



HAL
open science

Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat

François Ollivier, Brahim Sadik

► **To cite this version:**

François Ollivier, Brahim Sadik. Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat. 2017. hal-01451741v2

HAL Id: hal-01451741

<https://hal.science/hal-01451741v2>

Preprint submitted on 26 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat

A subsystem of a flat system of differential dimension 2 is flat.

François OLLIVIER

LIX, UMR CNRS 7161
École polytechnique
91128 Palaiseau CEDEX
France

francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Brahim SADIK

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
B.P. 2390 Marrakech
Maroc

sadik@ucam.ac.ma

Mai 2017

Abstract. A subsystem of a flat system of differential dimension at most 2 is flat. Furthermore, if such a flat system is stationary, we show that there exist flat outputs not depending on the time.

Résumé. Un sous-système de dimension différentielle au plus 2 d'une extension plate est plate. Si un tel système plat est stationnaire, il admet des sorties plates indépendantes du temps.

Abridged English version

The result that will be proved corresponds in control theory to the fact that a system with 2 controls which is linearizable by exogenous feedback is linearizable by endogenous feedback or also that any *subsystem* of a *flat system* is flat. We refer to [3, 5, 13, 9] for more details on flat systems, a notion that goes back to Monge's problem [7, 6, 1, 17], and to [14, 15, 4] for the formalism of diffiety theory. We will use Rouchon's lemma [12, 8], following the notations and definitions of [10]. A *diffiety extension*, or *system*, V/U will be a diffiety with a projection $V \mapsto U$ that is a diffiety morphism and a *subsystem* W/U of V/U is such that $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$. For brevity, we denote $\partial/\partial x$ by ∂_x .

A *system of differential dimension m* V/U_{δ_0} is an open subset of $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N)^m \times U$ with a derivation $\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x, z, u) \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial_{z_j^{(k)}}$.

The *trivial system of differential dimension m* , T^m/U_{δ_0} , is $(\mathbf{R}^N)^m \times U$ equipped with the derivation $\delta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial_{z_j^{(k)}}$. We may then define flat systems.

DEFINITION 1. — A system V/U_* is parametrizable if there exist a diffiety extension U/U_* and $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$ a morphism of extensions of U , where W is an open subset of T^m/U , such that $\text{Im}\phi$ is dense in $V \times_{U_*} U$.

A system V/U is flat if there exists a dense open set $W \subset V$ such that any $x \in W$ admits a neighbourhood \mathcal{O} isomorphic by $\phi : \mathcal{O} \mapsto \tilde{\mathcal{O}}$ to an open subset $\tilde{\mathcal{O}}$ of $T^m \times U$; the functions $\phi^*(z_j)$ that generate $\mathcal{O}(\mathcal{O})$ are called flat outputs.

By convention, $\text{ord}_z A = -\infty$ if A is free from z and its derivatives. In the case of a parametrizable diffiety, we identify a function $x \in \mathcal{O}(V)$ with the function $x(z) = \phi^*(x) \in \mathcal{O}(W)$.

Our theorem may be stated as follows. The case $m = 1$ is classical [2]. The proof will make a repeated use of Rouchon's lemma [12, 8], given below.

THEOREM 2. — A parametrizable extension of differential dimension at most 2 is flat.

THEOREM 3. — Let V/U_* be a parametrizable diffiety extension, $x_i \in \mathcal{O}(V)$, $i = 1 \dots n$ a family of nonconstant functions on V , $H(x) = 0$ a differential equation satisfied by the x_i and $e_i := \text{ord}_{x_i} H$.

Using the notations of def. 1, let z_j be coordinates on T^μ and assume the $\max_{i=1}^n \text{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. If $e_i = 0 \Rightarrow \text{ord}_{z_1} x_{i_0} < r$, then using the notation $D := \sum_{e_i > 0} C_i \partial_{x_i^{(e_i)}}$ where the C_i are new variables with $DC_1 = 0$, the n -tuple

$(\partial_{z_1}^{(r)} x_i^{(e_i)})$ is a solution of the equations $\phi^*(D^k P) = 0$.

PROOF. — It suffices to remark that, $\partial_{z_1}^{(r+1)} x_i^{(e_i)} = \partial_{z_1}^{(r)} x_i$ for $e_i > 0$, so that $\partial_{z_1}^{(r+1)} x_i = 0$. Substituting $\partial_{z_1}^{(r+1)} x_i$ to C_i in $D^k P$, one gets $\partial_{z_1}^{(r+1)} P = 0$. ■

From now on, we only consider differential dimension 2. We may complete some local coordinates on V , considered as functions of the z_j using the morphism ϕ , to get local coordinates on W , say by choosing $z_i, \dots, z_i^{(s_i)}$, $i = 1, 2$, ($s_1 \leq r$), and the $z_j^{(k)}$, $j > 2$, $k \in \mathbf{N}$. We may then express the derivations $\partial/\partial z_1^{(k)}$ in the V coordinates. In this setting, for state equations defining V , Rouchon's lemma means that $\partial_{z_1}^{(r+1)}$ and $\partial_{z_1}^{(r)} = [\delta, \partial_{z_1}^{(r+1)}]$ do commute. The next lemma goes one step further by considering $\partial_{z_1}^{(r-1)} = [\delta, \partial_{z_1}^{(r)}]$ (cf. [16]).

Lemma 4. — Under the hypotheses of th. 3, assume that the system V/U is locally defined by explicit equations of order 1. $P_i := x'_i - h_i(x, x'_1, x'_2, u) = 0$, $2 < i \leq n$.

a) If V/U is parametrizable, the homogeneous ideal $(D^k P_i | 1 \leq i \leq n-2, k \in \mathbf{N})$ is of projective dimension 0, iff at least one of the equations P_i is non linear in the derivatives x'_i .

b) In this case, the state equations can be rewritten $x'_i = f_i(x, v_2, u)v_1 + g_i(x, v_2, u)$, where the v_i are functions of the x_i and the x'_j , $j = 1, 2$, such that $\partial_{z_1}^{(r+1)} v_2 = 0$, $f_1 = 1$ (i.e. $v_1 = x'_1$) and $f_2 = v_2$ if f_2 depends on v_2 .

c) We have moreover $\partial_{z_1}^{(r)} f_i(x, v_2, u) = 0$.

PROOF. — a) — By th. 3, the dimension is at least 1. Now, if P_i is non linear in x'_i , $i = 1, 2$, then a non trivial relation $D^2 P_i = 0$, so that the dimension is at most 1. b) — Up to a permutation of indices, we may assume that $C_1 \neq 0$. Now, $C_2 = F(x, x'_1, x'_2)C_1$ with $\partial_{z_1}^{(r)} F = 0$. We take $v_1 = x'_1$.

If F depends on x'_2 , we choose $v_2 = F$, $f_2(v_2) = v_2$ and $g_2 = x'_2 - v_2$ or else $f_2(x) = F(x)$, $v_2 = x'_2 - f_2(x)v_1$ and $g_2(v_2) = v_2$. c) — We have $\partial_{z_1^{(r+1)}} = A\partial_{v_1} + 2A'\partial_{v'_1} + \cdots + B\partial_{v'_2} + \cdots$. So $\partial_{z_1^{(r)}} = \sum_{i=1}^n Af_i\partial_{x_i} + A'\partial_{v_1} \cdots + B\partial_{v_2} + \cdots$. Going one step further, we get, as terms in A' cancel: $\partial_{z_1^{(r-1)}} = \sum_{i=1}^n (Af'_i + \text{terms of order at most } r \text{ in } z_1) \partial_{x_i} + \cdots$. As $[\partial_{z_1^{(r+1)}}, \partial_{z_1^{(r-1)}}] = 0$, we need have $\partial_{z_1^{(r+1)}}f'_i = \partial_{z_1^{(r)}}f_i = 0$. ■

SKETCH OF THE PROOF OF TH. 2. — Denote by z, v, u, u_* coordinate functions on T^μ, V, U, U_* . If the result is false, there exists an open subset $O = \phi(\tilde{O}) \subset V$ such that no open subset $O_r = \phi(\tilde{O}_r) \subset O$ is isomorphic to an open subset of T^m . We will look for a contradiction.

In the case $m = 1$, we choose $x_i, 1 \leq i \leq n$ such that the x_i and their derivatives are local coordinates of $O_r \subset O$. We assume moreover that these function satisfy equations of order 1 $x'_i = h_i(x, x'_1, u_*)$, $1 < i \leq n$ and that n is minimal. If $n = 1$, O_r is flat.

If not, th. 3 implies that the h_i are linear in x'_1 : $h_i = f_i x'_1 + g_i$. Then, we may replace the x_i by $n - 1$ independent solutions $y(x, u_*)$ of the differential system $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=2}^n f_i \partial_{x_i} Y = 0$. The derivatives y'_i do not depend on x'_1 , and the y_i satisfy a new system of order 1 contradicting the minimality of n .

In the case $m = 2$, we also consider $x_i(z, u, u_*)$, $1 \leq i \leq n$, that satisfy a system of order 1 $x'_i = h_i(x, x'_1, x'_2, u_*)$, $2 < i \leq n$ and $\max_{i=1}^n \text{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. We assume that the couple (r, n) is minimal for lexicographic ordering.

If $n = 2$, O_r is flat. If the h_i do not depend on x'_1 or x'_2 , we are reduced to the case $m = 1$, already considered. We distinguish two cases.

i) If the h_i are all linear in x'_1 and x'_2 : $h_i = \sum_{j=1}^2 f_{i,j} x'_j + g_i$, $1 \leq i \leq n$, we replace the x_i by $n - 1$ independent solutions $y(x, u_*)$, of the differential equation $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=3}^n f_{i,1} \partial_{x_i} Y = 0$. The order $\max_{i=1}^{n-1} \text{ord}_{z_1} y_i$ is at most r . The y'_i do not depend on x'_1 , so that they satisfy a system of order 1. If the y'_i depend on x_1 , they satisfy our hypotheses, which contradicts the minimality of n . If not, we are reduced to the case $m = 1$ and we just have to complete the flat output for the diffiety defined by the y_i with x_1 to conclude.

ii) If the h_i are not linear in x'_1 and x'_2 , by *lem. 4* the state equations can be rewritten $x'_i = f_i(x, v_2, u_*) * v_1 + g_i(x, v_2, u_*)$, with $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$ and

$\partial_{z_1} f_i(x, v_2, u) = 0$. We can replace the x_i by $n - 1$ independent solutions $y_i(x, v_2, u_*)$ of the differential equation $\sum_{i=1}^n f_i \partial_{x_i} Y = 0$, completed with v_2 if the f_i depend on v_2 . The y'_i must depend on x_1 ; if not the f_i must be constants, the y'_i satisfy linear equations so that the h_i should have been linear in the x'_j , $j = 1, 2$.

So, the y_i (and v_2 if $f_2 = v_2$) must satisfy a system of order 1 and, according to *lem. 4* are of order less than r in z_1 . A final contradiction that concludes the proof.

E.g., the diffieties U and U_* may be respectively \mathbf{R} , standing for the time variable t with a derivation $\partial/\partial t$ and a single point with derivation 0, if V is associated to a stationary model. Then, the theorem asserts that V is flat with flat outputs not depending on the time, answering a problem raised by Pereira Da Silva and Rouchon [11].

Introduction

Si la notion mathématique remonte aux travaux de Monge [7] et a été étudiée au début du xx^e siècle par Hilbert [6], Cartan [1] ou Zervos [17], les systèmes plats ont été inventés sous ce nom pour les besoins de l'automatique [3, 5, 9]. Dans ce cadre, le résultat qui va être prouvé en dimension différentielle au plus 2, signifie qu'un système linéarisable par bouclage exogène est linéarisable par bouclage endogène. Sommairement, *tout sous-système d'un système pla est plat*, c'est-à-dire que si les solutions d'un système d'EDO sont paramétrables par m fonctions arbitraires, il existe un tel paramétrage localement bijectif. Le cas $m = 1$ est une conséquence des résultat de Charlet *et al.* [2] ou dans le cas d'un paramétrage rationnel du théorème de Lüroth–Ritt, mais qui n'a pas d'analogie en dimension différentielle 2 [8].

La définition de la platitude peut varier selon que l'on impose ou non à un système stationnaire de posséder un paramétrage indépendant du temps (*cf.* Pereira da Silva et Rouchon [11]). On montrera que, en dimension différentielle au plus 2, ces deux définitions coïncident, c'est-à-dire que *si un système stationnaire possède des sorties plates dépendant du temps, il en existe d'autres indépendantes*.

1 Diffiétés plates

Pour la notion de diffiété [14, 15], nous adoptons les conventions de [10]. Soit I un ensemble dénombrable, on appellera *diffiété* un ouvert V de \mathbf{R}^I pour la topologie la plus grossière rendant pour tout $i_0 \in I$ les projections $\pi_{i_0} : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_{i_0}$ continues, muni d'une dérivation $\delta = \sum_{i \in I} c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, où les c_i appartiennent à $\mathcal{O}(V)$, l'anneau des applications \mathcal{C}^∞ de V dans \mathbf{R} ne dépendant que d'un nombre *fini* de coordonnées. Par concision, $\partial/\partial x$ sera noté ∂_x .

Un *morphisme de diffiétés* est une application $\phi : V_{\delta_1} \mapsto V_{\delta_2}$, définie par des fonctions $\mathcal{O}(V)$ et telle que $\delta_1 \circ \phi^* = \phi^* \circ \delta_2$, où $\phi^* : \mathcal{O}(V_2) \mapsto \mathcal{O}(V_1)$ est l'application duale de ϕ .

Une *extension de diffiétés*, ou un *système*, noté V/U , est un couple de diffiétés muni d'une projection $\pi : V \mapsto U$ surjective qui est un morphisme de diffiétés. Il s'agit donc d'un fibré sur U , avec une projection compatible avec la structure de diffiété. Un morphisme d'extensions $\phi : V_1/U \mapsto V_2/U$ est un morphisme de V_1 dans V_2 tel que $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$. Un *sous-système* W/U de V/U est une extension de U telle que $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$. Soient V/U et W/U deux extensions de diffiétés, leur produit fibré est muni d'une structure naturelle d'extension de U (ainsi que de V ou de W), notée $V \times_U W$.

Un *système de dimension différentielle* m V/U_{δ_0} est un ouvert de $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N)^m \times U$ muni d'une dérivation de la forme $\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x, z) \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial_{z_j^{(k)}}$. L'*extension triviale* de dimension différentielle m , que l'on note T^m/U_{δ_0} , est $(\mathbf{R}^N)^m \times U$ muni de la dérivation

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_i^{(k+1)} \partial_{z_i^{(k)}}.$$

DÉFINITION 5. — Un système V/U_* est *paramétrable* s'il existe un système U/U_* et $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$ un morphisme d'extension de U , où W est un ouvert de T^m/U , tel que $\text{Im} \phi$ est dense dans $V \times_{U_*} U$.

Un système V/U sera dit *plat* s'il existe un ouvert dense W de V tel que tout x appartenant à W admette un voisinage \mathcal{O} isomorphe par $\phi : \mathcal{O} \mapsto \tilde{\mathcal{O}}$ à un ouvert $\tilde{\mathcal{O}}$ de l'extension triviale $T^m \times U$. Les fonctions $\phi^*(z_i)$, où les z_i définissent l'extension triviale, sont appelées *sorties plates*.

THÉOREME 6. — (Endogène=exogène) *Une extension paramétrable de dimension différentielle au plus 2 est plate.*

Les diffiétés U_* et U (déf. 5) peuvent, par exemple, faire intervenir une variable « temps » t avec $t' = 0$: si celui-ci n'apparaît pas dans U_* , il est absent des sorties plates de V/U_* .

2 Lemme de Rouchon et itération

Par convention, $\text{ord}_z A = -\infty$ si A est indépendant de z et de ses dérivées. Pour une diffiété paramétrable, on identifiera la fonction $x \in \mathcal{O}(V)$ avec la fonction $x(z) = \phi^*(x) \in \mathcal{O}(W)$.

THEOREM 7. — *Soit V/U_* un système paramétrable, $x_i \in \mathcal{O}(V)$, $i = 1 \dots n$ une famille de fonctions non constantes sur V , $H(x) = 0$ une équation différentielle satisfaite par les x_i et $e_i := \text{ord}_{x_i} H$.*

Avec les notations de la déf. 5, soient z_j des coordonnées sur T^μ telles que $\max_{i=1}^n \text{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. Si $e_i = 0 \Rightarrow \text{ord}_{z_1} x_i < r$, alors notant $D := \sum_{e_i > 0} C_i \partial_{x_i}^{(e_i)}$ où les C_i sont de nouvelles variables avec $DC_1 = 0$, le n -uplet $(\partial_{z_1}^{(r)} x_i^{(e_i)})$ est solution des équations $\phi^(D^k P) = 0$.*

PREUVE. — Il suffit de remarquer que $\partial_{z_1}^{(r+1)} x_i^{(e_i)} = \partial_{z_1}^{(r)} x_i$ pour $e_i > 0$, de sorte que $\partial_{z_1}^{2(r+1)} x_i = 0$. Substituant $\partial_{z_1}^{(r+1)} x_i$ to C_i dans $D^k P$, on obtient $\partial_{z_1}^{k(r+1)} P = 0$. ■

Nous nous limitons maintenant à la dimension différentielle 2. On peut compléter des coordonnées x_i sur V , considérées comme des fonctions des z_j grâce au morphisme ϕ , pour obtenir des coordonnées locales sur W , e.g. en choisissant $z_i, \dots, z_i^{(s_i)}$, $i = 1, 2$, ($s_1 \leq r$), et les $z_j^{(k)}$, $j > 2$, $k \in \mathbb{N}$. On peut alors exprimer les dérivations $\partial_{z_1}^{(k)}$ dans les coordonnées de V . De la sorte, pour des équations d'état définissant V , le lemme 7 signifie que $\partial_{z_1}^{(r+1)}$ et $\partial_{z_1}^{(r)} = [\delta, \partial_{z_1}^{(r+1)}]$ commutent. Le lemme suivant va un cran plus loin en considérant $\partial_{z_1}^{(r-1)} = [\delta, \partial_{z_1}^{(r)}]$ (cf. [16]).

Lemma 8. — Sous les hypothèses du th. 7, supposons que le système V/U est localement défini par des équations explicites d'ordre 1 :

$$P_i := x'_i - h_i(x, x'_1, x'_2, u) = 0, \quad 2 < i \leq n. \quad (1)$$

a) Si V/U est paramétrable, l'idéal homogène $(D^k P_i | 1 \leq i \leq n - 2, k \in \mathbf{N})$ est de dimension projective 0 ssi l'une des équations P_i est non linéaire en les dérivées x'_i .

b) Alors, les équations (1) se réécrivent $x'_i = f_i(x, v_2, u)v_1 + g_i(x, v_2, u)$ (2), où les v_j sont des fonctions des x_i et des x'_j , $j = 1, 2$, telles que $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$,

$f_1 = 1$ (i.e. $v_1 = x'_1$) et $f_2 = v_2$ si f_2 dépend de v_2 .

c) On a en outre $\partial_{z_1^{(r)}} f_i(x, v_2, u) = 0$.

PREUVE. — a) — Par le th. 7, la dimension est au moins 0. Si P_i est non linéaire en les x'_i , $i = 1, 2$, alors il existe une équation non triviale $D^2 P_i = 0$, et la dimension est au plus 0. b) — À permutation près, on peut supposer $C_1 \neq 0$. Alors, $C_2 = F(x, x'_1, x'_2)C_1$ avec $\partial_{z_1^{(r)}} F = 0$. Nous prenons $v_1 = x'_1$. Si F dépend de x'_2 , on pose $v_2 = F$, $f_2(v_2) = v_2$ et $g_2 = x'_2 - v_2$ ou sinon $f_2(x) = F(x)$, $v_2 = x'_2 - f_2(x)v_1$ et $g_2(v_2) = v_2$. c) — Nous avons $\partial_{z_1^{(r+1)}} = A\partial_{v_1} + 2A'\partial_{v'_1} + \dots + B\partial_{v'_2} + \dots$. Donc $\partial_{z_1^{(r)}} = \sum_{i=1}^n A f_i \partial_{x_i} + A'\partial_{v_1} \dots + B\partial_{v_2} + \dots$. Au cran suivant, comme les termes en A' s'annulent, on a : $\partial_{z_1^{(r-1)}} = \sum_{i=1}^n (A f'_i + \text{des termes d'ordre au plus } r \text{ en } z_1) \partial_{x_i} + \dots$. Comme $[\partial_{z_1^{(r+1)}}, \partial_{z_1^{(r-1)}}] = 0$, on doit avoir, $\partial_{z_1^{(r+1)}} f'_i = \partial_{z_1^{(r)}} f_i = 0$. ■

3 Mise en œuvre du lemme de Rouchon

Soient z, v, u, u_* des coordonnées sur T^μ, V, U, U_* . Si le théorème est faux, il existe un ouvert $O = \phi(\tilde{O}) \subset V$ tel qu'aucun ouvert $O_r = \phi(\tilde{O}_r) \subset O$ n'est plat. Nous allons chercher une contradiction.

Dans le cas $m = 1$, soient x_i , $1 \leq i \leq n$ des fonctions définissant avec leurs dérivées des coordonnées locales de $O_r \subset O$. On suppose en outre qu'elles satisfont des équations d'ordre 1 $x'_i = h_i(x, x'_1, u_*)$, $1 < i \leq n$ et que n est minimal. Si $n = 1$, O_r est plat.

Sinon, le th. 7 implique que les h_i sont linéaires en x'_1 : $h_i = f_i x'_1 + g_i$. On peut alors remplacer les x_i par $n - 1$ solutions indépendantes $y(x, u_*)$ de l'équation $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=2}^n f_i \partial_{x_i} Y = 0$. Les dérivées y'_i ne dépendent pas de

x'_1 , de sorte que les y_i satisfont un nouveau système d'ordre 1 contredisant la minimalité de n .

Dans le cas $m = 2$, on considère aussi $x_i(z, u, u_*)$, $1 \leq i \leq n$, qui satisfont un système d'ordre 1 $x'_i = h_i(x, x'_1, x'_2, u_*)$, $2 < i \leq n$ and $\max_{i=1}^n \text{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. Nous supposons le couple (r, n) minimal pour l'ordre lexicographique.

Si $n = 2$, O_i est plat. Si les h_i ne dépendent pas de x'_1 ou x'_2 , on se ramène au cas $m = 1$, déjà traité. On distingue deux situations.

i) Si les h_i sont tous linéaires en x'_1 et x'_2 : $h_i = \sum_{j=1}^2 f_{i,j} x'_j + g_i$, $1 \leq i \leq n$, on remplace les x_i par $n - 1$ solutions indépendantes $y(x, u_*)$ de l'équation $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=3}^n f_{i,1} \partial_{x_i} Y = 0$. L'ordre $\max_{i=1}^{n-1} \text{ord}_{z_1} y_i$ est au plus r . Les y'_i ne dépendent pas de x'_1 , et satisfont donc un nouveau système d'ordre 1. Si les y'_i dépendent de x_1 , ils satisfont nos hypothèses, contredisant la minimalité de n . Sinon, on est ramené au cas $m = 1$ et il suffit de compléter la sortie plate de la diffiété définie par les y_i avec x_1 pour conclure.

ii) Si les h_i ne sont pas linéaires en x'_1 et x'_2 , par le *lem. 8* les équation d'état peuvent être réécrites $x'_i = f_i(x, v_2, u_*) * v_1 + g_i(x, v_2, u_*)$, avec $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$ et $\partial_{z_1^{(r)}} f_i(x, v_2, u) = 0$. On remplace les x_i par $n - 1$ solutions indépendantes $y_i(x, v_2, u_*)$ de l'équation différentielle $\sum_{i=1}^n f_i \partial_{x_i} Y = 0$, complétées avec v_2 si les f_i dépendent de v_2 . Les y'_i doivent dépendre de x_1 ; sinon les f_i seraient des constantes, et les y'_i satisferaient un système linéaire de sorte que h_i seraient aussi linéaires en les x'_j , $j = 1, 2$.

Donc, les y_i (et v_2 si $f_2 = v_2$) engendrent $\mathcal{O}(O_i)$, doivent satisfaire un système d'ordre 1 et, selon le *lem. 8* sont d'ordre strictement inférieur à r en z_1 : une contradiction finale qui achève la preuve.

Exemple 9. — Considérons V défini par un modèle de voiture $\theta' = u/d \tan \phi$, $x' = u \cos \theta$, $y' = u \sin \theta$ (cf. [3, (18)]). Les diffiétés $U = U_0$ sont définies par $d' = 0$. Soient les paramétrages ϕ exprimés par $\theta = \arctan(z'_2/z'_1) \mp \arctan(z'_3/((z'_1)^2 + (z'_2)^2 - (z'_3)^2)^{1/2}) + (1 \mp 1)\pi/2$, $x = z_1 + z_3 \sin \theta$ et $y = z_2 - z_3 \cos \theta$. Quand $x_3'^2$ tend vers $x_1'^2 + x_2'^2$, les deux paramétrages tendent vers le lieu où $x' = y' = 0$. Une famille de sorties plates est donnée, e.g., par $B_1 := x + C \sin \theta$ et $B_2 := y - C \cos \theta$, $C \in \mathbf{R}$.

Tout choix de fonctions B_i de x , y et θ minimise $\epsilon (= 2)$, mais pas nécessairement $e_2 (\in \{0, 1\})$. Si $e_2 = 1$, il peut être abaissé en remplaçant P_1 par une solution de (1) (cf. i) *supra*). Si $e_2 = 0$ et $s = 1$, alors on obtient

$s = 0$ en remplaçant A_2 par P_1 (cf. ii) a) *supra*).

Exemple 10. — En prenant U défini par $t' = 1$ et en substituant t à z_3 dans les formules de l'exemple précédent, on obtient bien de nouveaux paramétrages indépendants de t .

Conclusion

Nous espérons une adaptation de cette preuve dans le cadre de l'algèbre différentielle ou en dimension différentielle supérieure à 2, mais de nombreuses difficultés se présentent que nous ne savons pas surmonter.

Références

- [1] É. CARTAN, « Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **145**, 86–91, 1915.
- [2] B. Charlet, J. Lévine et R. Marino, « On dynamic feedback linearization », *Systems & Control Letters*, **13**, 143–151, North-Holland, 1989.
- [3] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and applications », *Internat. J. Control*, **61**, p. 1327–1887, 1995.
- [4] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, « Deux applications de la géométrie locale des diffiétés », *Annales de l'IHP, section A*, **66**, (3), 275–292, 1997.
- [5] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE AC*. **44** :922–937, 1999.
- [6] D. HILBERT, « Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen », *Math. Annalen*, **73**, 95–108, 1912.
- [7] G. MONGE, « Supplément où l'on fait savoir... », *Histoire de l'Académie royale des sciences*, Paris, 502–576, 1787.
- [8] F. OLLIVIER, « Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2 », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I. p. 881–886, 1998.

- [9] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems : A Flatness-based Approach*, Springer, 2009.
- [10] F. Ollivier et B. Sadik, « La borne de Jacobi pour une diffiété définie par un système quasi régulier », *Comptes rendus Mathématique*, **345**, 3, 139–144, 2007.
- [11] P.S. Pereira da Silva et P. Rouchon, « On time-invariant systems possessing time-dependent flat outputs », actes de *NOLCOS 2004*, Elsevier, 2004.
- [12] P. Rouchon, « Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization », *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, Birkhäuser Boston, **4**, (2), 1–14, 1994.
- [13] H. SIRA-RAMÍREZ and S. AGRAWAL, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York, 2004.
- [14] I.S. KRASIL'SHCHIK, V.V. LYCHAGIN (V.V.) et A.M. VINOGRADOV, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [15] V.V. ZHARINOV, *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.
- [16] V.V. ZHARINOV, “On differentiations in differential algebras”, *Integral Transforms and Special Functions*, **4**, (1,2), 163–180, 1996.
- [17] P. ZERVOS, *Le problème de Monge*, Mémorial des Sciences Math., fasc. LIII, Gauthier-Villars, Paris, 1932.