HAL open science

Cylindres Sousliniens et théorème de Blackwell

Denis Feyel, Arnaud de La Pradelle

▶ **To cite this version:**

Denis Feyel, Arnaud de La Pradelle. Cylindres Sousliniens et théorème de Blackwell. 1983. hal-01452270

HAL Id: hal-01452270

https://hal.science/hal-01452270v1

Preprint submitted on 1 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cylindres Sousliniens et théorème de Blackwell

par D. Feyel et A. de La Pradelle(*)

Introduction

On sait que le théorème de Blackwell permet de décider si une fonction réelle appartient à une sous-algèbre déparable donnée de fonctions boréliennes. Si on s'intéresse au cas complexe, on voit que la notion n'est pas bien adaptée à la question, et qu'il n'existe à l'heure actuelle aucune extension complexe non triviale du théorème de Blackwell.
On est donc amené à introduire une notion de clan de fonctions complexes qui remplace la notion d'algèbre, et les atomes deviennent les orbites du clan : cela permet alors de décider si une fonction appartient à un clan séparable si l'espace est souslinien en regardant son comportement sur les orbites.
Même dans le cas réel, un clan ne contient pas nécessairement les constantes, et l'on obtient là encore une extension stricte du théorème de Blackwell.
La notion d'orbite débouche naturellement sur la structure de cylindre souslinien ou non. Un cylindre séparable est toujours plongeable dans $\mathbb{C}$: c'est l'objet du II.
On en déduit plus généralement que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel séparable de fonctions boréliennes bornées sur un espace souslinien est représentable comme espaces de fonctions boréliennes sur une partie analytique de $\mathbb{C}$.
Dans un autre ordre de d'idées (étude des cônes convexes), une généralisation du théorème de Blackwell a été obtenue par C. Dellacherie ([2]). Ici on s'inspire plutôt d'une extension d'un théorème de Bishop pour fonctions continues réalisée dans ([4]), mais on obtient seulement un résultat d'adhérence faible, et le problème reste ouvert pour les adhérences séquentielles.

I-Clan de fonctions boréliennes

On désigne par $\mathcal{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un espace métrisable. On appelle clan de fonctions sur X tout sous-espace $\mathcal{C}$ de $\mathcal{K}^X$ constitué de fonctions boréliennes bornées, et stable par l'opération $(f, g) \to |g|f$.
On appellera *orbite* toute classe d'équivalence pour la relation

$$|f(x)| = |f(y)| \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}$$

Nous avons le résultat classique suivant

(*) Ce papier, non publié, a été écrit en 1983 avant le départ de D. Feyel pour la Chine.

1 Lemme : *pour que x_0 et y_0 soient dans la même orbite, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathcal{K}$, k de module 1 et tel que $f(x_0) = kf(y_0)$*

pour toute $f \in \mathcal{C}$.

Démonstration : Il n'y a rien à démontrer si toutes les fonctions de $\mathcal{C}$ s'annulent en x_0. Sinon, soit $f_0 \in \mathcal{C}$, telle que $f_0(x_0) = 1$. Posons $k = f_0(y_0)$, et pour $f \in \mathcal{C}$, posons $h(x) = f(x) - f(x_0)f_0(x)$. La fonction h appartient à $\mathcal{C}$ et vérifie $h(x_0) = 0$, donc aussi $h(y_0) = 0$, et par suite $f(y_0) = kf(x_0)$.

Cela justifie la définition suivante :

2 Définition : *Une fonction $f : x \to \mathcal{K}$ est dite $\mathcal{C}$-homogène, si pour toute orbite O on a $\eta_{|O} \in \mathcal{C}_{|O}$ (espace des restrictions des éléments de $\mathcal{C}$ à O). On notera $\mathcal{C}^\sharp$ l'espace des fonctions boréliennes bornées et $\mathcal{C}$-homogènes sur X.*

On constate facilement grâce au lemme, que $\mathcal{C}^\sharp$ est le plus petit clan ayant mêmes orbites que $\mathcal{C}$, lorsque pour tout x il existe une fonction de $\mathcal{C}$ qui ne s'annule pas.

3 Remarque : Si $\mathcal{C}$ contient une fonction $f > 0$ ou bien si $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre, les fonctions de $\mathcal{C}$ sont constantes sur les orbites.
L'hypothèse suivante est fondamentale

Axiome de séparabilité

On suppose que le clan $\mathcal{C}$ est séparable, c'est à dire :
- il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que :
- pour toute $x \in X$, il existe n tel que $f_n(x) \neq 0$,
- pour tout $(x, y) \in X \times X$, x et y sont dans la même orbite si et seulement si on a $|f_n(x)| = |f_n(y)|$ pour tout n.

4 Proposition : *si $\mathcal{C}$ est séparable, ses orbites sont boréliennes.*

Démonstration : c'est évident

Rappelons que l'adhérence séquentielle de $\mathcal{C}$ est la plus petite famille de fonction bornées qui contienne les limites des suites simplement convergentes d'éléments de $\mathcal{C}$.
On peut alors énoncer une première généralisation du théorème de Blackwell

5 Théorème : *On suppose que X est un espace souslinien, et que $\mathcal{C}$ est un clan séparable sur X. Alors $\mathcal{C}^\sharp$ est l'adhérence séquentielle de $\mathcal{C}$.*

Démonstration : soit φ_n la suite séparante de l'axiome, et soit pour tout n X_n l'ensemble où $\varphi_n \neq 0$. Si $f \in \mathcal{C}^\sharp$, considérons les fonctions $g_n = f/\varphi_n$ sur $X_n \cup_{i \leq n-1} X_i$ et 0 ailleurs. Ces fonctions sont constantes sur les orbites. Considérons l'algèbre réelle $\mathcal{A}$ constituée des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^n |f_i| - |f_i^{'}|$ où les les f_i et $f_i^{'}$ sont dans $\mathcal{C}$: cette algèbre est séquentiellement engendrée par

une sous-algèbre séparable en vertu du théorème de Blackell ([1] et [2]) et grâce à l'axiome de séparabilité. Les parties réelles $g_n^{'}$ et imaginaire $g_n^{"}$ ($= 0$ si $\mathcal{K} = \mathbb{R}$) sont constantes sur les orbites, donc appartiennent à l'adhérence séquentielles de $\mathcal{A}$ par le théorème de Blackwell. Alors chaque produit $g_n\varphi_n = g_n^{'}\varphi_n + ig^{"}\varphi_n$ appartient à l'adhérence séquentielle de $\mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est un clan. Or on a $f = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=i}^{n} g_k\varphi_k$.

6 Remarque : si $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ et si $\mathcal{B}$ est une algèbre contenant les constantes, $\mathcal{B}$ est un clan, et on retrouve le théorème de Blackwell.

II- **Cylindres, hélices et plongements.**

7 Définition : *Soit X un espace métrique séparable. On dit que X est un cylindre si l'on s'est donné une application borélienne*
$\Phi : \mathcal{T} \times X \to X$(où $\mathcal{T}$ est le cercle unité de $\mathcal{K}$) notée $\oplus(\sqcup, \S) = \sqcup\S$ et vérifiant :
a) $t^{'}(tx = (tt^{'}))$ pour tous $(t, t^{'}, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{X}$
b) pour tout $x \in X$, $tx = x$ si et seulement si $t = 1$.

Si X et Y sont des cylindres, une fonction $f : X \to Y$ est dite *homogène* si $f(tx) = tf(x)$ pour tous $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$.
On constate que $\mathcal{K}^* = K - \{0\}$ est naturellement un cylindre avec la multiplication usuelle, cependant une fonction homogène à valeurs dans $\mathcal{K}$ pourra prendre la valeur 0 de sorte que ces fonctions homogènes forment un clan. Ce clan définit des orbites, et le problème se pose de les comparer aux "orbites naturelles" du cylindre, c'est à dire aux ensembles de la forme $\mathcal{T}.x$ où $x \in X$.
Il est clair que $\mathcal{T}.x$ est toujours inclus dans l'orbite de x, et l'on a la réciproque.

8 Proposition : *Soit $x \in X$. Il existe une fonction f homogène non nulle en x. De plus l'orbite de x est exactement $\mathcal{T}.x$ et est un ensemble borélien.*

Démonstration : considérons $x_0 \neq y_0$ dans X, et l'application $\Phi^{'}$ définie par la restriction de Φ à $\mathcal{T} \times \{x_0, y_0\}$. Suppososns que $\Phi^{'}$ soit injective. Son image est un sous-espace lusinien donc borélien dans X. Alors $\Phi^{'}$ est un isomorphisme borélien sur son image. La fonction inverse permet de définir ψ borélienne sur X par

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Phi^{'}(\mathcal{T} \times \{x_0, y_0\}) \\ t & \text{si } x = \Phi^{'}(t, x_0) = tx_0 \\ 2t & \text{si } x = \Phi^{'}(t, y_0) = ty_0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie car on a toujours $y_0 \neq kx_0$ pour $k \in \mathcal{T}$, sans quoi $\Phi^{'}$ ne serait pas injective. La fonction ψ est homogène borélienne sur X : si x_0 et y_0 étaient dans la même orbite, on aurait $|\psi(y_0)| = |\psi(x_0)$ ce qui n'est pas.
On en déduit que pour x_0 et y_0 dans la même orbite, $\Phi^{'}$ n'est pas injective : il existe alors t et $t^{'} \in \mathcal{T}$ tels que $tx = t^{'}x^{'}$,
avec x et $x^{'} \in \{x_0, y_0\}$. Si$x = x^{'}$ on a $x = x^{'}$ et les couples (t, x) et $(t^{'}, x^{'})$ ne sont pas distincts : c'est donc que $x \neq x^{'}$, donc par exemple $x = x_0$, $x^{'} = y_0$, puis $y_0 = kx_0$ avec $k \in \mathcal{T}$, soit $y_0 \in \mathcal{T}.x_0$.

On vient donc de prouver que l'orbite de x_0 est exactement $\mathcal{T}.x_0$. En prenant maintenant $y_0 = -x_0$, on voit que $\Phi^{'}$ n'est pas injective, mais sa restriction $\Phi^{"}$ à $\mathcal{T} \times \{x_0\}$ l'est d'après la condition b), donc l'orbite $\mathcal{T}.x_0$ est borélienne comme plus haut. De même la fonction $\psi(x)$ valant t pour $x = tx_0$ avec $t \in \mathcal{T}$, et 0 sinon est homogène borélienne sur X et ne s'annule pas en x_0.

9 Proposition : *Le clan $\mathcal{H}(X)$ des fonctions homogènes boréliennes bornées sur X est séparable.*

Démonstration : soit f une fonction borélienne bornée à valeurs dans $\mathcal{K}$. Posons $\widetilde{f}(x) = \int zf(\overline{z}x)\,d\sigma(z)$ où σ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{T}$. Chaque $\widetilde{f}$ est borélienne et homogène par le théorème de Fubini. Si f est homogène, on a $\widetilde{f} = f$, donc $\widetilde{f}$ parcourt tout $\mathcal{H}(X)$. Soit $\mathcal{D}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre dénombrable engendrant les fonctions boréliennes. $\widetilde{\mathcal{D}}$ est dénombrable et engendre séquentiellement $\mathcal{H}(X)$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.
La proposition précédente nous dit qu'en tout x_0 existe une $f \in \mathcal{H}(X)$ telle que $f(x_0) \neq 0$, on en déduit une fonction de $\widetilde{\mathcal{D}}$ non nulle en x_0.

Nous venons de voir que les cylindres conduisent à certaines sortes de clans qui sont caractéristiques lorsque X est souslinien :

10 Théorème : *Soit X un espace souslinien muni d'un clan $\mathcal{C}$ séquentiellement fermé. On fait les hypothèses suivantes*
a) pour tout $(t, x) \in T \times X$, il existe $x^{'}$ tel que $f(x^{'}) = tf(x)$
b) pour tout $x \neq x^{'}$, il existe $f \in \mathcal{C}$telle que $f(x) \neq f(x^{'})$
Alors l'application $\Phi : (t, x) \to tx(= x^{'})$ est bien définie et donne à X une structure de cylindre pour laquelle $\mathcal{H}(X) = \mathcal{C}$.

Démonstration : Φ est définie sans ambigüité car $\mathcal{C}$ est séparable. Soit B borélien dans X, son image réciproque par Φ est définie par
$(t, x) \in \Phi^{-1}(B)$ est équivalent à "il existe $y \in B$, tel que $f(y) = tf(x)$ pour tout f parcourant un ensemble dénombrable de $\mathcal{C}$".
Donc $\Phi^{-1}(B)$ est la projection d'un borélien de $\mathcal{T} \times X \times X$: il est donc analytique dans $\mathcal{T} \times X$. Mais son complémentaire l'est aussi pour la même raison, donc $\Phi^{-1}(B)$ est borélien, puis Φ est borélienne. On constate que Φ vérifie la définition des cylindres. Les fonctions de $\mathcal{H}(X)$ sont clairement $\mathcal{C}$-homogènes, donc on a $\mathcal{H}(X) = \mathcal{C}$ par le théorème 5.

Occupons-nous maintenant des hélices d'un cylindre.

11 Définition : *On appelle hélice du cylindre X tout ensemble $H = \{x \in X/f(x) = 1\}$ où $f \in \mathcal{H}(X)$, et f est à valeurs dans $\mathcal{T}$.*

12 Théorème : *Il existe une hélice.*

Démonstration : soit (g_n) une numérotion de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}$ intervenant dans la démonstration de la proposition 9. Soit $E_n = \{x \in X/g_n(x) \neq 0\}$. Chaque E_n est borélien et réunion d'orbites, et l'on a $X = \cup_n E_n$ d'après les propriétés de $\widetilde{\mathcal{D}}$. Posons $g(x) = g_n(x)$ pour $x \in E_n - \cup_{i<n} E_i$. Alors g est borélienne homogène et ne s'annule pas. Il suffit de prendre $f = g/|g|$.

13 Corollaire : *Il existe un isomorhisme borélien homogène de X dans $\mathcal{K}^*$.*

Démonstration : soit φ un isomorphisme borélien d'une hélice H dans $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$. Posons $\psi(x) = f(x)\varphi(x/f(x))$. On voit que c'est une injection borélienne de X dans $\mathcal{K}^*$. L'isomorphisme réciproque est défini par $\Psi^{-1}(z) = z/|z|\varphi^{-1}(|z|)$ et est donc borélien. Les fonctions ψ et ψ^{-1} sont clairement homogènes.

Le problème se pose de savoir si un ensemble borélien coupant chaque orbite en un point et un seul est une hélice. Nous avons :

14 Proposition : *Si X est souslinien, un ensemble H est une hélice si et seulement si c'est un analytique rencontrant chaque orbite en un seul point.*

Démonstration : d'après le corollaire, on peut supposer que X est une partie analytique de $\mathcal{K}^*$ et une réunion de cercles. Alors H est analytique dans $\mathcal{K}^*$, et l'application $z \to |z|$ est un isomorphisme de H sur $X \cap \mathbb{R}^+$ grâce au théorème de Souslin-Lusin. Notons g cette application. En posant $f(x) = x/g^{-1}(|x|)$, on obtient la fonction borélienne homogène définissant l'hélice.

Le résultat suivant complète la généralisation complexe du théorème de Blackwell :

15 Théorème : *Soit un cylindre (séparable). On suppose que pour toute fonction homogène $f \in \mathcal{H}(X)$, l'image $f(X)$ est analytique dans $\mathcal{K}$. Alors X est souslinien.*

Démonstration : c'est une conséquence immédiate du corollaire 13.

Les deux résultats suivants montrent comment les cylindres et les clans apparaissent naturellement dans des $\mathcal{K}$-espace vectoriels de fonctions boréliennes bornées.

16 Théorème : *Soit X un espace souslinien muni d'un clan $\mathcal{C}$ adhérence séquentielle d'un sous-ensemble dénombrable. Il existe un couple unique à un isomorphisme près constitué d'un cylindre souslinien $\widetilde{X}$ et d'une application borélienne π de X dans $\widetilde{X}$ tel que l'application $f \to f \circ \pi$ soit un isomorphisme du clan $\mathcal{H}(\widetilde{X})$ sur le clan $\mathcal{C}$ (les structures de clan étant conservées).*

Démonstration : soit $\mathcal{C}'$ le dual algébrique de $\mathcal{C}$. Posons $\Phi(t, x) = t\varepsilon_x$ où ε_x est l'évaluation en x. Φ est une application de $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{C}'$: on notera $\widetilde{X}$ son image qui est un sous-cylindre de $\mathcal{C}' - \{0\}$. Pour $f \in \mathcal{C}$, on pose $\widetilde{f}(t\varepsilon_x) = tf(x)$: cela définit $\widetilde{f}$ sans ambigüité, et l'on vérifie facilement que $\widetilde{f}$ est homogène sur $\widetilde{X}$. Posons enfin $\pi(x) = \varepsilon_x$: on a visiblement $f = \widetilde{f} \circ \pi$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

Considérons sur $\widetilde{X}$ le deux tribus suivantes : $\mathcal{T}$ est la tribu image de la tribu borélienne de $\mathcal{T} \times X$ par l'application Φ, et $\mathcal{T}'$ est la tribu la moins fine rendant mesurables les fonctions $\widetilde{f}$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

Il est clair que $\mathcal{T}'$ est séparable . D'autre part, si $f \in \mathcal{C}$, $\widetilde{f}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est la tribu image de Φ. On en déduit que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$ et par suite Φ est mesurable lorsque $\widetilde{X}$ est muni de la tribu $\mathcal{T}'$. Il s'ensuit que $\mathcal{T}'$ est une tribu souslinienne ([3], p.72). Le théorème de Blackwell nous dit que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ car elle ont les mêmes atomes, à savoir les points de $\widetilde{X}$.

Le théorème 10 nous dit alors que l'ensemble des fonctions $\widetilde{f}$ est identique à $\mathcal{H}(X)$. L'application π est mesurable comme application partielle de Φ.
Soit enfin $(\pi^{'}, \widetilde{X'})$ un autre couple ayant les mêmes proprités : soit$\widetilde{X^{"}}$ la diagonale de $\widetilde{X} \times \widetilde{X'}$ muni d'une structure de cylindre évidente et de l'application $\pi^{"}(x) = (\pi(x), \pi^{'}(x))$; le couple $(\pi^{"}, \widetilde{X^{"}})$ est une troisième solution du problème universel, isomorphe aux deux précédentes par les deux projections.

17 Remarque : Si on permet aux fonctions de $\mathcal{C}$ de s'annuler, on est amené à laisser l'origine à $\widetilde{X}$ qui devient donc un cône au lieu d'un cylindre, et les résultats précédents s'appliquenet évidemment au complémentaire de l'origine dont l'image réciproque par π est borélienne dans X.

18 Théorème : *Soit X un espace souslinien. On considère un $\mathcal{K}$-espace vectoriel E de fonctions boréliennes bornées sur X. On suppose que E est l'adhérence séquentielle d'un sous-ensemble dénombrable, et que pour tout $x \in X$, il existe $f \in E$ ne s'annulant pas en x. Alors E est isomorphe par une application $f \to f \circ \pi$ à un sous-espace vectoriel E de fonctions homogènes sur un cylindre souslinien $\widetilde{X}$.*

Démonstration : notons $\mathcal{C}$ le clan engendré par E et séquentiellement fermé. On constate que $\mathcal{C}$ est séparable et vérifie les conditions du théorème précédent, et le résultat s'ensuit.

19 Remarque : La même remarque que celle qui suit le théorème 16 est valable.

III. Approximations faibles

Soit X un espace souslinien. On note $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions réelles boréliennes bornées sur X, et $\mathcal{M}$ l'espace des mesures boréliennes bornées réelles sur X. La topologie faible sur $\mathcal{B}$ est la topologie $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{M})$.
On considère un cône convexe C inclus dans $\mathcal{B}$ et on suppose que $\mathcal{C}$ est faiblement séparable.
Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu séparable de la tribu borélienne.On suppose que $\mathcal{T}$ est une tribu de multiplicateurs pour $\mathcal{C}$, c'est à dire : pour toute $f \in \mathcal{C}$, et tout $A \in \mathcal{T}$, on a $1_A f \in \mathcal{C}$.

20 Théorème : *Soit f borélienne bornée sur X. On suppose que pour tout atome A de $\mathcal{T}$ la restrication $f_{|A}$ de f à A appartient au cône $C_{|A}$ des restrictions d'éléments de C à A. Alors f est faiblement adhérente à C.*

Démonstration : soit $\mu \in \mathcal{M}$, telle que $\mu(u) \geq 0$ pour toute $u \in C$. On doit montrer que $\mu(f) \geq 0$. Soit Y l'espace des atomes de $\mathcal{T}$ i.e. le quotient de X par la relation "x et y sont dans le même atome". On sait ([3] que Y est souslinien, et que l'application canonique π est borélienne. Notons $\rho = \pi(|\nu|)$, et soit $\mu = \int \theta_y \, d\rho(y)$ une désintégration borélienne de μ, où chaque mesure θ_y est concentrée sur $\pi^{-1}(y)$. Si φ est un multiplicateur de C, et si $g \in C$, on a

$$0 \leq \mu(\varphi g) = \int \widetilde{\varphi}(y)\theta_y(f) \, d\rho(y) \text{ où } \widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$$

On en déduit $\theta_y(g) \geq 0$ pour ρ-presque tout $y \in Y$, car $\mathcal{T}$ est séparable. C étant lui-même faiblement séparable, on trouve par suite un ensemble N ρ-négligeable vérifiant :$\theta_y(u) \geq 0$ pour tout $y \notin N$ et $u \in C$.
Si $u \notin N$ et si $A = \pi^{-1}(y)$, on a par hypothèse $1_A \in C$, donc $\theta_y(f) = \theta_y(1_A f) \geq 0$ et finalement $\mu(f) = \int \theta_y(f)\, d\rho(y) \geq 0$.

Nous allons étendre ce résultat au cas d'un cône de fonctions à valeurs vectorielles, il nous faudra d'abord introduire une notion de forme linéaire privilégiée qui a d'ailleurs son propre intérêt.
Soit B un espace de banach séparable. On note $\mathcal{B}(X, B)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées à valeurs dans B.

21 Définition : *Soit L une forme linéaire sur $\mathcal{B}(X, B)$. On dit que L est privilégiée si elle vérifie le théorème de convergence dominée de Lebesgue, c'est à dire si pour toute suite $f_n \in \mathcal{B}(X, B)$ uniformément bornée et convergeant simplement vers une fonction f, alors $L(f) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} L(f_n)$*

On notera $\mathcal{M}_B$ l'ensemble de ces formes privilégiées, et l'on considère la topologie $\sigma(\mathcal{B}(X, B), \mathcal{M}_B)$ que l'on appellera topologie faible sur $\mathcal{B}(X, B)$.

22 Proposition : *Soit $L \in \mathcal{M}_B$, et soit $B_1^{'}$ la boule unité du dual de B. Il existe une mesure borélienne bornée μ sur $X \times B^{'}$ telle que :*

$$L(f) = \int y^{'}(f(x))\, d\mu(x, y^{'}) \text{ pour toute } f \in \mathcal{B}(X, B)$$

Démonstration :
i) supposons d'abord X métrique compact : la restristion de L à $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$ est continue pour la norme uniforme, donc appartient au dual topologique de $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$. Or l'application $f \to \widetilde{f}$ où $\widetilde{f}(x, y) = y^{'}(f(x))$ est une isométrie de $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$ dans $\mathcal{C}(X \times B_1^{'})$; le théorème de Hahn-Banach nous fournit alors une mesure μ sur $X \times B_1^{'}$ vérifiant

$$L(f) = \int f(x, y^{'})\, d\mu'(x, y^{'}) \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$$

Comme L est une forme linéaire privilégiée et que B est séparable, cette formule s'étend par récurrence borélienne à l'aide du théorème de Lebesgue à toute fonctions appartenant à $\mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$.
ii) supposons que X soit seulement souslinien, et soit $\overline{X}$ une compactification métrisable de X. Posons $\lambda(f) = L(f_{|X})$ pour $f \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{B})$. Soit ν une mesure obtenue sur $\overline{X} \times B_1^{'}$ par le i) et vérifiant :

$$\lambda(f) = \int y^{'}[f(x)]\, d\nu(x, y^{'}) \text{ pour toute } f \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{B})$$

Soit ρ la projection de $\pi(\mu)$ sur $\overline{X}$: ν admet une désintégration borélienne $\nu = \int \theta_x \, d\rho(x))$ où pour tout $x \in \overline{X}$, θ_x est une mesure sur $B_1^{'}$ de norme $= 1$, portée par $\{x\} \times B_1^{'}$. Soit $y_x^{'}$ la résultante de θ_x. On a $\|y_x^{'}\| \leq 1$. On en déduit

$$L(f_{|X}) = \int < y_x^{'}, f(x) > d\rho(x) \text{ pour toute } f \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{B})$$

En particulier, si $f(x) = \varphi(x)b$ où φ est réelle borélienne sur $\overline{X}$, et $b \in B$. Si φ est nulle sur X, on a $L(\varphi b_{|X}) = 0$ donc $< y_x^{'}, b >= 0$ ρ-presque partout sur $\overline{X} - X$. Comme B est séparable, on a en fait $y_x^{'} = 0$ ρ-presque partout sur $\overline{X} - X$.considérons maintenant la restriction μ de ν à $X \times B_1^{'}$. Si $f(x, y)$ est affine en y, on a $\mu(f) = \nu(f)$ car θ_x est de résultante nulle pour ρ-presque tout $x \in \overline{X} - X$. Alors la mesure μ répond à la question, car d'après un théorème de Doob, toute $f \in \mathcal{B}(X, B)$ admet un prolongement $\in \mathcal{B}(\overline{X}, B)$.

23 Théorème : *Soit C un cône convexe inclus dans $\mathcal{B}(X, \mathcal{B})$ et faiblement séparable. Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu séparable de multiplicateurs pour C. Soit $f \in \mathcal{B}(X, B)$. Pour que f soit faiblement adhérente à C, il suffit que pour tout atome A de $\mathcal{T}$, la restriction $f_{|A}$ appartienne au cône des restrictions $C_{|A}$.*

Démonstration : comme dans la démonstration de la proposition 21, considérons l'isométrie $f \to \widetilde{f}(x, y) = y^{'}(f(x))$. Soit $\widetilde{C}$ l'image de C. On va appliquer le théorème 19 à $\widetilde{C}$ et à la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_0$ de $\mathcal{B}(X, B_1^{'})$, où $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, B_1^{'}\}$. Si f vérifie les conditions du théorème, $\widetilde{f}_{|A \times B_1^{'}}$ appartient à $\widetilde{C}_{|A \times B_1^{'}}$ dès que A est un atome de $\mathcal{T}$. Alors $\widetilde{f}$ adhère faiblement à $\widetilde{C}$, et l'on en déduit aussitôt que f est faiblement adhérente à C.

Bibliographie

[1] **Blackwell (D.)** . On a class of probability spaces. *Proc. 3rd Berkeley symposium, 2, p. 1-6 university of Calif. Press, Berkeley*, 1956

[2] **Dellacherie (C.)**. Transformations analytiques ; théorèmes de capacibilité, séparation et itération transfinie. *Séminaire d'initiation à l'Analyse* G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint Raymond *20ème année, 1980/1981, N^o* 16

[3] **Dellacherie (C.) et Meyer (P.A.)**. Probabilités et Potentiel. *Chapitres I à IV. Publication de l'uni. de Strabourg, Hermann* 1975.

[4] **Feyel (D.) et de La Pradelle (A.)**. Sur certaines extensions du théorème d'approximation de Bernstein. *Pac. journal of math. vol.115 No.1, p. 81-89* 1984