere*» [Campanus 1516, p. 191].

<sup>59</sup> Dans son commentaire aux *Éléments*, an-Nayrīzī signale que Héron avait explicité deux propriétés de la mesure, qui correspondent aux axiomes 8 et 10 de Campanus, mais

1. — *Toute partie est plus petite que son tout.*
2. — *Des ⟨nombres⟩ quelconques qui sont équi-multiples du même ⟨nombre⟩ ou de ⟨nombres⟩ égaux seront aussi égaux.*
3. — *⟨Des nombres⟩ desquels un même nombre est également multiple ou dont des équi-multiples sont égaux seront aussi égaux.*
4. — *De tout nombre, l'unité est une partie dénommée par ce ⟨nombre⟩.*
5. — *Toute partie est plus petite, qui a la plus grande dénomination, et plus grande, qui a la plus petite.*
6. — *N'importe quel nombre est un multiple relativement à l'unité autant de fois que l'unité est une partie de lui.*
7. — *Si un nombre quelconque est multiplié par l'unité, il se produit lui-même et il se nombre lui-même. L'unité aussi, multipliée par quelque ⟨nombre⟩, produit le même ⟨nombre⟩.*
8. — *N'importe quel nombre ⟨qui⟩ nombre deux ⟨nombres⟩, nombre aussi leur somme.*
9. — *N'importe quel nombre ⟨qui⟩ nombre quelque ⟨nombre⟩, nombre tout ⟨nombre⟩ nombré par lui.*
10. — *N'importe quel nombre ⟨qui⟩ nombre le tout et ce qui en est retranché, nombre aussi le reste<sup>60</sup>.*

L'axiome 4 est, nous l'avons vu, rappelé par Campanus dans la preuve de la proposition VII.4. Il fait aussi explicitement référence aux propriétés de la mesure dans les preuves des propositions VII.1–3, 24, 29, 30 et 36 (= propositions VII.1–3, 23, 28, 31, 34 du grec).

Le cadre conceptuel ainsi posé, nous revenons sur les notions clés de « partie » et « parties » qui sont au fondement de la théorie de la proportionnalité numérique, comme Campanus le met nettement en évidence.

#### **4. Mise en évidence des notions fondamentales de partie et parties. Introduction des numérateurs et dénominateurs des rapports numériques**

La proportionnalité numérique se définit à partir des notions de partie, parties et multiple, et ses résultats fondamentaux découlent

---

dans une formulation différente : « *Cum fuerit numerus numeros numerans duos tunc ipse numerabit totum eorum, scilicet omnes duos numeros* », « *Cum fuerit numerus numerans numerum, quem pars eius numerat, tunc ipse numerabit reliquum eius* » [an-Nayrīzī 1899, p. 191, l. 3–8] .

<sup>60</sup> Les énoncés latins sont en annexe.

immédiatement de propriétés similaires des relations « être une ou des parties » (propositions VII.4 à 10). Il nous faut donc nous arrêter quelques instants sur ces notions, telles qu'elles ont été introduites par Campanus.

La définition de la partie ne pose pas de problème. Plus intéressante est la définition de « nombre dénommant une partie » (déf. VII.13 de Campanus). Une partie étant donnée, on détermine le nombre de fois que cette partie est dans son tout, par exemple 2 dans 6. Il faut souligner que le nombre ainsi obtenu, dans notre exemple 3, n'est pas un simple nombre, mais est surtout le moyen d'accéder à la dénomination de la partie. Ainsi, 2 est la *troisième* partie de 6. Cette notion de « nombre dénommant une partie » est utilisée par Boèce dans son *Institutio arithmetica*, de la même manière que par Campanus. Par exemple, il y est dit que « dans 3, il n'y a qu'une seule partie, le tiers, qui tire évidemment sa dénomination de 3 » [Guillaumin 1995, I, 14.1]. Par ailleurs, Euclide utilise la notion de « nombre homonyme à une partie » dans les propositions VII.37–38<sup>61</sup>.

La définition de la relation « être des parties » (déf. VII.16 de Campanus) est complexe. Reprenons les notations de notre commentaire à cette définition. Nous avons introduit les nombres  $E$  et  $F$  qui représentent respectivement le nombre de fois que la commune mesure  $D$  est dans les nombres donnés  $A$  et  $B$ .  $A$  est alors  $E F$ -ièmes parties de  $B$ . Nous serions tentés ici d'introduire la fraction  $E/F$ , ce qui nous conduirait naturellement à considérer le rapport numérique comme un nombre. Campanus ne le fait pas. En effet, il faut souligner ici que  $E$  et  $F$  n'ont pas le même statut et qu'ils sont clairement dissociés.  $E$  nombre les parties : c'est un nombre, et  $F$  les dénomme selon la définition 13 : c'est un « nombre dénommant ».

Cette différence de statut est perceptible dans l'usage des deux expressions latines distinctes « *tot . . . quoties* » et « *totae . . . quoties* ». Campanus s'en explique lui-même à la proposition VII.6 et introduit à cette occasion les notions de « numérateur » et de « dénominateur » (*numerator*, *denominator*), précisément « celui qui nombre » et « celui qui dénomme ». Dans cette proposition, il s'agit de prouver que, « *si on a quatre nombres dont le premier est les mêmes parties du second que le troisième du quatrième, la somme du premier et du troisième sera les mêmes parties de la somme du*

---

<sup>61</sup> Voir le commentaire de Bernard Vitrac à ces propositions [Vitrac 1994, p. 352–353].

*second et du quatrième, que le premier du second*»<sup>62</sup>. Dans cet énoncé, à la suite de l'auteur de la version II, Campanus utilise l'expression «*totae partes . . . quotae*» pour rendre la relation «être des mêmes parties que», mais dans l'ecthèse il écrit :

«*sitque ut B sit tot et totae partes A, quot et quotae D est C*»

Il précise aussitôt :

«*Je dis tot & totae puisque la pluralité des parties est définie par deux nombres, dont l'un est appelé le numérateur et l'autre le dénominateur, de sorte que lorsque nous disons trois cinquièmes, trois nombre et cinq dénomme*»<sup>63</sup>.

Cette expression est également dans Jordanus<sup>64</sup>, mais l'explication est de Campanus. La mise en évidence du numérateur et du dénominateur des parties se retrouve dans la preuve, qui est aussi empruntée à Jordanus (prop. I.5). Nous en donnons la transcription libre suivante [Campanus 1516, p. 175] :

Soient les nombres  $A, B, C, D$  tels que  $B$  soit les mêmes parties de  $A$ , que  $D$  de  $C$ , je dis que  $B + D$  est les mêmes parties de  $A + C$  que  $B$  de  $A$ .

Que  $B$  soit des parties de  $A$ , nombrées par  $H$  et dénommées par  $K$ <sup>65</sup>.

Alors  $D$  est des parties de  $C$  nombrées par  $H$  et dénommées par  $K$ .

Soit  $E$  une des parties de  $B$  et  $F$  une des parties de  $D$ .

Par hypothèse,  $E$  est une partie de  $B$  dénommée par  $H$  et une partie de  $A$  dénommée par  $K$ . Semblablement aussi  $F$  est une partie de  $D$  dénommée par  $H$  et une partie de  $C$  dénommée par  $K$ .

C'est pourquoi, d'après la proposition précédente<sup>66</sup>,  $G = E + F$  est une

<sup>62</sup> «*Si fuerint quatuor numeri quorum primus totae partes secundi quotae tertius quarti, erunt primus et tertius pariter accepti totae partes secundi et quarti pariter acceptorum, quotae primus secundi*» [Campanus 1516, p. 175]. Je traduis ici «*primus et tertius pariter accepti*» par «*la somme du premier et du troisième*» pour plus de clarté.

<sup>63</sup> «*Dico autem tot et totas, quia partium pluralitas duobus numeris diffinitur, quorum alter numerator dicitur, alter denominator, ut cum dicimus tres quintae, ternarius numerat, quinarius denominat*» [Campanus 1516, p. 175].

<sup>64</sup> Dans la démonstration de sa proposition I.22, Jordanus utilise l'expression : «*tot et tote partes quot et quote*» [Busard 1991, p. 71].

<sup>65</sup> «*numeratae ab h et denominatae ab k*».

<sup>66</sup> La proposition VII.5 dit que si on a quatre nombres tels que le premier est la même partie du second que le troisième du quatrième, alors la somme du premier et du troisième est la même partie de la somme du second et du quatrième, que le premier du second [Campanus 1516, p. 174].

partie de  $B + D$  dénommée par  $H$ , et  $G$  est une partie de  $A + C$  dénommée par  $K$ .

Donc par la définition 16,  $B + D$  est des parties de  $A + C$  nombrées par  $H$  et dénommées par  $K$ , car  $G$  est leur partie commune, de  $B + D$  selon  $H$  et de  $A + C$  selon  $K$ .

Cette explicitation des nombres caractérisant les parties, précisément du numérateur et du dénominateur<sup>67</sup>, n'est ni dans l'Euclide grec, ni dans les preuves des versions II et III. C'est un ajout particulièrement intéressant de Campanus au traité euclidien puisqu'il constitue un premier pas en direction de la numérisation des rapports. Toutefois, il resterait encore à écrire la fraction formée par ce numérateur et ce dénominateur, et de l'identifier au rapport, ce que ne fait pas Campanus.

### 5. La dénomination d'un rapport numérique

Avec la définition de la notion de « dénomination d'un rapport numérique » (déf. 20) s'achève la mise en place du cadre conceptuel. Il faut rapprocher ici cette définition de la définition 13 de « nombre dénommant une partie ». Reprenons par exemple le rapport  $(29 : 8)$ . Sa dénomination est trois et cinq huitièmes parties. Si l'on possède par ailleurs la nomenclature des rapports numériques de Nicomaque, transmise au monde latin par Boèce, la dénomination d'un rapport permet de donner un nom à ce rapport. Ainsi le rapport  $(29 : 8)$  est le rapport «*tripla superquincupartiens octavas*»<sup>68</sup>.

Il n'y a que de très rares exemples numériques dans lesquels Campanus utilise la notion de dénomination. On en trouve paradoxalement au Livre V pour illustrer les définitions V.10 et 11 des rapports doublé et triplé. Campanus montre sur un exemple que, quatre nombres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  étant donnés continûment proportionnels, la dénomination de  $(A : C)$

<sup>67</sup> L'état actuel de nos connaissances ne nous permet pas de dire s'il y a un lien entre l'introduction de ces notions par Campanus et le calcul sur les fractions.

<sup>68</sup> On trouve un exposé très complet de la théorie de la dénomination d'un rapport numérique et de ses liens avec la nomenclature de Nicomaque dans l'édition des *Éléments* de Clavius, à la Renaissance. Cet exposé de la théorie de la dénomination figure dans un très long commentaire à la définition V.4 du rapport numérique. Clavius représente la dénomination des rapports à l'aide de nombres. Ainsi il écrirait que la dénomination de  $(29 : 8)$ , qui est trois et cinq huitièmes parties, est  $3 \frac{5}{8}$ . Cependant il insiste surtout sur sa fonction de « nommer ». Il est encore bien loin de considérer les rapports comme des nombres. Voir [Koelblen-Rommevaux 1994, p. 44–72 et 375–402].

est le carré de la dénomination de  $(A : B)$  et que la dénomination de  $(A : D)$  est le cube de la dénomination de  $(A : B)$ . Il prend les nombres 3, 9, 27, 81. Il dit alors que le rapport  $(9 : 3)$  est dénommé par trois car c'est le rapport triple, que le rapport  $(27 : 3)$ , rapport nonuple, est dénommé par neuf, qui est le carré de trois; enfin que le rapport  $(81 : 3)$ , rapport «*vigincupla septupla*» est dénommé par vingt-sept qui est le cube de trois, lui-même la dénomination de  $(9 : 3)$  [Campanus 1516, p. 108–109]. Cet aspect calculatoire de l'usage de la notion de dénomination d'un rapport est à souligner. Il serait toutefois hâtif d'en conclure que Campanus considère ici les rapports numériques comme des nombres, via leurs dénominations. Ce serait oublier trop vite que la fonction essentielle de la dénomination est de « nommer » et non pas d'évaluer numériquement le rapport.

Campanus évoque par ailleurs la notion de dénomination d'un rapport numérique dans son commentaire à la fin des définitions du Livre V<sup>69</sup>. Il cherche à justifier l'usage des équimultiples dans la définition de l'identité des rapports de grandeurs — Campanus parle de « quantités » (déf. V.6 = déf. V.5 du grec). Il remarque que, si tous les rapports étaient rationnels («*proportio scita sive rationalis*»), on pourrait définir la proportionnalité des quantités à l'aide de la dénomination des rapports des nombres correspondants comme l'a fait Jordanus au Livre II de son *Arithmétique* pour les nombres. Mais ce serait l'impossibilité de connaître la dénomination des rapports irrationnels («*proportionnales irrationnales*») qui aurait conduit Euclide, selon Campanus, à introduire une autre définition de la proportionnalité au Livre V [Murdoch 1963, p. 257–258].

Cette notion de dénomination d'un rapport apparaît, par ailleurs, dans

---

<sup>69</sup> «*Et si esset omnis proportio scita sive rationalis, tunc facile esset intellectum cognoscere quae proportionales essent una et quae diversae. Quae enim habent unam denominationem, essent una : quae autem diversae, diversae, haec autem facilitas manifesta est ex arithmetica, quoniam omnium numerorum proportio scita et rationalis est. Unde Jordanus in secundo arithmeticae suae diffiniens quae proportionales sunt eadem et quae diversae, dicit easdem esse quae eandem denominationem recipiunt. Maiorem vero, quae maiorem, et minorem quae minorem. Sed infinitae sunt proportionales irrationales, quarum denominatio scibilis non est, quare cum Euclides consideret in hoc libro suo proportionalia communiter non contrahendo ad rationales vel irrationales quoniam considerat proportionem repertam in continuis quae communis est ad istas, non potuit diffinire identitatem proportionum, identitatem denominationum, sicut arithmeticus, eo quod multarum proportionum (ut dictum est) sunt denominationes simpliciter ignotae*» [Campanus 1516, p. 111].

deux traités attribués dans certains manuscrits à Campanus et Jordanus et qui traitent des règles des six quantités en proportion, c'est-à-dire des relations issues de la relation initiale  $(a : b) :: (c : d) * (e : f)$ <sup>70</sup>. Cependant, dans ces deux traités, cette notion est radicalement différente de celle qui figure dans l'édition des *Éléments* de Campanus, puisque la dénomination est définie comme le résultat de la division de l'antécédent du rapport par le conséquent<sup>71</sup>. Avec cette définition, le glissement de la notion de rapport numérique à celle de nombre est plus explicite. De fait, la composition des rapports est définie dans ces mêmes traités comme la multiplication des dénominations.

Cette notion de dénomination d'un rapport ne se trouve ni dans Euclide, ni dans Boèce, ni dans les traductions et éditions latines précédant celles de Campanus. L'histoire de cette notion très complexe reste à faire<sup>72</sup>, toutefois il est probable qu'elle ait été introduite au Moyen Âge latin, et qu'elle dérive de la notion de « nombre dénommant une partie » utilisée par Boèce dans son *Institutio arithmetica*.

La mise en évidence des notions fondamentales de partie, parties et multiple, et l'explicitation des numérateurs et dénominateurs des parties constituent l'apport essentiel de Campanus au Livre VII des *Éléments*. Certes, il a puisé ces notions dans l'*Arithmétique* de Jordanus. Mais intéressante et novatrice est la manière dont il les intègre au traité euclidien lui-même. Nous en avons deux exemples significatifs avec les propositions VII.4 et VII.11.

#### **6. La proposition VII.4**

Les propositions VII.4 à 10 du texte grec et de Campanus énoncent un ensemble de propriétés des relations « être une partie » et « être des parties », desquelles les propriétés fondamentales de la proportion découlent immédiatement.

La proposition VII.4 précise que deux nombres quelconques étant donnés, le plus petit est soit une partie, soit des parties du plus grand. Or

---

<sup>70</sup> Ces deux traités ont été édités par Hubert L.L. Busard [1971]. Voir aussi [Koelblen-Rommevaux 1994b].

<sup>71</sup> Ainsi, la définition que l'on trouve dans le traité attribué à Campanus est la suivante : « *Cum duarum quantitatum eiusdem generis una dividit aliam quod exit dicitur denominatio proportionis divise ad dividentem* » [Busard 1971, p. 213].

<sup>72</sup> On en trouve toutefois quelques éléments dans [Molland 1965].

Euclide définit « être des parties » comme négation « d'être une partie ». De ce fait, le statut de cette proposition a paru problématique aux yeux des historiens<sup>73</sup> : elle semble être une tautologie. Ce n'est pas le cas dans la version de Campanus, puisque ces deux notions y sont définies indépendamment l'une de l'autre, explicitement rappelées dans la démonstration :

Proposition VII.4<sup>74</sup> : «*Pour tout couple de nombres inégaux, le plus petit est soit une partie soit des parties du plus grand.*

*Soient deux nombres A et B, B le plus petit, je dis que B est une partie ou des parties de A. En effet, soit B nombre A, soit non. S'il le nombre, c'en est une partie, par définition (déf. VII.12). S'il ne le nombre pas, alors soit ils sont premiers entre eux, soit non. S'ils ne sont pas premiers entre eux, ils auront par définition une partie commune (déf. VII.8), et autant de fois celle-ci est dans B, autant B sera dit être de parties de A, par définition (déf. VII.16). Mais s'ils sont premiers entre eux, puisque de tout nombre l'unité est une partie dénommée par ce nombre (axiome 4), la même chose est évidente en considérant les unités.»*

Là encore Campanus suit Jordanus dont il reprend la démonstration de la proposition 1 du Livre I. Il faut préciser ici que Campanus ne recopie pas les démonstrations qu'il trouve dans Jordanus mais s'en inspire et rédige ses preuves dans un style qui lui est propre : chaque nombre est désigné par une lettre, les arguments sont détaillés, les références aux définitions, postulats, axiomes ou propositions utilisés sont explicitées. Ainsi, pour

---

<sup>73</sup> Jean Itard proposait de voir dans cette proposition une détermination de la notion « être des parties de » et par suite de la relation « être les mêmes parties que ... de ». Selon lui, il s'agirait ici de déterminer, grâce au pgcd, le pythmène du rapport, c'est-à-dire son représentant irréductible et par conséquent, A serait les mêmes parties de B, que C de D si les pythmènes des deux rapports  $A : B$  et  $C : D$  sont égaux [Itard 1961, p. 93–94]. Toutefois cette interprétation n'est pas sans présenter des difficultés et suppose de modifier de manière substantielle le texte euclidien. Voir [Vitrac 1994, p. 299–302].

<sup>74</sup> Proposition VII. 4 : «*Omnium duorum numerorum inaequalium, minor, maioris aut pars est, aut partes. Sint duo numeri a & b, b minor, dico quod b est pars vel partes a. Aut enim b numerat a, aut non, si numerat, pars eius est per diffinitionem. Si non numerat ipsum, aut ergo sunt adinvicem primi, aut non, si non sunt adinvicem primi, habebunt per diffinitionem partem communem, quae quoties fuerit in b tot partes a dicetur esse b per diffinitionem : si autem sint adinvicem primi, quia tamen omnis numeri pars est unitas ab ipso denominata, patet idem per unitates»* [Campanus 1516, p. 174].

cette proposition, la démonstration de Jordanus est la suivante :

Proposition I.1 : «*Tout nombre plus petit qu'un plus grand en est soit une partie soit des parties.*

*En effet, soit le plus petit nombre le plus grand, soit il ne le nombre pas. S'il le nombre, c'en est une partie. S'il ne le nombre pas et s'il y a quelque <nombre> qui les nombre tous les deux, ce même <nombre> sera une partie de chacun ; et autant de fois il est dans le plus petit, autant le plus petit sera de parties du plus grand. Et sinon, puisque l'unité est une partie de tout nombre, la même chose pourra être démontrée en considérant les unités» [Busard 1991, p. 65].*

Les démonstrations de Campanus et Jordanus sont caractérisées par l'ordre des cas :

- 1)  $B$  nombre (ou mesure)  $A$  ;
- 2)  $B$  ne nombre pas (ou ne mesure pas)  $A$  :
  - a)  $B$  et  $A$  ne sont pas premiers entre eux,
  - b)  $B$  et  $A$  sont premiers entre eux.

Dans les versions II et III, les items a) et b) sont inversés. En grec, l'ordre des cas est :

- 1)  $B$  et  $A$  sont premiers entre eux ;
- 2)  $B$  et  $A$  ne sont pas premiers entre eux :
  - a)  $B$  mesure  $A$ ,
  - b)  $B$  ne mesure pas  $A$ .

On peut remarquer que si on applique l'algorithme d'Euclide à  $(A, B)$ , on sait d'abord si  $B$  nombre  $A$  ou non, puis dans un second temps s'ils sont premiers entre eux ou non<sup>75</sup>. Le schéma de démonstration de Campanus et de Jordanus reprend cet ordre des cas.

### **7. Un ajout majeur de Campanus : la proposition VII.11**

Les propositions VII.12 à 14 (VII.11 à 13 du grec) présentent trois propriétés fondamentales des proportions numériques :

VII.12. Si  $(A : B) :: (C : D)$  alors  $(A - C : B - D) :: (A : B)$ .

VII.13. Si  $(A : B) :: (C : D) :: (E : F)$ , etc., alors

$$(A + C + E + \dots : B + D + F + \dots) :: (A : B).$$

VII.14. Si  $(A : B) :: (C : D)$  alors  $(A : C) :: (B : D)$ .

---

<sup>75</sup> Voir le commentaire de Bernard Vitrac à cette proposition [1994, p. 299].

Elles ont leurs équivalents au Livre V (propositions V.19, 13 et 16 respectivement dans l'édition de Campanus = V.19, 12 et 16 du grec), lien que ne manque pas de souligner Campanus.

Les démonstrations de ces propriétés utilisent les propositions VII.5 à 10 qui énoncent des résultats similaires en termes de « même partie » ou « mêmes parties ». Ainsi, la proposition VII.14 (= VII.13 du grec) nous apprend que si quatre nombres sont proportionnels alors ils sont aussi proportionnels par permutation. La démonstration fait appel aux propositions 9 et 10 selon lesquelles si  $A$  est la même partie (respectivement les mêmes parties) de  $B$  que  $C$  de  $D$  alors par permutation  $A$  sera la même partie (respectivement les mêmes parties) de  $C$  que  $B$  de  $D$ . Ceci suppose implicitement que les nombres vérifient :  $A < B$ ,  $C < D$  et  $A < C$ ,  $B < D$ . Euclide ne traite que ce cas. La même remarque s'applique aux preuves des propositions VII.12 et 13.

L'auteur des preuves de la version II a le souci de compléter les démonstrations en traitant aussi les autres cas. Pour cela il fait appel aux résultats correspondants du Livre V. Campanus, qui, nous l'avons vu, rejette cet usage, introduit une proposition, VII.11, qui lui permet d'exprimer dans tous les cas la proportionnalité des nombres à l'aide des relations « être la même partie » et « être les mêmes parties », soit entre  $A$  et  $B$  d'une part et  $C$  et  $D$  d'autre part, quand  $A < B$  et  $C < D$ , soit entre  $B$  et  $A$  d'une part et  $D$  et  $C$  d'autre part, dans le cas où  $A > B$  et  $C > D$ . Dans les deux cas la référence aux propositions 5 à 10 est alors possible.

Voyons à présent cette proposition VII.11, qui bien sûr n'a pas d'équivalent dans le texte euclidien et ses traductions. Rappelons que la définition VII.21 permet d'énoncer ainsi la proportionnalité numérique :

- Si  $A > B$  et  $C > D$ ,  $(A : B) :: (C : D)$  si  $B$  est contenu autant de fois dans  $A$  que  $C$  dans  $D$  et si la partie ou les parties restantes sont les mêmes.
- Si  $A < B$  et  $C < D$ ,  $(A : B) :: (C : D)$  si  $A$  est la même partie ou les mêmes parties de  $B$  que  $C$  de  $D$ .

Dans la proposition VII.11, Campanus montre, dans le cas où  $A > B$  et  $C > D$ , que  $(A : B) :: (C : D)$  si et seulement si  $B$  est la même partie ou les mêmes parties de  $A$  que  $D$  de  $C$ . Une transcription en langage symbolique moderne masquerait le jeu subtil auquel Campanus se livre,

dans la langue naturelle, entre les différentes définitions utilisées. En effet, l'argument se résumerait alors en la simple inversion d'une fraction<sup>76</sup>. Mais ce serait oublier que les notions de « partie » et de « parties » ne sont pas réductibles à celle de fraction pour les médiévaux. Nous proposons donc une traduction littérale de la preuve de VII.11 :

*Proposition VII.11 : « Si quatre nombres sont proportionnels, dont le premier est plus grand que le second et le troisième que le quatrième, le second sera la même partie ou les mêmes parties du premier que le quatrième du troisième. Et si le second est la même partie ou les mêmes parties du premier que le quatrième du troisième, il s'ensuivra que les quatre nombres sont proportionnels.*

*Que le rapport de A à B soit comme celui de C à D, et que A et C soient les plus grands. Je dis que B est la même partie ou les mêmes parties de A, que D de C, et inversement.*

*En effet, on aura par la définition de la similitude des rapports, qu'autant de fois B est dans A, autant de fois D est dans C, et si quelque partie ou quelques parties de B sont en plus dans A, la même partie ou les mêmes parties de D sont en plus dans C. Si donc B est contenu dans A sans partie en plus, puisque D est contenu dans C autant de fois sans (partie) en plus, on aura par la définition de la similitude des parties que B est la même partie de A, que D de C.*

*Si d'autre part B est contenu dans A autant de fois que l'on veut avec une partie en plus, D est contenu dans C autant de fois avec une partie semblable en plus. A étant divisé selon B de sorte qu'il y ait en plus E, et C étant divisé selon D de sorte qu'il y ait en plus F, E sera la même partie de B que F de D. Mais puisque B est contenu dans la différence entre A et E autant de fois que D dans la différence entre C et F, on aura, d'après l'axiome 9, que E est contenu autant de fois dans A que F dans C. C'est pourquoi, puisque A et B ont une partie commune E, et semblablement C et D, F, et que E est dans B autant de fois que F dans D, et que de même E est dans A autant de fois que F dans C, par la définition 16, B sera les mêmes parties de A que D de C.*

*Maintenant, si B est contenu dans A autant de fois que l'on veut avec*

---

<sup>76</sup> En effet, si  $(A : B) :: (C : D)$ , alors on serait tenté d'écrire  $A = nB + (h/k)B$  et  $C = nD + (h/k)D$ . Et par conséquent  $B = (k/(nk + h))A$  et  $D = (k/(nk + h))C$ . D'où B est la (les) même(s) partie(s) de A que D de C.

*quelques parties en plus, D sera contenu autant de fois dans C avec autant de parties semblables en plus. A étant divisé selon B de sorte qu'il y ait en plus E, et C étant semblablement divisé selon D de sorte qu'il y ait en plus F, E sera les mêmes parties de B, que F de D. Alors, en prenant une de ces parties et en argumentant comme précédemment, le premier point s'en suivra clairement<sup>77</sup>.*

*Le second point<sup>78</sup> se démontre ainsi : supposons que B soit la même partie ou les mêmes parties de A que D de C, je dis que le rapport de A à B sera comme celui de C à D.*

*Si en effet c'est la même partie, la proposition va de soi.*

*Si c'est les mêmes parties, alors, les nombres étant divisés selon ces parties, il est clair que B sera dans A autant de fois que D est dans C, et qu'il y aura en plus la même partie ou les mêmes parties de B dans A, que la partie ou les parties de D en plus dans C. Donc, par définition, le rapport de A à B est comme celui de C à D » [Campanus 1516, p. 178].*

On comprend immédiatement quel usage Campanus va faire de cette proposition dans les démonstrations des propositions suivantes. Nous en voyons un exemple avec la preuve qu'il donne de la proposition VII.14 (= VII.13 d'Euclide et de la version II), dont le schéma est le suivant [Campanus 1516, p. 180] :

Soient  $A, B, C, D$  tels que  $(A : B) :: (C : D)$ , je dis que

$$(A : C) :: (B : D).$$

Supposons  $(A : B) :: (C : D)$ .

1)  $A < B$  et  $A < C$ .

Alors  $A$  est la même partie ou les mêmes parties de  $B$  que  $C$  de  $D$ .

Donc, en permutant,  $A$  sera la même partie ou les mêmes parties de  $C$  que  $B$  de  $D$  (VII.9 ou 10).

Donc par définition  $(A : C) :: (B : D)$ .

2)  $A > B$  et  $A > C$ .

Alors  $B$  est la même partie ou les mêmes parties de  $A$  que  $D$  de  $C$  (VII.11a).

Donc  $D$  sera la même partie ou les mêmes parties de  $B$  que  $C$  de  $A$  (VII.9 ou 10).

---

<sup>77</sup> Il s'agit de l'implication directe.

<sup>78</sup> Il s'agit de la réciproque.

Donc  $(A : C) :: (B : D)$  (VII.11b).

Les deux autres cas,  $C > A > B$  et  $C < A < B$ , sont traités de la même manière.

Jordanus démontre lui aussi certaines propriétés des proportions numériques, en envisageant tous les cas. Pour cela il utilise l'inversion des rapports qu'il démontre en utilisant deux propositions équivalentes à la proposition VII.11 de Campanus : les propositions III.30 et 31. En effet, si on a  $(A : B) :: (C : D)$  avec  $A > B$  et  $C > D$ , alors par inversion  $(B : A) :: (D : C)$  avec  $B < A$  et  $D < C$ , et l'on est ramené au premier cas. La compatibilité de l'inversion avec la proportionnalité n'est pas démontrée par Euclide, mais figure dans la version de Campanus à la suite de la proposition VII.15. La démonstration de Campanus est une conséquence directe de sa proposition VII.11. Les démarches des deux auteurs sont en quelque sorte inverses l'une de l'autre. Toutefois il est probable que là encore l'inspiration de Campanus provienne de sa lecture de l'*Arithmétique* de Jordanus.

#### **8. Deux propriétés fondamentales de la proportionnalité numérique explicitées par Campanus**

Deux ajouts sont insérés par Campanus dans le cours des démonstrations des propositions VII.15 (= VII.14 du grec) et VII.20 (= VII.19). Y sont explicités deux présupposés euclidiens : la transitivité de l'identité des rapports numériques et «*si un nombre a le même rapport à deux nombres, alors ces deux nombres sont égaux et si deux nombres sont égaux, un même nombre aura le même rapport à ces deux nombres*». Ces deux résultats sont démontrés pour les grandeurs au Livre V, respectivement dans les propositions V.11 et V.9, mais ne sont pas démontrés par Euclide pour les nombres<sup>79</sup>. Ils ne figurent pas non plus dans l'*Arithmétique* de Jordanus.

La transitivité de l'identité des rapports numériques est utilisée à la fin de la démonstration de VII.15 de Campanus (= VII.14 du grec). Dans cette proposition, il s'agit de prouver que si on a  $A, B, E$  et  $C, D, F$  tels que  $(A : B) :: (C : D)$  et  $(B : E) :: (D : F)$ , alors  $(A : C) :: (E : F)$ . Le schéma de la démonstration est le suivant :

---

<sup>79</sup> Les historiens n'ont pas manqué de relever ces particularités. Voir [Vitrac 1994, p. 313, 317 et 324].

Par VII.14 (= VII.13 du grec), on a  $(A : C) :: (B : D)$  et  $(B : D) :: (E : F)$ .

Donc  $(A : C) :: (E : F)$  (transitivité de l'identité des rapports).

En préambule à cette preuve, Campanus démontre donc que «*si des rapports sont égaux à un même rapport, ils seront égaux entre eux*». La démonstration présuppose toutefois la transitivité des relations «être une même partie ou des mêmes parties»<sup>80</sup> et «être un même multiple». Nous en donnons une transcription libre :

Si  $(A : C) :: (B : D)$  et  $(E : F) :: (B : D)$  alors  $(A : C) :: (E : F)$ .

En effet :  $A$  est la même partie ou les mêmes parties de  $C$  que  $B$  de  $D$  et  $E$  est la même partie ou les mêmes parties de  $F$  que  $B$  de  $D$ ; ou bien  $A$  contient  $C$  autant de fois que  $B$  contient  $D$  et on aura en plus la même partie ou les mêmes parties de  $C$  dans  $A$  que de  $D$  dans  $B$ , et  $E$  contient  $F$  autant de fois que  $B$  contient  $D$ , et on aura en plus la même partie ou les mêmes parties de  $F$  dans  $E$  que de  $D$  dans  $B$ . Donc  $A$  est la même partie ou les mêmes parties de  $C$  que  $E$  de  $F$ ; ou bien  $A$  contient  $C$  autant de fois que  $E$  contient  $F$  avec en plus la même partie ou les mêmes parties de  $C$  dans  $A$  que de  $F$  dans  $E$ .

D'où  $(A : C) :: (E : F)$  par définition [Campanus 1516, p. 180].

Dans la proposition VII.20 (= VII.19 du grec), il s'agit de prouver que si  $(A : B) :: (C : D)$  alors  $AD = BC$ , et réciproquement. La démonstration se déroule ainsi :

1) Supposons  $(A : B) :: (C : D)$ . Alors  $(A : C) :: (B : D)$  (VII.14)<sup>81</sup>.

Et puisque  $(AB : AD) :: (B : D)$  et  $(AB : BC) :: (A : C)$  (VII.18), alors  $AD = BC$  (transitivité de l'identité de rapport et si  $(a : b) :: (a : c)$  alors  $b = c$ ).

2) Supposons  $AD = BC$ . Alors  $(AB : AD) :: (AB : BC)$  (si  $b = c$  alors  $(a : b) :: (a : c)$ ).

Mais  $(AB : AD) :: (B : D)$  et  $(AB : BC) :: (A : C)$  (VII.18).

Donc  $(A : C) :: (B : D)$  (transitivité de l'identité de rapport) et  $(A : B) :: (C : D)$  (VII.14).

---

<sup>80</sup> Dans le cas «être des mêmes parties», certains historiens voient une difficulté dans ce présupposé, liée à la non explicitation par Euclide de la relation «être des mêmes parties». Voir [Itard 1961, p. 93–94].

<sup>81</sup> Les numérotations des propositions entre parenthèses sont celles de Campanus.

À la fin de la démonstration du sens direct, Campanus prouve donc que «*si un nombre a le même rapport à deux nombres, alors ces deux nombres sont égaux et si deux nombres sont égaux, un même nombre aura le même rapport à ces deux nombres*». Le schéma de la démonstration est le suivant :

Si  $(G : E) :: (G : F)$  alors  $E = F$ . En effet :

1) Si  $G < E$  et  $G < F$ ,  $G$  est la même partie ou les mêmes parties de  $E$  que  $G$  de  $F$  alors  $E = F$ , d'après l'axiome 2.

2) Si  $G > E$  et  $G > F$ ,  $G$  contient  $E$  autant de fois que  $F$  et on a en plus la partie ou les mêmes parties de  $E$  et de  $F$  alors  $E = F$ , d'après l'axiome 3.

La démonstration de la réciproque est fondée sur les mêmes axiomes [Campanus 1516, p. 184].

Campanus évoque abusivement les axiomes 2 et 3 qui ne concernent que deux cas particuliers : celui où  $E$  et  $F$  sont des équimultiples de  $G$  et celui où  $G$  est un équimultiple de  $E$  et  $F$ .

L'ajout des définitions, des axiomes, des postulats et de la proposition VII.11, et l'explicitation de présupposés implicites constituent le travail le plus important et le plus intéressant de Campanus sur le texte du Livre VII de la version II. Dans la suite du livre, il rédige entièrement les démonstrations parfois seulement esquissées par l'auteur de la version II et généralise certains résultats. Par ailleurs, il ajoute quelques propriétés présentes au Livre V mais absentes du Livre VII d'Euclide, et que nous décrivons ici succinctement.

### **9. Manipulations des rapports**

Les propositions VII.12 à 15 (= VII.11 à 14 du grec) proposent quatre propriétés des proportions numériques. Cependant, il en reste quelques-unes, dont certaines, démontrées pour les grandeurs au Livre V, sont absentes du Livre VII pour les nombres. Campanus les ajoute à la suite des propositions VII.15 et VII.19. Ce sont les suivantes :

1) L'inversion :

$$\text{si } (A : B) :: (C : D) \text{ alors } (B : A) :: (D : C).$$

Cette propriété est démontrée par Jordanus dans la proposition II.1. Elle figure dans le texte grec, pour les grandeurs, dans un porisme,

probablement interpolé, à la proposition V.7 [Vitrac 1994, p. 81–82]. Elle ne figure pas dans la version II, mais Campanus l'a rajoutée dans son commentaire à la fin des définitions du Livre V [Campanus 1516, p. 110].

- 2) la proportionnalité disjointe (*proportionalitas disioncta*) :  
si  $(A : B) :: (C : D)$  alors  $(A - B : B) :: (C - D : D)$ .

Elle correspond à la proposition V. 17. Elle est absente du traité de Jordanus.

- 3) La proportionnalité conjointe (*proportionalitas coniuncta*) :  
si  $(A : B) :: (C : D)$  alors  $(A + B : B) :: (C + D : D)$ .

C'est la proposition V.18 pour les grandeurs. Elle est démontrée par Jordanus dans la proposition II.6.

- 4) La proportionnalité converse (*proportionalitas eversa*) :  
si  $(A + B : B) :: (C + D : D)$  alors  $(A + B : A) :: (C + D : C)$ .

Cette propriété est énoncée en grec dans un porisme à la proposition V.19. Elle n'est pas dans la version II, ni dans le traité de Jordanus. Campanus la démontre au Livre V à la suite de la proposition V.19.

- 5) Somme de rapports ayant mêmes conséquents :  
si  $(A : B) :: (C : D)$  et  $(E : B) :: (F : D)$  alors  $(A + E : B) :: (C + F : D)$ .

Elle correspond à la proposition V.24. Elle ne figure pas dans l'*Arithmétique* de Jordanus.

- 6) « Somme inversée » de rapports :  
si  $(B : A) :: (D : C)$  et  $(B : E) :: (D : F)$  alors  $(B : A + E) :: (D : C + F)$ .

Ce résultat n'est pas démontré pour les grandeurs au Livre V, alors qu'il est utilisé dans la proposition VI.31 [Vitrac 1994, p. 124–125].

Il correspond à la proposition II.23 de Jordanus.

- 7) Généralisation des deux derniers résultats à plus de trois rapports.

8) Proportion à égalité de rang dans le cas de la proportion perturbée (proposition VII.19) :

- si  $(A : B) :: (E : F)$  et  $(B : C) :: (D : E)$  alors  $(A : C) :: (D : F)$ .

Cette propriété est démontrée pour les grandeurs à la proposition V.23. Elle figure dans le traité de Jordanus à la proposition II.22.

Ces ajouts témoignent, de la part de Campanus, d'un souci de complétude et du désir de mettre en évidence le parallélisme entre les deux Livres V et VII, déjà visible avec les définitions VII.17, 18, 21, 22. Les éditeurs de la Renaissance ont rejeté les ajouts aux propositions dans

des *additiones* ou des *annotationes*. Dans les manuscrits que j'ai consultés, ils figurent dans le texte, à la suite des démonstrations.

### III. CONCLUSION

Les érudits de la Renaissance se sont présentés comme les héritiers directs de l'Antiquité grecque et minimisèrent de ce fait l'importance de l'apport des médiévaux à la culture occidentale. Certaines histoires générales des mathématiques reprennent cette vision. Pour le XIII<sup>e</sup> siècle, et en ce qui concerne les mathématiques, seule la figure de Léonard de Pise ou Fibonacci émerge d'un paysage pratiquement désert. Au mieux, on souligne l'importance de l'œuvre de Jordanus. Le nom de Campanus est, quant à lui, lié à l'histoire des *Éléments* d'Euclide. Sa version imprimée en 1482 donna lieu à une polémique entre ses partisans et ceux de la traduction de Zamberti faite directement à partir du grec et publiée en 1505<sup>82</sup>. La confrontation des deux versions révélaient en effet des divergences importantes entre les textes. L'histoire contemporaine s'inscrit encore dans les termes de ce débat. Elle ne retient de la version de Campanus que ses traits caractéristiques comme l'ajout de postulats et axiomes, le commentaire sur l'angle de contingence et la mauvaise compréhension de la définition de la proportionnalité des grandeurs du Livre V, autant de thèmes déjà retenus par Clavius dans son commentaire à son édition des *Éléments* de 1574.

Notre étude du Livre VII montre l'ampleur et la fécondité de la réflexion de Campanus, qui ne se réduit pas à quelques commentaires et ajouts relevés par les historiens. Son travail s'inscrit dans une démarche initiée par ses prédécesseurs, mais s'en démarque aussi très clairement. La réception du traité euclidien par les mathématiciens du XII<sup>e</sup> siècle a suscité différentes attitudes. Ainsi, le traducteur de la version II, Robert de Chester (?), met l'accent sur la structure logique du traité qu'il met en évidence en réduisant la plupart des preuves à la mention des propositions ou définitions à utiliser. Jordanus s'approprie, quant à lui, les livres arithmétiques d'Euclide qu'il réorganise et enrichit de la tradition de l'*Arithmétique* de Nicomaque afin de constituer sa propre théorie. Tout autre est le travail de réécriture de Campanus qui veut s'inscrire

---

<sup>82</sup> Voir à ce propos [Murdoch 1971, p. 448–449].

dans le projet euclidien lui-même. Campanus pense avoir décelé les intentions d'Euclide, comme le montrent ses commentaires introduits par «*volens Euclides*» ou «*Euclides intenderet*». Ses ajouts, ses commentaires métamathématiques, très intéressants, vont dans le sens d'une explicitation de ce projet euclidien.

En ce qui concerne la théorie de la proportionnalité numérique, sa réflexion porte d'une part sur la structure globale du traité dont il met en évidence et renforce la cohérence et d'autre part sur les éléments conceptuels propres au Livre VII. Au départ, il y a le constat d'un double exposé de la théorie de la proportionnalité, au Livre V pour les grandeurs et au Livre VII pour les nombres. Dans un long commentaire à la suite des définitions du Livre V, Campanus justifie ce double traitement en soulignant que les objets sont différents et, par conséquent, nécessitent des axiomatiques distinctes. Fort de cette constatation, il va puiser dans l'*Arithmétique* de Jordanus un certain nombre de définitions, postulats et axiomes qui viennent enrichir le Livre VII et forment un cadre conceptuel complet et cohérent, indépendant de celui du Livre V, même s'il lui est souvent légitimement parallèle. Ce faisant, il met clairement en évidence les notions fondamentales de «*partie*» et «*parties*» dont les rôles avaient été occultés dans la version lacunaire des *Éléments* qu'il a utilisée. Par ailleurs, il enrichit le traité euclidien de la théorie médiévale de «*la dénomination d'un rapport numérique*».

Les mathématiciens de la Renaissance puisèrent largement dans la recension de Campanus, sans reconnaître, pour la plupart, ce qu'ils lui devaient. Ainsi, Clavius, dans un long commentaire à la définition V.4 de son édition des *Éléments*, reprend et développe la théorie de la dénomination des rapports numériques. Par ailleurs, il insère dans un lemme à la proposition VII.12, la proposition VII.11 de Campanus, qui est un ajout majeur du mathématicien médiéval. Enfin, il ajoute dans un lemme, à la suite de la proposition VII.14, la propriété explicitée par Campanus sur la transitivité de l'égalité des rapports numériques. Cette même propriété est démontrée par Commandino dans son commentaire à la proposition VII.12 de son édition des *Éléments*. Aucun de ces deux auteurs ne fait référence à Campanus à ce propos.

**ANNEXE : TABLEAU COMPARATIF DES DÉFINITIONS,  
POSTULATS ET AXIOMES**

*Définitions*

Euclide	Jordanus	Campanus	Version II
<i>Éléments</i> <sup>83</sup>	<i>Arithmétique</i> <sup>84</sup>	<i>Éléments</i> <sup>85</sup>	<i>Éléments</i> <sup>86</sup>
1. Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.	I.1. Unitas est esse rei per se discretio.	1. Unitas est qua unaquaeque res una dicitur.	1. Unitas est, qua dicitur res omnis una.
2. Et un nombre est la multitude composée d'unités.	I.2. Numerus est quantitas discretorum collectiva.	2. Numerus est multitudo ex unitatibus composita.	2. Numerus est multitudo ex unitatibus composita.
	I.3. Naturalis series numerorum dicitur in qua secundum unitatis additionem fit ipsorum computatio.	3. Naturalis series numerorum, dicitur in qua secundum unitatis additionem sit ipsorum computatio.	
	I.4. Differentia numerorum appellatur numerus ille quo maior super minorem habundat.	4. Differentia numerorum, appellatur numerus quo maior abundat a minore.	
12. Un nombre premier est celui [qui est] mesuré par une seule unité.	III.1. Numerus primus dicitur qui non habet partem preter unitate.	5. Numerus primus dicitur, qui sola unitate metitur.	9. Numerus primus dicitur qui sola unitate numeratur.
14. Un nombre composé est celui [qui est] mesuré par un certain nombre.	III.2. Compositus vero qui habet numerum alium se numerantem.	6. Numerus compositus dicitur, quem alius numerus metitur.	10. Numerus compositus dicitur, quem numerus alius metitur.

Euclide	Jordanus	Campanus	Version II
<i>Éléments</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>	<i>Éléments</i>
<b>13.</b> Des nombres premiers entre eux sont ceux [qui sont] mesurés par une seule unité comme commune mesure.	<b>III.4.</b> Contra se primi autem dicuntur qui a nullo communiter numerantur excepta sola unitate.	<b>7.</b> Numeri contra se primi dicuntur, qui nullo numero excepta sola unitate numerantur.	<b>11.</b> Numeri contra se primi dicuntur, qui nullo numero excepta sola unitate communiter numerantur.
	<b>III.3.</b> Commensurabiles sive communicantes vocantur quos communiter aliquis numerus numerat.	<b>8.</b> Numeri adinvicem compositi sive communicantes dicuntur, quos alius numerus quam unitas metitur, nullusque eorum est ad alium primus.	<b>12.</b> Numeri communicantes dicuntur, quos alius numerus quam unitas metitur nullusque eorum ad alium primus.
<b>16a.</b> Un nombre est dit multiplier un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté [à lui-même], et qu'il est produit un certain [nombre].	<b>I.6a.</b> Numerus per alium multiplicatur qui totiens coacervatur sibi quotiens in multiplicante est unitas;	<b>9.</b> Numerus per alium multiplicari dicitur, qui toties sibi coacervatur, quoties in multiplicante est unitas.	<b>14a.</b> Numerus ductus in alium dicitur, qui totiens multiplicatur, quotiens in se est unitas.
	<b>I.6b.</b> et qui ex multiplicatione provenit productus nominatur.	<b>10.</b> Productus vero dicitur, qui ex eorum multiplicatione crescit.	<b>14b.</b> Productus vero, qui ex eorum multiplicatione concrecit.
	<b>I.7.</b> Numerus alium numerare dicitur qui secundum aliquem multiplicatus ipsum producit.	<b>11.</b> Numerus alium numerare dicitur, qui secundum aliquem multiplicatus illum producit.	
<b>3.</b> Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand.	<b>I.8a.</b> Pars est numerus numeri minor maioris, cum minor maiorem numerat,	<b>12a.</b> Pars, est numerus numeri minor maioris, cum minor maiorem numerat.	

<sup>83</sup> Nous reprenons ici la traduction de Bernard Vitrac, faite à partir de l'édition de I.L. Heiberg [Vitrac 1994, p. 247–268]. Il faut noter que Thomas L. Heath n'a pas gardé dans sa traduction la définition du nombre impairement pair. Cette définition figure dans le corps du texte de l'édition de I.L. Heiberg – c'est la définition VII.10 –,

Euclide	Jordanus	Campanus	Version II
<i>Éléments</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>	<i>Éléments</i>
5. Et un multiple, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.	<b>I.8b.</b> et qui numeratur numerantis multiplex appellatur.	<b>12b.</b> Et qui numeratur numerantis multiplex appellatur.	
	<b>I.9.</b> Denominans, est numerus secundum quem sumitur pars in suo toto.	<b>13.</b> Denominans, est numerus secundum quem pars sumitur in suo toto.	
	<b>I.10.</b> Similes dicuntur partes, quae ab eodem numero denominantur.	<b>14.</b> Similes dicuntur partes, quae ab eodem numero denominantur.	
	<b>I.13.</b> Prima et simpla numeri pars est unitas.	<b>15.</b> Prima simpla numeri pars, est unitas.	
	<b>I.14.</b> Quando duo numeri partem habuerint communem, quotiens eadem pars fuerit in minore, tot partes maioris dicitur esse minor <sup>87</sup> .	<b>16.</b> Quando duo numeri partem habuerint communem, tot partes maioris dicitur esse minor, quoties eadem pars fuerit in minore, totae vero, quoties ipsa fuerit in maiore.	
	<b>II.2.</b> Numeri ad numerum dicitur proportio minoris quidem ad maiorem, in eo quod est pars vel partes. Maioris vero ad minorem, secundum quod eum continet et eius partem vel partes.	<b>17.</b> Numeri ad numerum dicitur proportio minoris quidem ad maiorem, in eo quod est maioris pars vel partes. Maioris vero ad minorem, secundum quod eum continent et eius partem vel partes.	

bien qu'il la jugeait interpolée. Bernard Vitrac, qui s'est proposé de traduire l'édition de I.L. Heiberg, l'a donc conservée. En conséquence, à partir de la définition VII.11, il faut retrancher un à la numérotation de Bernard Vitrac pour retrouver celle de Thomas L. Heath.

<sup>84</sup> D'après l'édition de Hubert L.L. Busard [1991, p. 64–65 et 83].

Euclide	Jordanus	Campanus	Version II
<i>Éléments</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>	<i>Éléments</i>
	<b>II.6.</b> Quando fuerint tres numeri continue proportionales, dicitur primi ad tertium proportio primi ad secundum duplicata. Ad quartum vero triplicata.	<b>18.</b> Cum fuerint quotlibet numeri continue proportionales, dicitur proportio primi ad tertium sicut primi ad secundum duplicata, ad quartum vero triplicata.	
	<b>II.7a.</b> Cum autem continuate fuerint vel eedem vel diverse proportionales, dicitur primi ad ultimum proportio ex omnibus composita.	<b>19.</b> Cum continuatae fuerint eadem vel diversae proportionales, dicitur proportio primi ad ultimum, ex omnibus composita.	
<b>21.</b> Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équi-multiples, ou la même partie, ou les mêmes parties.			<b>20.</b> Numeri proportionales sunt, quorum primus in secundo tamquam tertius in quarto aut in primo secundus tamquam in tercio quartus.
	<b>II.8.</b> Denominatio dicitur proportionis minoris quidem numeri ad maiorem, pars, vel partes quote illius fuerit, maioris vero ad minus numerus secundum quem eum continet et pars et partes minoris que in maiore superfluent.	<b>20.</b> Denominatio dicitur proportionis minoris quidem numeri ad maiorem, pars, vel partes ipsius minoris quae in maiore sunt. Maioris autem ad minorem, totum vel totum et pars vel partes, prout maior superfluit.	

<sup>85</sup> D'après l'édition de Paris [Campanus 1516].

<sup>86</sup> D'après l'édition de Hubert L.L. Busard et Menso Folkerts [1992, p. 187].

<sup>87</sup> Telle qu'elle est, cette définition n'a pas de sens et est manifestement tronquée. Mais le MS Vatican, Ottob. lat. 2120 (XV<sup>e</sup> siècle), qui contient l'*Arithmétique* de Jordanus, ajoute : «*tote vero illa fuerit in maiorem*». Toutefois, cette correction a pu être faite à partir de l'édition de Campanus [Busard 1991, vol. 1, p. 51 ; vol. 2, p. 9].

Euclide	Jordanus	Campanus	Version II
<i>Éléments</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>	<i>Éléments</i>
	<b>II.9.</b> Similes sive una alii eadem dicuntur proportiones que eandem recipiunt denominationem. Maior vero que maiorem et minor que minorem.	<b>21.</b> Similes sive una alii eadem dicuntur proportiones, quae eandem denominationem recipiunt. Maior vero, quae maiorem. Minor autem, quae minorem.	
		<b>22.</b> Numeri vero quorum proportio una, proportionales appellantur.	
	<b>III.5.</b> Termini proportionis dicuntur numeri minimi inter quos invenitur illa proportio.	<b>23.</b> Termini sive radices dicuntur, quibus in eadem proportione minores sumi impossibile est.	

***Postulats******Petitiones***

Jordanus	Campanus
<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>
<b>1.</b> Cuilibet numero quotlibet posse sumi equales.	<b>1.</b> Cuilibet numero quotlibet posse sumi aequales prout libet, vel multiplices.
<b>2.</b> Quolibet numero aliquem quantumlibet esse maiorem.	<b>2.</b> Quolibet numero aliquem quantumlibet sumere posse maiorem.
<b>3.</b> Seriem numerorum in infinitum posse extendi.	<b>3.</b> Seriem numerorum in infinitum posse procedere.
	<b>4.</b> Nullum numerum in infinitum posse diminui.

*Axiomes*  
*Communes animi conceptiones*

<b>Jordanus</b>	<b>Campanus</b>
<i>Arithmétique</i>	<i>Éléments</i>
1. Omnis pars est minor suo toto.	1. Omnis pars est minor suo toto.
3. Quicumque eiusdem sive equalium eque multiplices fuerint, ipsi quoque erunt equales.	2. Quicumque eiusdem sive equalium fuerint aequae multiplices, ipsi quoque erunt equales.
4. Quibus idem numerus eque multiplex fuerit sive quorum multiplices equales fuerint, ipsi etiam sunt equales.	3. Quibus idem numerus aequae multiplex fuerit sive quorum aequae multiplices fuerint aequales, & ipsi etiam erunt aequales.
5. Omnis numeri pars est unitas ab ipso denominata.	4. Omnis numeri pars est unitas ab ipso denominata.
2. Omnis pars minor est que maiorem habet denominationem.	5. Omnis pars est minor quae maiorem habet denominationem, maior vero, quae minorem.
6. Quilibet numerus totus est ab unitate quota pars ipsius est unitas.	6. Quilibet numerus totus est ab unitate quota pars ipsius est unitas.
7. Si unitas in aliquem numerum sive idem in unitatem ducatur, se ipsum producit.	7. Quicumque numerus in unitatem ducitur, seipsum producit & in seipsum numerat. Unitas quoque in quemcunque ducta, producit eundem.
8. Extremorum differentia ex differentiis eorundem ad medium est composita.	
	8. Quicumque numerus numerat duos, numerat quoque compositum ex illis.
	9. Quicumque numerus numerat aliquem, numerat omnem numeratum ab illo.
	10. Quicumque numerus numerat totum et detractum, numerat residuum.

## BIBLIOGRAPHIE

AN-NAYRĪZĪ

- [1899] *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, Leipzig : B.G. Teubner, 1899.

BUSARD (Hubert L.L.)

- [1968] *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?)*. Books I–VI, Leiden : E.J. Brill, 1968.
- [1971] Die Traktate *De proportione* von Jordanus Nemorarius und Campanus, *Centaurus*, 15 (1971), p. 193–227.
- [1977] *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?)*. Books VII–XII, Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1977.
- [1983a] *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath*, Toronto : Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983.
- [1983b] *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*, Leiden : New Rhine Publishers, 1983.
- [1987] *The Medieval Latin Translation of Euclid's Elements Made Directly from the Greek*, Stuttgart : Franz Steiner Verlag, Wiesbaden GmbH, 1987.
- [1991] *Jordanus de Nemore*, De elementis arithmetica artis, *A Medieval Treatise on Number Theory*, Stuttgart : Franz Steiner Verlag, 1991.
- [1996] *A Thirteenth-Century Adaptation of Robert of Chester's Version of Euclid's Elements*, coll. Algorismus, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften München, 1996.
- [1998] Über den lateinischen Euklid im Mittelalter, *Arabic Sciences and Philosophy*, 8 (1998), p. 97–129.

BUSARD (Hubert L.L.), FOLKERTS (Menso)

- [1992] *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the So-called Adelard II Version*, Basel etc. : Birkhäuser Verlag, 1992.

CAMPANUS

- [1516] *Euclidis megarensis geometricorum elementorum libri XV – Campani galli transalpini in eosdem commentariorum libri XV – Theonis Alexandrini Bartolomeo Veneto Zamberto interprete in tredecim priores commentariorum libri XIII – Hypsiclis Alexandrini in duos posteriores eodem Bartolomeo Zamberto interprete, commentariorum libri II*, Paris : Henri Estienne, 1516.

CLAGETT (Marshall)

- [1953] The Medieval Latin Translation from the Arabic of the *Elements* of Euclid, *Isis*, 44 (1953), p. 16–42.

CLAVIUS (Christopher)

- [1574] *Euclidis Elementorum libri XV*, Rome : apud Vincentium Accoltum, 2 vol., 1574. Réédité dans Clavius C., *Opera mathematica*, vol. 1, Mainz : 1611–1612.

COMMANDINO (Federico)

- [1572] *Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis a Federico Commandino urbinate in latinum conversi*, Pesaro, 1572.

DE YOUNG (Gregg)

- [1981] *The Arithmetic Books of Euclid's Elements in the Arabic Tradition*, Ph.D., Harvard University, Cambridge, 1981.

- [1984] The Arabic Textual Traditions of Euclid's *Elements*, *Historia Mathematica*, 11 (1984), p. 147–160.
- DJEBBAR (Ahmed)
- [1996] Quelques commentaires sur les version arabes des *Éléments* d'Euclide et sur leur transmission à l'Occident musulman, in Folkerts (Menso), éd., *Mathematische Probleme im Mittelalter*, Wiesbaden : Harrassowitz Verlag, 1996, p. 91–114.
- FOLKERTS (Menso)
- [1971] Anonyme lateinische Euklidbearbeitungen aus dem 12. Jahrhundert, *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwiss. Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 1. Abh., Wien, 1971.
- [1987] Adelard's Version of Euclid's *Elements*, in Burnett (Charles) ed., *Adelard of Bath, an English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century*, London : The Warburg Institute, University of London, 1987.
- [1989] Euclid in Medieval Europe, in Stevens (W.M.), ed., *Questio : De rerum natura*, II, The Benjamin Catalogue for History of Science, University of Winnipeg, Canada, 1989, p. 1–63.
- GARDIES (Jean-Louis)
- [1988] *L'héritage épistémologique d'Euxode de Cnide. Un essai de reconstruction*, Paris : J. Vrin, 1988.
- GUILLAUMIN (Jean-Yves), éd. et trad.
- [1995] Boèce, *Institution arithmétique*, Paris : Les Belles Lettres, 1995.
- HEATH (Thomas. L.), trad.
- [1956] *The Thirteen Books of Euclids' Elements*, réimp. de la 2<sup>e</sup> éd., New York : Dover, 1956.
- HOYRUP (Jens)
- [1988] Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator : an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure, *Archive for History of Exact Sciences*, 38 (1988), p. 307–363.
- ITARD Jean
- [1961] *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Paris : Hermann, 1971.
- KOELBLEN-ROMMEVAUX (Sabine)
- [1994a] *Un jalon dans l'histoire de la théorie des proportions au XVI<sup>e</sup> siècle : le commentaire de Clavius au livre V des Éléments d'Euclide*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1994.
- [1994b] Une pratique de la composition des raisons dans un exercice de combinatoire, *Revue d'histoire des sciences*, 57 (1994), p. 209–247.
- LORCH (Richard)
- [1987] Some Remarks on the Arabic-Latin Euclid, in Burnett (Charles), ed., *Adelard of Bath, an English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century*, London : The Warburg Institute, 1987.
- MOLLAND (Andrew G.)
- [1965] The Denomination of Proportions in the Middle Ages, *Actes du XI<sup>e</sup> Congrès International d'Histoire des Sciences*, t. 3, Wroclaw etc., 1965.
- MUELLER (Ian)
- [1981] *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.), etc. : MIT Press, 1981.
- MURDOCH (John)

- [1963] The Medieval Language of Proportions : Elements of the Interaction with Greek Foundations and the Development of New Mathematical Techniques, in Crombie (A.C.), ed., *Scientific Change*, London, 1963, p. 240–251.
- [1968] The Medieval Euclid : Salient Aspect of the Translations of the *Elements* by Adelard of Bath and Campanus of Novara, *Revue de synthèse*, 3<sup>e</sup> s., n<sup>o</sup> 49–52 (1968), p. 67–94.
- [1971] Euclid : Transmission of the *Elements*, in Gillispie (Charles), ed., *Dictionary of Scientific Biography*, New York : Scribner & Sons, vol. IV, 1971, p. 437–459.
- SEZGIN (F.)
- [1974] *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. 5, Leyden : Brill, 1974.
- TOOMER (Gerald J.)
- [1971] Campanus of Novara, in Gillispie (Charles), ed., *Dictionary of Scientific Biography*, New York : Scribner & Sons, vol. III, 1971, p. 23–29.
- VITRAC (Bernard)
- [1994] Euclide, *Les Éléments*, vol. II. Livres V et VI : Proportions et similitude. Livres VII à IX : Arithmétique, Paris : PUF, 1994.
- WEISSENBORN (Hermann)
- [1880] Die Übersetzung des Euclid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath, *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch literarische Abteilung* 25 (1880), p. 143–166.