



**HAL**  
open science

# Géométrie non euclidienne en physique: relativité générale et cosmologie

Henri Reboul

► **To cite this version:**

Henri Reboul. Géométrie non euclidienne en physique: relativité générale et cosmologie. 2013. hal-01454764

**HAL Id: hal-01454764**

**<https://hal.science/hal-01454764v1>**

Submitted on 3 Feb 2017


**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equipe IREM Maths-Philosophie

IREM de Montpellier

<http://www.irem.univ-montp2.fr/>

	<b>Géométrie non euclidienne en Physique :</b> <i>Relativité Générale et cosmologie</i>	
--	--	---

<b>Disciplines scientifiques</b>	Epistémologie – Physique - Mathématiques
<b>Thème</b>	Genèse et généralisation de l'utilisation des géométries non euclidiennes en Physique : l'exemple de la relativité générale et de la cosmologie
<b>Description</b>	Ce document est destiné aux enseignants de philosophie, de physique et de mathématiques. Il cherche à résumer l'apparition et la fructueuse utilisation du concept de Géométrie Non Euclidienne (GNE) en relativité générale pour décrire la gravitation dans ses effets locaux (trous noirs, ...) et cosmologiques (Big Bang, ...) qui ont des valeurs à la fois culturelle et motivantes pour les élèves. Le texte suit la chronologie de la démarche scientifique d'Aristote au XXI <sup>e</sup> siècle. Des encadrés essaient de résumer l'essentiel (et notamment ce qui peut être littéralement annoncé aux élèves avant de les accompagner plus loin)
<b>Mots-clés</b>	Géométrie euclidienne Géométries non euclidiennes Espace, temps, matière, énergie Relativités restreinte et générale, trous noirs, GPS Expansion de l'espace, cosmologie, Big Bang
<b>Auteur</b>	Henri Reboul, LUPM (Laboratoire Univers et Particules de Montpellier), UMR 5299

# Concept de géométrie non euclidienne en Physique :

## La relativité générale et la Cosmologie

H. Reboul

### INTRODUCTION

*«Le vide est, d'après la définition vulgaire, l'endroit où il n'y a pas de corps, mais où il peut en exister un. Le temps est le nombre du mouvement, et sans corps naturel, il n'est pas de mouvement. Or, on l'a démontré, hors du ciel, il n'y a ni ne peut y avoir aucun corps ; dès lors, il est manifeste qu'il n'y a non plus ni lieu, ni vide, ni temps hors de lui»*  
(Aristote, circa -330, De Caelo, 279a, 12 - 18.)

Cette affirmation par Aristote de la coextensivité de l'espace du temps et de la matière (« *hors du ciel [...] ni lieu, ni vide ni temps* ») ne survit pas longtemps à l'abandon de sa Physique et c'est Newton (1687, Principia) qui affirme les caractères absolus de l'espace (implicitement euclidien) et du temps. Les progrès si fantastiques de la physique classique (gravitation universelle, thermodynamique, électromagnétisme) feront même dire aux plus grands scientifiques de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle que la physique fondamentale était « *définitivement constituée* » (Kelvin, 1892)<sup>1</sup>.

Mais l'indépendance entre le contenant (espace et temps) et son contenu (matière et énergie), arbitrairement affirmée par Newton, portait toutefois en germe une négation de la cosmologie, la science des propriétés globales du cosmos. En effet, on n'observe que du *contenu* (des *objets*) et s'il est sans relation avec le *contenant* (*espace, temps*), la forme de ce dernier reste hors d'atteinte. Auguste Comte écrit en 1844 « *La notion vague et indéfinie de l'Univers est si peu accessible à la saine astronomie, que nous devons finalement exclure ce terme du vrai langage scientifique* »<sup>2</sup>.

La cosmologie ne retrouve son statut de science qu'au XX<sup>e</sup> siècle avec la relativité générale : Cette dernière est une relation entre contenant et contenu qui inclut la coextensivité (espace, temps, matière) d'Aristote, la quantifie géométriquement et, de plus, avec des géométries qui ne sont plus euclidiennes.

Les fondements de la science moderne ont souvent des racines très lointaines. Celles des géométries non-euclidiennes (GNE) apparaissent dans des distanciations exprimées par certains auteurs comme Proclus au V<sup>e</sup> siècle par rapport au cinquième postulat d'Euclide. Paul Mansion rapporte qu'on n'a « *cessé d'essayer de démontrer [ce 5<sup>ème</sup> axiome] dans l'antiquité, au moyen âge, à la Renaissance, au XVII<sup>e</sup>, au XVIII<sup>e</sup>, au XIX<sup>e</sup> siècle* »<sup>3</sup>. Pour les XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, on retrouve les GNE chez Lambert en 1786<sup>4</sup> et chez Gauss en 1792, puis avec Nicolas Lobatchevski à partir de 1826, mais elles rencontrent alors toujours beaucoup de réticences dans la communauté scientifique. La courbure d'un espace en un point et dans une direction est définie par Bernhard

<sup>1</sup> Discours à la Société Anglaise de Physique

<sup>2</sup> Traité philosophique d'astronomie populaire

<sup>3</sup> Paul Mansion, 1908, revue néo-scholastique vol. 15, N° 60 pp 441-453

<sup>4</sup> « Sans le cinquième postulat d'Euclide la surface d'un triangle est proportionnelle à l'excès de deux droits sur la somme de ses angles » (Lambert, 1786, cité in Mansion op. cit.)

Riemann (1826-1866) en 1854 et elle commence son entrée en physique car Riemann envisage déjà la possibilité d'une relation entre l'espace et les corps qui y sont contenus<sup>5</sup>.

Voici quelques remarques de Kant et de Gauss qui étayaient des prémices de la révolution conceptuelle du XX<sup>e</sup> siècle :

- « *L'espace est une représentation nécessaire a priori qui est le fondement de toutes les intuitions extérieures* » (Kant, 1787, Critique de la raison pure)
- « *La nécessité de notre géométrie ne peut être prouvée [...] On ne devrait pas placer la géométrie à côté de l'Arithmétique qui est purement a priori mais à côté de la Mécanique.* » (Gauss, 1817 cité in Mansion p 445 op.cit.)
- « *Si la géométrie non euclidienne était la vraie [réalisée dans la nature] et si cette constante [(la vraie GNE de la nature)] était dans un certain rapport avec les grandeurs accessibles à nos mesures sur la terre ou au ciel, on pourrait l'obtenir a posteriori* » (Gauss 1824 cité in Paul Mansion (1908) p.445 op.cit.)

## RELATIVITÉ RESTREINTE

En 1905, cette théorie relie l'espace et le temps, ce qui sera bien formalisé par Minkowski en 1908, qui introduit la « métrique » (au sens de carré de l'élément de longueur  $ds$ ) de l'« *espace-temps* », espace mathématique à 4 dimensions (les 3 de l'espace physique et une de temps) sous la forme  $ds^2 = -dl^2 + c^2 dt^2$ .

En coordonnées cartésiennes ou sphériques, ce  $ds^2$  s'écrit respectivement :

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + c^2 dt^2$$

Cette métrique est pseudo-euclidienne à cause de sa signature - - - +. En effet le  $ds^2$  d'une géométrie euclidienne doit être une forme quadratique, définie, positive, des différentielles des variables<sup>6</sup>. Mais l'espace-temps physique représenté par cet espace mathématique à 4 dimensions n'a toutefois pas de courbure : ses géodésiques sont représentées mathématiquement par des segments de droite (ce qui signifie que les objets qui suivent ces géodésiques ont un mouvement rectiligne uniforme). Par ailleurs la relativité restreinte entraîne l'équivalence entre masse et énergie selon la célèbre relation  $E = mc^2$ .

La relativité restreinte **relie** des concepts :

- d'une part espace et temps qui deviennent l'indissociable espace-temps
- d'autre part matière et énergie selon la relation d'équivalence  $E = mc^2$

Lors d'un changement de référentiel inertiel, ce ne sont plus des intervalles d'espace et de temps  $dl$  et  $dt$  qui se conservent mais l'élément spatio-temporel  $ds$  (tel que  $ds^2 = -dl^2 + c^2 dt^2$ )

<sup>5</sup> du moins « *dans l'infiniment petit* »

<sup>6</sup> On pourrait aisément la rendre « formellement » euclidienne en utilisant les nombres complexes et en prenant comme nouvelles variables :  $x' = ix$ ,  $y' = iy$ ,  $z' = iz$  et en l'écrivant  $ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + c^2 dt^2$

## RELATIVITÉ GÉNÉRALE

C'est vers 1912-13 qu'Einstein, qui cherche à inclure la gravitation dans sa théorie, réalise l'intérêt des GNE. Sa *Relativité Générale* (1915-1917), première (et à ce jour meilleure) théorie géométrique relativiste de la gravitation, est une révolution scientifique majeure.

La relativité générale est fondée par **une relation et un principe**. La relation est représentée par les équations (tensorielles) d'Einstein entre la géométrie de l'espace-temps et son contenu :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$  est le « *tenseur d'Einstein* » qui définit comment varie la géométrie de l'espace-temps (les coefficients de la métrique) au voisinage d'un point et  $T_{\mu\nu}$  est le « *tenseur énergie-quantité de mouvement* » qui définit comment varie la distribution de masse-énergie au voisinage de ce point. Le principe est défini dans l'encadré ci-dessous.

La relativité générale met donc en **relation existentielle et quantitative** les quatre concepts : espace, temps, matière et énergie, lesquels deviennent ainsi « reliés »

**En relativité générale la gravitation n'est plus manifestée par une « force » mais par**

- **une courbure spatio-temporelle** liée au contenu par les équations d'Einstein. Sauf symétrie très particulière, la géométrie de cet espace-temps n'est plus euclidienne (la courbure n'est pas nulle) dès qu'il y a de la masse-énergie quelque part.
- **et le « principe des géodésiques »** : une particule « libre » (c'est-à-dire qui n'est soumise à aucune force mais à la seule gravitation) suit une géodésique (courbe de longueur extrémale) de l'espace-temps.

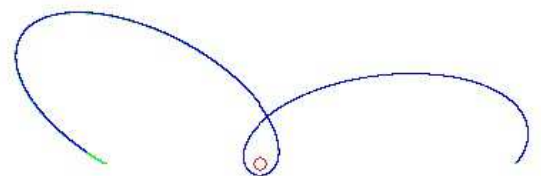
En raison de la symétrie particulière que l'on peut supposer à l'Univers, distinguons les applications de la Relativité Générale à la gravitation locale et à l'Univers.

**Gravitation locale.** Si l'on suppose que le contenu est une masse ponctuelle  $M$  unique située à l'origine des coordonnées ( $r=0$ ) l'intégration des équations d'Einstein fournit les coefficients<sup>7</sup> de la métrique ( $ds^2$ ) associée : c'est la métrique de Schwarzschild (1917)

$$ds^2 = - dr^2/(1-2GM/c^2r) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + (1-2GM/c^2r) c^2 dt^2$$

Les géodésiques de cet espace-temps :

- retrouvent approximativement les orbites Képlériennes mais en expliquant de plus la rotation<sup>8</sup> des « ellipses » que n'expliquait pas la gravitation Newtonienne) et qui devient très forte (schéma) lorsqu'on s'approche de l'horizon du trou noir.



Orbite au voisinage de l'horizon (cercle rouge) d'un trou noir

<sup>7</sup> ces « coefficients de la métrique » sont les termes qui, dans l'expression du  $ds^2$ , multiplient  $dr^2$ ,  $d\theta^2$ ,  $d\phi^2$ ,  $dt^2$

<sup>8</sup> appelée « *avance du périhélie* »

- prévoient la déviation des rayons lumineux au voisinage d'une masse (confirmée dès 1919 lors d'une éclipse solaire)
- prévoient l'horizon (surface de non-retour) du « trou noir » à  $r = 2GM/c^2$  pour lequel le coefficient de  $dr^2$  devient infini ( $-1/0$ ) et celui de  $dt^2$  nul
- prévoient les différences de marche d'horloges avec l'altitude : par exemple le système de positionnement global par satellite (GPS) prend en compte cette courbure de l'espace-temps par la masse de la Terre (sans cela les erreurs de positionnement dépasseraient souvent 10 km<sup>9</sup>).

## COSMOLOGIE

Le « *principe cosmologique* » est l'hypothèse que le *contenu* cosmique (le Tout matière-énergie) est un fluide (ou un mélange de fluides : matière, lumière, ...) parfait(s) homogène(s) isotrope(s) et sans mouvement macroscopique.

Cette « symétrie » du contenu doit se retrouver chez le contenant (espace-temps) en raison de la proportionnalité entre le  $G_{\mu\nu}$  (contenant) et le  $T_{\mu\nu}$  (contenu) des équations d'Einstein.

On démontre que la métrique la plus générale pour l'espace-temps associé au principe cosmologique et à la relativité générale (ou à toute autre théorie géométrique relativiste de la gravitation) est celle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -R(t)^2 [dr^2/(1-kr^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2] + c^2 dt^2$$

avec  $k = -1, 0$  ou  $+1$  pour les 3 seules géométries spatiales (espace physique 3D) possibles (à courbure homogène puisque le contenu est supposé homogène), respectivement : hyperbolique  $H^3$ , euclidien  $E^3$  et hyper-sphérique  $S^3$ .

La fonction  $R(t)$  est le « facteur d'échelle » de l'espace. C'est une fonction réelle, définie, positive, de la seule variable  $t$ . Si la théorie de la gravitation est la relativité générale, alors, en introduisant les expressions des coefficients de la métrique FLRW ci-dessus dans le  $G_{\mu\nu}$  des équations d'Einstein, la solution mathématique conduit aux équations différentielles de Friedmann-Lemaître (1922-1927) sur la fonction  $R(t)$  qui décrit l'histoire de la géométrie de l'univers<sup>10</sup>.

$$-\frac{k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{2\dot{R}}{Rc^2} + \Lambda = \frac{8\pi G p}{c^4}$$

$$\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G \rho}{3c^2}$$

Par ailleurs, la dimension temps  $t$  se retrouve orthogonale aux dimensions d'espace. Ce « *temps cosmique* » est ainsi indépendant des coordonnées d'espace. Il est le même pour tous les observateurs. Cela ne contredit pas la perte de la notion de *simultanéité* qu'on associe souvent à la

<sup>9</sup> la correction de relativité restreinte liée à la vitesse orbitale des satellites est dix fois moindre

<sup>10</sup>  $\rho$  et  $p$  sont la pression et la masse volumique ;  $\Lambda$  la constante cosmologique,  $\dot{R} = dR/dt$ ,  $G$  la constante de la gravitation.

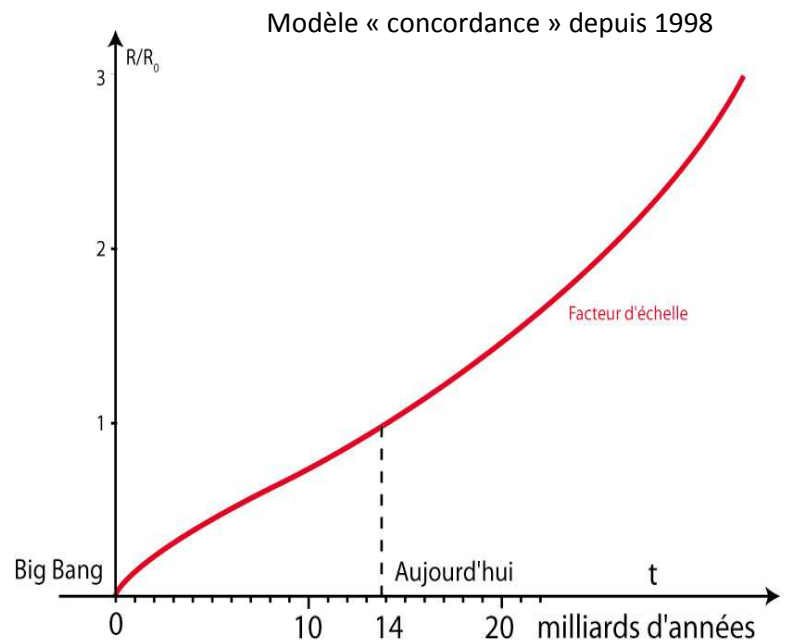
relativité restreinte. En effet puisqu'on a supposé qu'il n'y a pas de mouvement, tous les objets du cosmos (et parmi eux les observateurs au repos) sont dans le même *référentiel*.

La nouvelle révolution conceptuelle qui est apparue lorsqu'on a appliqué la relativité générale à un univers uniforme est que le facteur d'échelle de l'espace  $R(t)$  n'est pas *statique* mais *dynamique* : la géométrie (et donc la distance entre points fixes) varie avec le temps (Friedmann 1922, Lemaître 1927). Einstein lui-même refusera jusqu'en 1932 les réalités (mathématique, puis physique) de cette conséquence imprévue.

On peut remarquer que l'espace lui-même (3D) du modèle d'univers peut être sans courbure si  $k=0$  (et les observations en 2013 incluent cette possibilité) mais son facteur d'échelle varie. Dans le cadre de la géométrie euclidienne on n'imaginait même pas que l'espace puisse être *dynamique*<sup>11</sup>. En revanche, le cadre des GNE permet d'intégrer naturellement la métrique non statique FLRW puisqu'une des dimensions de l'espace-temps (4D) représente le temps et que les 3 autres coefficients sont fonction du temps : il y a, même si  $k=0$ , une courbure spatio-temporelle.

Pour calculer  $R(t)$  en intégrant les équations de Friedmann-Lemaître, il suffit de pouvoir mesurer :

- le taux d'expansion  $\dot{R}/R$  présent :  $H_0$
- les masses volumiques de matière  $\rho_{m0}$  et de lumière  $\rho_{r0}$  présentes
- la courbure spatiale 3D



Depuis 1998 ces mesures convergent vers un ensemble de valeurs<sup>12</sup> de ces paramètres

$H_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho_{m0} \approx 2,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho_{r0} \approx 4,6 \cdot 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$  et  $k = 0$  qui caractérisent un modèle « concordance » dont l'âge<sup>13</sup> est  $13,8 \cdot 10^9$  ans.

Ce modèle présente une singularité ( $R(t=0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{R}(t) = \infty$ ), communément appelée « Big Bang » située il y a environ 13,8 milliards d'années de temps cosmique<sup>14</sup>. Le fluide dominant (par

<sup>11</sup> variable avec le temps

<sup>12</sup> Les valeurs de  $H_0$ ,  $\rho_{m0}$ , ... sont celles déduites de données de la mission Planck de l'ESA en mars 2013

<sup>13</sup> Par « âge » on entend la durée depuis le Big Bang ou l'« ère de Planck » (cf. note suivante)

<sup>14</sup> Cette « singularité » qui empêche tout prolongement mathématique et toute description physique en  $R=0$  (densités infinies) est conséquence de la seule relativité générale (comme pour celle au centre des trous noirs). Mais si l'on prend en compte l'autre (et si différente) grande théorie de la physique, la mécanique quantique, alors le



sa masse volumique) dans cet espace-temps a été la lumière durant environ les premiers 30 000 ans, puis la matière. Mais, il y a environ 6 milliards d'années, l'effet sur l'espace de la constante cosmologique  $\Lambda$ , un des termes du  $G_{\mu\nu}^{15}$ , a, par sa constance, commencé à dominer sur la matière (et a fortiori la lumière) qui, elles, se diluent avec l'expansion de l'espace. Cela se traduit par un point d'inflexion sur la courbe  $R(t)$ . Depuis, la dérivée seconde de  $R(t)$  est positive.

L'espace de l'Univers est en expansion depuis près de 14 milliards d'années et cette expansion s'accélère depuis environ 6 milliards d'années. Selon ce modèle standard (ou « concordance ») depuis 1998, le graphe du facteur d'échelle  $R(t)$  devrait, pour progressivement rejoindre, comme on le perçoit sur la figure précédente, celui d'une exponentielle.

Attention, le modèle standard est fondé sur le principe cosmologique. L'expansion de l'espace n'y existe donc qu'aux échelles de distance où notre cosmos présent est encore assez uniforme, c'est-à-dire au-delà de  $\sim 10^7$  a-l. Cette expansion ne concerne donc pas notre galaxie ( $10^5$  a-l) ni, a fortiori, notre système solaire, notre planète, ...

Les observations récentes du fond cosmologique (la sphère de dernière diffusion située, avec l'expansion, à près de  $46 \cdot 10^9$  a-l<sup>16</sup>) confirment la pertinence (approximative) du modèle idéal qui a été postulé : la vitesse du système solaire par rapport au cosmos n'est en effet que de 370 km/s c'est-à-dire le millième de la vitesse de la lumière et il en est de même pour l'immense majorité des astres observés.

Les grands relevés de galaxies et de quasars du début du XXI<sup>e</sup> siècle montrent l'homogénéité présente à grande échelle de la répartition de matière de notre cosmos. Le rayonnement microonde fossile à  $2,7255 \pm 0,0005$  K s'est découpé 380 000 ans après le « Big Bang » lorsque la température a baissé en dessous de 3000 K et que la matière ordinaire, jusqu'alors plasma, est devenue un gaz neutre et transparent. Ce rayonnement nous montre qu'à cette époque les inhomogénéités de densité ne dépassaient guère 1/100 000. Les simulations numériques d'évolution de cette structuration de l'univers semblent confirmer qu'avec le modèle concordance on obtient, au bout de 14 milliards d'années d'évolution calculée, la structuration actuellement observée (superamas de galaxies, amas, galaxies, ...).

---

pouvoir descriptif s'arrête au « mur de Planck » c'est-à-dire lorsque la masse volumique atteint  $10^{97}$  kg m<sup>-3</sup>. Dans la chronologie purement relativité générale cela correspondrait à  $t = 10^{-43}$  s après le Big Bang, soit le « temps de Planck », mais il faut dire qu'on ne sait pas, en 2013, faire de la physique à cette échelle où mécanique quantique et relativité générale semblent incompatibles.

<sup>15</sup> Il est équivalent dans les équations d'Einstein de remplacer  $\Lambda$  par un fluide physique (« énergie du vide »). Une valeur positive de  $\Lambda$  a une vertu expansive de l'espace. S'il n'y avait ni matière ni lumière, un univers de  $\Lambda$  aurait (si  $\Lambda > 0$ ) pour facteur d'échelle  $R(t)$  une exponentielle croissante du temps  $t$ .

<sup>16</sup> Cette lumière n'a voyagé que durant 13,8 milliards d'années mais, pendant ce temps, la distance des électrons qui l'ont diffusée pour la dernière fois a augmenté et le calcul montre que ces électrons (ou ce qu'ils sont devenus depuis) sont aujourd'hui à 46 milliards d'a-l. L'horizon cosmologique est juste un milliard d'a-l plus loin : si on voyait un objet aujourd'hui à 47 milliards d'a-l on le verrait tel qu'il était... lors du Big Bang. On suppose que l'univers réel est sans limite mais, à cause de son âge fini et de la vitesse finie de la lumière, l'univers observable est, lui, limité par un horizon sphérique, centré sur l'observateur, qui ne contient aujourd'hui qu'environ  $10^{22}$  étoiles. Dans plein de directions ( $10^{14}$  pour une) il n'y a pas d'étoile avant l'horizon et c'est l'explication ... de la nuit (ou du « paradoxe du ciel noir »).



## CONCLUSION

Les géométries non euclidiennes sont à la base de relativité générale et de son application à la cosmologie moderne. Elles permettent ainsi :

- de rendre fonctionnels des commodités comme le positionnement par satellite (GPS),
- de modéliser les phénomènes gravitationnels locaux (orbites, trous noirs)
- de calculer, à partir des observations, l'histoire de la géométrie de l'ensemble de l'Univers
- de donner (enfin) une explication à la nuit (note 16)
- ...