



**HAL**  
open science

# Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat

François Ollivier, Brahim Sadik

► **To cite this version:**

François Ollivier, Brahim Sadik. Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat. 2017. hal-01451741v1

**HAL Id: hal-01451741**

**<https://hal.science/hal-01451741v1>**

Preprint submitted on 1 Feb 2017 (v1), last revised 26 May 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat

A subsystem of a flat system of differential dimension 2 is flat.

François OLLIVIER

LIX, UMR CNRS 7161  
École polytechnique  
91128 Palaiseau CEDEX  
France

francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Brahim SADIK

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences Semlalia  
B.P. 2390 Marrakech  
Maroc

sadik@ucam.ac.ma

31 janvier 2017

**Abstract.** A subsystem of a flat system of differential dimension at most 2 is flat. Furthermore, if such a flat system is stationary, we show that there exist flat outputs not depending on the time.

**Résumé.** Un sous-système de dimension différentielle au plus 2 d'une extension plate est plate. Si un tel système plat est stationnaire, il admet des sorties plates indépendantes du temps.

## Abridged English version

The result that will be proved corresponds in control theory to the fact that a system with 2 controls which is linearizable by exogenous feedback is linearizable by endogenous feedback or also that any *subsystem* of a *flat system* is flat. The reader may refer to [3, 4, 8] for more details on flat systems, a notion that goes back to Monge's problem [6, 5, 1, 14], and to [12, 13] for the formalism of diffiety theory. We will use Rouchon's lemma [11, 7], following the notations and definitions of [9]. A *diffiety extension*, or *system*,  $V/U$  will be a diffiety with a projection  $V \mapsto U$  that is a diffiety morphism and a *subsystem*  $W/U$  of  $V/U$  is such that  $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$ .

A *system of differential dimension  $m$*   $V/U_{\delta_0}$  is an open subset of  $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N)^m \times U$  with a derivation of the form

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x, z, u) \partial / \partial x_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial / \partial z_j^{(k)}.$$

The *trivial system of differential dimension  $m$* , denoted by  $T^m/U_{\delta_0}$ , is  $(\mathbf{R}^N)^m \times U$  equipped with the derivation  $\delta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial / \partial z_j^{(k)}$ . We may then define flat systems.

**DEFINITION 1.** — *A system  $V/U$  is flat if there exists a dense open set  $W \subset V$  such that any  $x \in W$  admits a neighbourhood  $\mathcal{O}$  isomorphic by  $\phi : \mathcal{O} \mapsto \tilde{\mathcal{O}}$  to an open subset  $\tilde{\mathcal{O}}$  of  $T^m \times U$ ; the functions  $\phi^*(z_j)$  that generate  $\mathcal{O}(\mathcal{O})$  are called flat outputs.*

By convention,  $\text{ord}_x A = -\infty$  if  $A$  is free from  $x$  and its derivatives and  $\text{ord}_{W,x} F$ , where  $W$  is a sub-variety, denotes  $\max\{r | \exists w \in W (\partial^r F / \partial x^r)(w) \neq 0\}$ . Our theorem may be stated as follows. The case  $m = 1$  is classical [2]. The proof will make a repeated use of Rouchon's lemma [11, 7], given below.

**THEOREM 2.** (Endogenous = exogenous) — *Let  $V/U_*$  be a system of differential dimension  $m \leq 2$ ,  $U/U_*$  a diffiety extension and  $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$  a morphism of extensions of  $U$ , where  $W$  is an open subset of  $T^m/U$  such that  $\text{Im} \phi$  is dense in  $V \times_{U_*} U$ , then  $V/U_*$  is flat.*

**THEOREM 3.** (Rouchon's lemma) — Let  $V/U$  be a diffiety extension,  $W/U$  a subvariety,  $Y_i \in \mathcal{O}(V)$ ,  $i = 1 \dots r$  a family of nonconstant functions on  $V$ ,  $H(Y) = 0$  a differential equation satisfied by the  $Y_i$  and  $e_i := \text{ord}_{W, Y_i} H$ . If there exists a locally surjective morphism of  $U$  extensions  $\phi : T^m/U \mapsto V/U$  with  $z_j$  such that  $\epsilon := \max_{i=1}^r \text{ord}_{W, z_j} \phi^*(Y_i^{(e_i)}) > -\infty$  and  $e_{i_0} = 0 \Rightarrow \text{ord}_{W, z_j} Y_{i_0} < \epsilon$ , then using the notation  $D := \sum_{e_i > 0} X_i \partial / \partial Y_i^{(e_i)}$  where the  $X_i$  are new variables, for  $z \in \phi^{-1}(W)$  the  $r$ -tuple  $(\partial Y_i^{(e_i)} / \partial z_j^{(\epsilon)})$  is solution of the equations  $\phi^*(D^k P)(\phi(z)) = 0$ .

**PROOF.** — It suffices to remark that, when  $e_i > 0$ ,  $(\partial \phi^*(Y_i^{(e_i)}) / \partial z_j^{(\epsilon)})(w) = (\partial \phi^*(Y_i) / \partial z_j^{(\epsilon - e_i)})(w)$  so that  $(\partial^2 \phi^*(Y_i^{(e_i)}) / (\partial z_j^{(\epsilon)})^2)(w)$  is zero. Substituting  $(\partial \phi^*(Y_i^{(e_i)}) / \partial z_j^{(\epsilon)})(w)$  to  $Y_i$  in  $(\phi^*(D^k P))(w)$ , one gets

$$((\partial / \partial z_j^{(\epsilon)})^k \phi^* P)(w),$$

that is equal to zero. ■

**SKETCH OF THE PROOF OF TH. 2.** — We denote by  $z, v, u, u_*$  coordinate functions on  $T^\mu, V, U, U_*$ . If the result is false, there exists an open subset  $O = \phi(\tilde{O}) \subset V$  such that no open subset  $O_l = \phi(\tilde{O}_l) \subset O$  is isomorphic to an open subset of  $T^m$ . We will look for a contradiction.

In the case  $m = 1$ , we choose  $A(z, u, u_*) = \phi^*(B(v, u_*))$  of lowest order  $a$  in some coordinate, that we may assume to be  $z_1$ . If  $B$  is not a flat output, we may find  $s$  functions  $P_k = \phi^*(Q_k)$ , such that the  $Q_k, B$  and all its derivatives are functionnally independent on  $O_l \subset O$ . These functions must satisfy equations  $Q'_k = H_k(Q, B, u_*)$ , also satisfied by the  $P_k$  and  $A$ . We assume the  $P_k$  to be chosen so that  $e := \max_{k=1}^s \text{ord}_A H_k$  is minimal. As  $\text{ord}_{z_1} P_k \geq a$ , we need have  $e > 0$ .

Th. 3 implies that the  $H_k$  are linear in  $A^{(e)}$ :  $H_k = L_k A^{(e)} + M_k$ . Then, we may replace the  $P_k$  by  $s$  independent solutions  $\tilde{P}_k = F_k(P, A, u_*)$  of the differential system  $\partial F / \partial A_1^{(e-1)} + \sum_{k=1}^s L_k \partial F / \partial P_k = 0$ : the derivatives  $\tilde{P}'_k$  do not depend on  $A^{(e)}$ , which contradicts the minimality of  $e$ .

In the case  $m = 2$ , consider  $A_i(z, u, u_*) = \phi^*(B_i)$ ,  $i = 1, 2$ , so that  $A_1$  and  $A_2$  are functionnally differentially independent and  $A_1$  actually depends on some variable that we may assume to be  $z_1$ . Let  $a_{i,1} := \text{ord}_{z_1} A_i$ .

We assume that  $\partial A_1 / \partial z_1^{(a_{1,1})} \neq 0$  on  $O_l$ . By the implicit function theorem, we can find functions  $Z_k$ , defined on  $\tilde{O}_l \subset \tilde{O}$  (restricting  $O_l$  if needed) such that  $z_1^{(a_{1,1}+k)} = Z_k(z, A, u, u_*)$ , where  $\text{ord}_{A_1} Z_k = k$  and  $\text{ord}_{z_1} Z_k < a_{1,1}$ . Let us write  $A_2 = \hat{A}_2(z, A_1, u, u_*)$  by replacing derivatives  $z_1^{(a_{1,1}+k)}$  by  $Z_k$ :  $\text{ord}_{A_1} \hat{A}_2 = a_{2,1} - a_{1,1}$ . We may choose  $A_1$  and  $A_2$  so that  $a_{1,1} \leq a_{2,1}$ , i.e.  $\text{ord}_{A_1} \hat{A}_2 \geq 0$ , or  $\text{ord}_{z_1} A_2 = \text{ord}_{A_1} \hat{A}_2 = -\infty$ .

If the  $B_i$  are not flat outputs, we may complete these functions with a maximal family of  $s$  functions  $P_k(z, A_1, u, u_*) = \phi^*(Q_k)$ , so that the  $B_i$  and their derivatives, completed with the  $Q_k$  are fonctionnally independent on  $O_l \subset O$  and these functions satisfy order 1 equations  $Q'_k = H_k(Q, B_1, B_2, u_*)$ , also satisfied by the  $P_k$  and the  $A_i$ . Let  $e_i := \max_{k=1}^s \text{ord}_{A_i} H_k$  and  $\epsilon := \max_{i=1}^2 \text{ord}_{z_1} A_i^{(e_i)}$ . When there exists  $i$  such that  $e_i = -\infty$ , we are reduced to the case  $m = 1$ , already treated. We may then assume that the  $A_i$  and the  $P_k$  are chosen so that the  $e_i$ ,  $a_{1,1}$  and  $\epsilon$  are not  $-\infty$  and the quadruple  $(s, \epsilon, a_{2,1}, e_2)$  is minimal, using lexicographical ordering.

i) We suppose the  $H_k$  to be linear in the  $A_i^{(e_i)}$ :  $H_k = \sum_{i=1}^2 L_{k,i} A_i^{(e_i)} + M_k$ , with  $\text{ord}_{A_j} L_{k,i} < e_j$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . We replace the  $P_k$  by  $s$  independent solutions  $\tilde{P}_k = F_k(P, A_1, A_2, u_*)$ , with  $\text{ord}_{A_i} F < e_i$ , of the differential equation (1)  $\partial F / \partial A_2^{(e_2-1)} + \sum_{k=1}^s L_{k,2} \partial F / \partial P_k = 0$ :  $s$  is unchanged,  $\text{ord}_{z_1} \tilde{P}'_k \leq \epsilon$  and the  $P'_k$  do not depend on  $A_2^{(e_2)}$ , a contradiction to the minimality of  $e_2$ .

ii) a) If the  $H_k$  are not linear in both  $A_\ell^{(e_\ell)}$  but (with  $1 \leq i, j \leq 2$ ,  $i \neq j$ )  $\text{ord}_{z_1} A_i^{(e_i)} > \text{ord}_{z_1} A_j^{(e_j)}$ , by th. 3 the  $H_k$  are linear in  $A_i^{(e_i)}$ :  $H_k = L_{k,i} A_i^{(e_i)} + M_k$ . We can replace the  $P_k$  by  $s$  independent solutions  $\tilde{P}_k = F_k(P, A, u_*)$ , with  $\text{ord}_{A_i} F < e_i$  and  $\text{ord}_{A_j} F \leq e_j$ , of the differential equation (1), or its symmetric version, permuting 1 and 2. Then, the  $\tilde{P}'_k$  do not depend on  $A_1^{(e_1)}$ .

At any point  $(z, u, u_*)$ , let  $\alpha := A_i^{(e_i-1)}(z, u, u_*)$  and  $W$  defined by  $A_i^{(e_i-1)} = \alpha$ . We notice that  $\text{ord}_{W, z_1} (P_k - L_{k,i} (A_i^{(e_i-1)} - \alpha))'' = \text{ord}_{W, z_1} (M'_k - L'_{k,i} A_i^{(e_i)}) \leq \epsilon$ . So, by th. 3,  $\max_{k=1}^s \text{ord}_{z_1} L_{k,i} < \epsilon - 1$ . Hence the majoration  $\max_{k=1}^s \text{ord}_{z_1} \tilde{P}'_k < \epsilon$ . A contradiction.

If  $e_2 = 0$  and  $e_1 \leq a_{2,1} - a_{1,1}$ , then we can replace  $A_2$  by any  $P_k$  such

that  $H_k$  actually depends on  $A_2$ , which ensures that its derivatives and those of  $A_1$  are functionally independent, contradicting the minimality of  $s$ . So  $e_2 = 0$  means that  $e_1 > a_{2,1} - a_{1,1}$  and  $\text{ord}_{z_1} A_1^{(e_1)} > \text{ord}_{z_1} A_2^{(e_2)}$ . If  $e_2 > 0$  and  $e_1 = 0$ , then  $\text{ord}_{z_1} A_1^{(e_1)} < \text{ord}_{z_1} A_2^{(e_2)}$ .

b) The cases  $e_j = 0, j \in \{1, 2\}$  are thus included in the cases  $\text{ord}_{z_1} A_i^{(e_i)} > \text{ord}_{z_1} A_j^{(e_j)}$  considered in a). We treat here the case  $\text{ord}_{z_1} A_1^{(e_1)} = \text{ord}_{z_1} A_2^{(e_2)}$ ,  $e_1 > 0$  and  $e_2 > 0$ . By th. 3,  $(\partial A_1^{(e_1)} / \partial z_1^{(\epsilon)}, \partial A_2^{(e_2)} / \partial z_1^{(\epsilon)})$  is solution of  $P(X_1, X_2) := D^2 H_{k_0} = 0$ , where  $D := \sum_{i=1}^2 X_i \partial / \partial A_i^{(e_i)}$ . By the implicit function theorem, we may find on  $O$ , restricting the interval if needed, a solution  $(1, N(A_1, A_2, u_*))$  of this equation, with  $N = \partial A_2 / \partial A_1^{(a_{2,1} - a_{1,1})} \neq 0$ . So we can decrease  $a_{2,1}$  by replacing  $A_2$  by a solution  $\tilde{A}_2 = F(A_1, A_2, N)$ , with  $F$  of order 0 in  $A_2$  and  $N$  and order less than  $a_{2,1} - a_{1,1}$  in  $A_1$ , of the system  $\partial F / \partial A_1^{(a_{2,1} - a_{1,1})} + N \partial F / \partial A_2$ . Then  $\text{ord}_{z_1} \tilde{A}_2 < a_{2,1}$ , a final contradiction that concludes the proof.

*E.g.*, the diffieties  $U$  and  $U_*$  may be respectively  $\mathbf{R}$ , standing for the time variable  $t$  with a derivation  $\partial / \partial t$  and a single point with derivation 0, if  $V$  is associated to a stationary model. Then, the theorem asserts that  $V$  is flat with flat outputs not depending on the time, answering a problem raised by Pereira Da Silva and Rouchon [10].

## Introduction

Si la notion mathématique remonte aux travaux de Monge [6] et a été étudiée au début du  $xx^e$  siècle par Hilbert [5], Cartan [1] ou Zervos [14], les systèmes plats ont été inventés sous ce nom pour les besoins de l'automatique [3, 4, 8]. Dans ce cadre, le résultat qui va être prouvé en dimension différentielle au plus 2, signifie qu'un système linéarisable par bouclage exogène est linéarisable par bouclage endogène. Sommairement, *tout sous-système d'un système pla est plat*, c'est-à-dire que si les solutions d'un système d'EDO sont paramétrables par  $m$  fonctions arbitraires, il existe un tel paramétrage localement bijectif. Le cas  $m = 1$  est une conséquence des résultat de Charlet *et al.* [2] ou dans le cas d'un paramétrage rationnel du théorème de Lüroth–Ritt, mais qui n'a pas d'analogue en dimension différentielle 2 [7].

La définition de la platitude peut varier selon que l'on impose ou non à un système stationnaire de posséder un paramétrage indépendant du temps (*cf.* Pereira da Silva et Rouchon [10]). On montrera que, en dimension différentielle au plus 2, ces deux définitions coïncident, c'est-à-dire que *si un système stationnaire possède des sorties plates dépendant du temps, il en existe d'autres indépendantes*.

## 1 Diffiétés plates

Pour la notion de diffiété [12, 13], nous adoptons les conventions de [9]. Soit  $I$  un ensemble dénombrable, on appellera *diffiété* un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^I$  pour la topologie la plus grossière rendant pour tout  $i_0 \in I$  les projections  $\pi_{i_0} : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_{i_0}$  continues, muni d'une dérivation  $\delta = \sum_{i \in I} c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , où les  $c_i$  appartiennent à  $\mathcal{O}(V)$ , l'anneau des applications  $\mathcal{C}^\infty$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}$  ne dépendant que d'un nombre *fini* de coordonnées.

Un *morphisme de diffiétés* est une application  $\phi : V_{\delta_1} \mapsto V_{\delta_2}$ , définie par des fonctions  $\mathcal{O}(V)$  et telle que  $\delta_1 \circ \phi^* = \phi^* \circ \delta_2$ , où  $\phi^* : \mathcal{O}(V_2) \mapsto \mathcal{O}(V_1)$  est l'application duale de  $\phi$ .

Une *extension de diffiétés*, ou un *système*, noté  $V/U$ , est un couple de diffiétés muni d'une projection  $\pi : V \mapsto U$  surjective qui est un morphisme de diffiétés. Il s'agit donc d'un fibré sur  $U$ , avec une projection compatible avec la structure de diffiété. Un morphisme d'extensions  $\phi : V_1/U \mapsto V_2/U$  est un morphisme de  $V_1$  dans  $V_2$  tel que  $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$ . Un *sous-*

Le système  $W/U$  de  $V/U$  est une extension de  $U$  telle que  $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$ . Soient  $V/U$  et  $W/U$  deux extensions de diffiétés, leur produit fibré est muni d'une structure naturelle d'extension de  $U$  (ainsi que de  $V$  ou de  $W$ ), notée  $V \times_U W$ .

Un système de dimension différentielle  $m$   $V/U_{\delta_0}$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N)^m \times U$  muni d'une dérivation de la forme  $\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x, z) \partial / \partial x_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k+1)} \partial / \partial z_j^{(k)}$ . L'extension triviale de dimension différentielle  $m$ , que l'on note  $T^m/U_{\delta_0}$ , est  $(\mathbf{R}^N)^m \times U$  muni de la dérivation

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} z_i^{(k+1)} \partial / \partial z_i^{(k)}.$$

**DÉFINITION 4.** — Un système  $V/U$  sera dit plat s'il existe un ouvert dense  $W$  de  $V$  tel que tout  $x$  appartenant à  $W$  admette un voisinage  $O$  isomorphe par  $\phi : O \mapsto \tilde{O}$  à un ouvert  $\tilde{O}$  de l'extension triviale  $\mathbf{T}^m \times U$ . Les fonctions  $\phi^*(z_i)$ , où les  $z_i$  définissent l'extension triviale, sont appelées sorties plates.

**THÉORÈME 5.** (Endogène=exogène) — Si l'on a une extension  $V/U_*$  de dimension différentielle au plus 2 et une extension  $U/U_*$ , une extension triviale  $T^\mu \times U$  et un morphisme d'extensions de  $U$   $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$ , défini sur un ouvert  $W$  de  $T^\mu \times U$ , tel que  $\overline{\text{Im} \phi} = V \times_{U_*} U$ , alors  $V/U_*$  est plate.

Les diffiétés  $U_*$  et  $U$  peuvent, par exemple, faire intervenir une variable « temps »  $t$  avec  $t' = 0$  : si celui-ci n'apparaît pas dans  $U_*$ , il est absent des sorties plates de  $V/U_*$ .

## 2 Préliminaires de la preuve. Lemme de Rouchon

Si le théorème est faux, alors il existe un ouvert non vide  $O$  de  $V$ , qui ne contient aucun ouvert  $O$ , isomorphe à un ouvert de  $\mathbf{T}^m/U_*$ . On notera respectivement  $z, v, u$  et  $u_*$  des familles de fonctions de coordonnées sur  $T^\mu, V, U$  et  $U_*$ . Par convention  $\text{ord}_x A = -\infty$  si  $A$  ne dépend pas de  $x$  et de ses dérivées et on note  $\text{ord}_{W,x} F$ , où  $W$  est une sous-variété,  $\max\{r | \exists w \in W (\partial^r F / \partial x^r)(w) \neq 0\}$ .

Soit  $m$  la dimension différentielle de l'extension  $V/U_*$ . Si  $m = 1$ , on peut trouver, quitte à réindexer les  $z_i$ ,  $A(z, u, u_*) = \phi^*(B(v, u_*))$  dépendant de  $z_1$  ou de ses dérivées. On suppose  $\text{ord}_{z_1} A$  minimal. Si  $m = 2$ , on peut trouver  $A_i(z, u, u_*) = \phi^*(B_i(v, u_*))$  telles que les  $A_i$  et leurs dérivées soient fonctionnellement indépendantes. On peut imposer, quitte à réindexer, que  $a_{1,1} := \text{ord}_{z_1} A_1$  et  $a_{2,1} := \text{ord}_{z_1} A_2 \leq a_{1,1}$  ou  $a_{2,1} = -\infty$ .

Nous supposons que  $\partial A_i / \partial \neq 0$  sur  $O$ , quitte à réduire cet ouvert. Par le théorème des fonctions implicites, il existe des fonctions  $Z_k$ , définies sur un ouvert  $\tilde{O}$ ,  $\subset \tilde{O}$  telles que  $z_1^{(a_{1,1}+k)} = Z_k(z, A, u, u_*)$ , avec  $\text{ord}_{A_1} Z_k = k$ ,  $\text{ord}_{z_1} Z_k < a_{1,1}$ . Notons  $A_2 = \hat{A}_2(z, A_1, u, u_*)$ , obtenue en remplaçant les dérivées  $z_1^{(a_{1,1}+k)}$  par  $Z_k$ . Nous posons  $\text{ord}_{z_1} A_2 = a_{2,1}$ . Comme  $a_{1,1}$  est minimal, ou  $a_{2,1} \geq a_{1,1}$  ou  $a_{2,1} = -\infty$ . Dans ce cas, nous choisissons  $A_2$  de sorte que son ordre  $a_{2,2}$  en une variable  $z_j$ , que l'on peut supposer être  $z_2$ , soit également minimal.

Si  $B$  ou les  $B_i$ , selon la dimension, ne sont pas des sorties linéarisantes sur  $O$ ,  $\subset O$ , nous pouvons compléter cette/ces fonction(s) par une famille maximale  $Q_k$  de  $s$  fonctions, notant  $P_k(z, A_1, u, u_*) := \phi^*(Q_k)$ , de sorte que les  $Q_k$ , les  $B$  et leurs dérivées soient fonctionnellement indépendantes sur  $O$ ,  $\subset O$ . Quitte à restreindre l'ouvert, ces fonctions doivent satisfaire des équations d'ordre 1 :  $Q'_k = H_k(Q, B, u_*)$  sur  $O$ , également satisfaite par  $P_k$ ,  $A$  sur  $\tilde{O}$ .

Généralisant des résultats antérieurs, en particulier de Hilbert [5], le lemme de Rouchon [11, 7] montre que la platitude n'est pas générique pour des systèmes non linéaires. Nous utilisons cette variante.

**THÉORÈME 6. (Endogène=exogène)** — Soit  $V/U$  une extension de diffiétés,  $Y_i \in \mathcal{O}(V)$ ,  $W/U$  une sous-variété,  $i = 1 \dots r$  une famille de fonctions non constantes sur  $V$ ,  $H(Y) = 0$  une équation différentielle ordinaire satisfaite par les  $Y_i$  et  $e_i := \text{ord}_{Y_i} H$ . S'il existe un morphisme localement surjectif d'extension de  $U$   $\phi : T^m \mapsto V$  et  $z_j$  tel que  $\epsilon := \max_{i=1}^r \text{ord}_{z_j} \phi^*(Y_i^{(e_i)}) > -\infty$  et  $e_{i_0} = 0 \Rightarrow \text{ord}_{z_j} Y_{i_0} < \epsilon$ , alors en posant  $D := \sum_{e_i > 0} X_i \partial / \partial Y_i^{(e_i)}$  où les  $X_i$  sont des nouvelles variables, pour  $z \in \phi^{-1}(W)$  le  $r$ -uplet  $(\partial Y_i^{(e_i)} / \partial z_j^{(\epsilon)})$  est solution des équations

$$\phi^*(D^k P)(\phi(z)) = 0.$$

PROOF. — Il suffit de remarquer que, comme  $e_i > 0$ ,  $(\partial\phi^*(Y_i^{(e_i)})/\partial z_j^{(\epsilon)})(w) = (\partial\phi^*(Y_i)/\partial z_j^{(\epsilon-e_i)})(w)$  de sorte que  $(\partial^2\phi^*(Y_i^{(e_i)})/(\partial z_j^{(\epsilon)})^2)(w) = 0$ . Si l'on substitue  $(\partial\phi^*(Y_i^{(e_i)})/\partial z_j^{(\epsilon)})(w)$  à  $X_i$  dans  $(\phi^*(D^k P))(w)$ , on obtient

$$((\partial/\partial z_j^{(\epsilon)})^k \phi^* P)(w)$$

, qui est nul. ■

Ces équations sont homogènes et, si l'une d'elles est non-nulle, elle définit pour  $r = 2$  des points isolés de  $\mathbf{P}^1(\mathcal{O}(V)) : (C_1 : C_2)$ , dont l'un est égal à  $(\partial\phi^*(Y_1^{(e_1)})/\partial z_j^{(\epsilon)} : \partial\phi^*(Y_2^{(e_2)})/\partial z_j^{(\epsilon)})$ .

### 3 Mise en œuvre du lemme de Rouchon

Dans le cas  $m = 1$ , soit  $e := \max_{k=1}^s \text{ord}_A H_k$ ; on peut supposer que  $A$  et les  $P_k$  ont été choisis de sorte que  $e$  soit minimal. D'après le th. 6, les équations  $H_k$  sont linéaires en  $A^{(e)} : H_k = L_k(P, A, u_*)A^{(e)} + M_k(P, A, u_*)$ .

Donc, quitte à restreindre l'ouvert  $\tilde{O}$ , on peut trouver  $s$  nouvelles fonctions indépendantes  $\tilde{P}_k = F_k(P, A, u_*)$ , d'ordre au plus  $e - 1$  en  $A$  et solutions de  $\partial F/\partial A^{(e-1)} + \sum_{k=1}^s L_k \partial F/\partial P_k = 0$ . Les dérivées  $\tilde{P}'_k$  ne dépendent pas de  $A^{(e)}$ , contradiction.

Dans le cas  $m = 2$ , soient  $e_i := \max_{k=1}^s \text{ord}_{A_i} H_k$  et  $\epsilon := \max_{i=1}^2 \text{ord}_{z_1} A_i^{(e_i)}$ . Si pour  $i = 1, 2$  on a  $e_i = -\infty$ , on est ramené au cas  $m = 1$ , déjà traité. Nous pouvons donc supposer que les  $A_i$  et les  $P_k$  sont choisis tels que  $a_{1,1}$ , les  $e_i$  et  $\epsilon$  soient différents de  $-\infty$  et le quadruplet  $(s, \epsilon, a_{2,1}, e_2)$  soit minimal pour l'ordre lexicographique.

i) Supposons que les  $H_k$  sont linéaires en les  $A_i^{(e_i)} : H_k = \sum_{i=1}^2 L_{k,i} A_i^{(e_i)} + M_k$ , où  $\text{ord}_{A_j} L_{k,i} < e_j$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . On peut remplacer les  $P_k$  par  $s$  solutions indépendantes  $\tilde{P}_k = F_k(P, A_1, A_2, u_*)$ , où  $\text{ord}_{A_i} F \leq e_i$ , de l'équation différentielle (1)  $\partial F/\partial A_2^{(e_2-1)} + \sum_{k=1}^s L_{k,2} \partial F/\partial P_k = 0 : \text{ord}_{z_1} \tilde{P}'_k \leq \epsilon$  et  $\tilde{P}'_k$  ne dépend pas de  $A_2^{(e_2)}$ , donc  $e_2$  n'est pas minimal.

ii) a) Si les  $H_k$  ne sont pas linéaires en  $A_1^{(e_1)}$  et  $A_2^{(e_2)}$ , mais si, (avec  $1 \leq i, j \leq 2, i \neq j$ )  $\text{ord}_{z_1} A_i^{(e_i)} > \text{ord}_{z_1} A_j^{(e_j)}$ , par le th. 6 les  $H_k$  sont linéaires

en  $A_i^{(e_i)} : H_k = L_{k,i}A_i^{(e_i)} + M_k$ . On peut remplacer les  $P_k$  par  $s$  solutions indépendantes  $\tilde{P}_k = F_k(P, A, u_*)$ , avec  $\text{ord}_{A_i}F < e_i$  et  $\text{ord}_{A_j}F \leq e_j$ , de l'équation différentielle (1), ou celle obtenue en permutant les indices 1 et 2.

En tout point  $(z, u, u_*)$ , soit  $\alpha := A_i^{(e_i)}(z, u, u_*)$  et  $W$  définie par  $A_i^{(e_i-1)} = \alpha$ . Nous avons  $\text{ord}_{W, z_1}(P_k - L_{k,i}(A_i^{(e_i-1)} - \alpha))'' = \text{ord}_{W, z_1}(M'_k - L'_{k,i}A_i^{(e_i)}) \leq \epsilon$ . Donc, par le th. 6,  $\max_{k=1}^s \text{ord}_{z_1}L_{k,i} < \epsilon - 1$ , de sorte que  $\max_{k=1}^s \text{ord}_{z_1}\tilde{P}'_k < \epsilon$ . Une contradiction.

Si  $e_2 = 0$  et  $e_1 \leq a_{2,1} - a_{1,1}$ , on peut diminuer  $s$  en remplaçant  $A_2$  par l'un des  $P_k$ . Donc  $e_2 = 0$  implique que  $e_1 > a_{2,1} - a_{1,1}$  et  $\text{ord}_{z_1}A_1^{(e_1)} > \text{ord}_{z_1}A_2^{(e_2)}$ . Si  $e_2 > 0$  et  $e_1 = 0$ , alors  $\text{ord}_{z_1}A_1^{(e_1)} < \text{ord}_{z_1}A_2^{(e_2)}$ .

b) Les cas où  $e_j = 0, j \in \{1, 2\}$  sont donc inclus dans les cas  $\text{ord}_{z_1}A_i^{(e_i)} > \text{ord}_{z_1}A_j^{(e_j)}$ , considérés en a). Nous supposons maintenant  $\text{ord}_{z_1}A_1^{(e_1)} = \text{ord}_{z_1}A_2^{(e_2)}$  avec  $e_1 > 0$  et  $e_2 > 0$

Par le lemme de Rouchon,  $(\partial A_1^{(e_1)}/\partial z_1^{(\epsilon)}, \partial A_2^{(e_2)}/\partial z_1^{(\epsilon)})$  est solution de  $P(Y_1, Y_2) := D^2H_{k_0} = 0$ , où  $D := \sum_{i=1}^2 Y_i \partial / \partial A_i^{(e_i)}$ . Par le théorème des fonctions implicites, on peut trouver sur  $O$ , quitte à restreindre cet ouvert, une solution  $(1, N(A, R, u_*))$ . Alors,  $N = \partial A_2 / \partial A_1^{(a_{2,1} - a_{1,1})} \neq 0$  et l'on peut faire décroître  $a_{2,1}$  en remplaçant  $A_2$  par une solution  $\tilde{A}_2 = F(A_1, A_2, N)$ , où  $\text{ord}_{A_2}F = 0$  et  $\text{ord}_{A_1}F = a_{2,1} - a_{1,1}$ , de l'équation

$$\partial F / \partial A_1^{(a_{2,1} - a_{1,1})} + N \partial F / \partial A_2 = 0.$$

Cette contradiction finale achève la preuve.

*Exemple 7.* — Considérons  $V$  défini par un modèle de voiture  $\theta' = u/d \tan \phi$ ,  $x' = u \cos \theta$ ,  $y' = u \sin \theta$  (cf. [3, (18)]). Les diffiétés  $U = U_0$  sont définies par  $d' = 0$ . Soient les paramétrages  $\phi$  exprimés par  $\theta = \arctan(z'_2/z'_1) \mp \arctan(z'_3/((z'_1)^2 + (z'_2)^2 - (z'_3)^2)^{1/2}) + (1 \mp 1)\pi/2$ ,  $x = z_1 + z_3 \sin \theta$  et  $y = z_2 - z_3 \cos \theta$ . Quand  $x'_3$  tend vers  $x'_1{}^2 + x'_2{}^2$ , les deux paramétrages tendent vers le lieu où  $x' = y' = 0$ . Une famille de sorties plates est donnée, e.g., par  $B_1 := x + C \sin \theta$  et  $B_2 := y - C \cos \theta$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .

Tout choix de fonctions  $B_i$  de  $x, y$  et  $\theta$  minimise  $\epsilon (= 2)$ , mais pas nécessairement  $e_2 (\in \{0, 1\})$ . Si  $e_2 = 1$ , il peut être abaissé en remplaçant

$P_1$  par une solution de (1) (cf. i) *supra*). Si  $e_2 = 0$  et  $s = 1$ , alors on obtient  $s = 0$  en remplaçant  $A_2$  par  $P_1$  (cf. ii) a) *supra*).

*Exemple 8.* — En prenant  $U$  défini par  $t' = 1$  et en substituant  $t$  à  $z_3$  dans les formules de l'exemple précédent, on obtient bien de nouveaux paramétrages indépendants de  $t$ .

## Conclusion

Nous espérons une adaptation de cette preuve dans le cadre de l'algèbre différentielle ou en dimension différentielle supérieure à 2, mais de nombreuses difficultés se présentent que nous ne savons pas surmonter.

## Références

- [1] É. CARTAN, « Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **145**, 86–91, 1915.
- [2] B. Charlet, J. Lévine et R. Marino, « On dynamic feedback linearization », *Systems & Control Letters*, **13**, 143–151, North-Holland, 1989.
- [3] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and applications », *Internat. J. Control*, **61**, p. 1327–1887, 1995.
- [4] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE AC*. **44** :922–937, 1999.
- [5] D. HILBERT, « Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen », *Math. Annalen*, **73**, 95–108, 1912.
- [6] G. MONGE, « Supplément où l'on fait savoir. . . », *Histoire de l'Académie royale des sciences*, Paris, 502–576, 1787.
- [7] F. OLLIVIER, « Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2 », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I. p. 881–886, 1998.
- [8] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems : A Flatness-based Approach*, Springer, 2009.

- [9] F. Ollivier et B. Sadik, « La borne de Jacobi pour une diffiété définie par un système quasi régulier », *Comptes rendus Mathématique*, **345**, 3, 139–144, 2007.
- [10] P.S. Pereira da Silva et P. Rouchon, « On time-invariant systems possessing time-dependent flat outputs », actes de *NOLCOS 2004*, Elsevier, 2004.
- [11] P. Rouchon, « Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization », *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, Birkhäuser Boston, **4**, (2), 1–14, 1994.
- [12] I.S. KRASIL'SHCHIK, V.V. LYCHAGIN (V.V.) et A.M. VINOGRADOV, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [13] V. ZHARINOV, *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.
- [14] P. ZERVOS, *Le problème de Monge*, Mémorial des Sciences Math., fasc. LIII, Gauthier-Villars, Paris, 1932.