



HAL
open science

Approches comparées sur l'estimation d'une probabilité de défaillance: cas des échantillons totalement censurés

Léo Gerville-Réache, Vincent Couallier, Franck Bayle

► To cite this version:

Léo Gerville-Réache, Vincent Couallier, Franck Bayle. Approches comparées sur l'estimation d'une probabilité de défaillance: cas des échantillons totalement censurés. 2017. hal-01448201

HAL Id: hal-01448201

<https://hal.science/hal-01448201>

Preprint submitted on 27 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approches comparées sur l'estimation d'une probabilité de défaillance: cas des échantillons totalement censurés

Léo GERVILLE-REACHE¹, Vincent COUALLIER¹, Franck BAYLE²

¹Université de Bordeaux - IMB UMR 5251, ²Thales-Avionics

1) Introduction : présentation du problème

En fiabilité, l'augmentation de la qualité en conception et en production des matériels conduit à une sorte de paradoxe. Lors d'un essai en fiabilité, il arrive qu'aucune défaillance ne soit constatée pendant la durée d'observation. C'est heureux pour le fabricant comme pour le client. Cependant l'analyse statistique d'un tel résultat n'est pas classique et pose finalement quelques questions.

En médecine, l'évaluation des risques faibles se pose également et une des solutions couramment employée pour estimer une probabilité à partir de l'observation de zéro cas sur n est la règle du "3 sur n ". Dans la théorie des valeurs extrêmes, on trouve aussi des méthodes permettant d'évaluer statistiquement des petites probabilités, sans oublier l'apport potentiel de la statistique bayésienne permettant d'enrichir l'observation d'un a priori adéquat.

D'où vient cette règle du "3 sur n "? C'est en fait l'issue d'une approximation d'un calcul d'une borne inférieure d'intervalle de confiance à 95% pour la probabilité réelle d'occurrence. Cette règle est donc la résultante d'un choix d'un niveau de confiance. Mais quelle est le niveau de confiance qu'il convient de retenir lorsque celui-ci est déterminant pour la seule estimation possible de la probabilité recherchée ? Dans la plupart des situations statistiques en fiabilité, des événements (défaillance ou autre) sont observés et une estimation ponctuelle est possible et significative. Dans un cas de censure totale, l'estimation ponctuelle est insignifiante.

Mais d'où vient le célèbre 5% (i.e. une confiance à 95%)?

De la loi Normale? La probabilité pour une variable aléatoire normale de se trouver à plus de deux écarts-types de son espérance est de l'ordre de 5% (une règle de calcul simple...).

De Laplace? Il traite (entre autres) dans son essai philosophique sur les probabilités, de la probabilité des jugements des tribunaux : "*Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est 1093/8192, où un peu plus grande qu'un huitième ; elle est à peu près de 1/22 (qui arrondi donne 0,05), si cette pluralité est de neuf voix. [...] La probabilité des décisions est trop faible dans nos jurys, et je pense que pour donner une garantie suffisante à l'innocence, on doit exiger au moins la pluralité de neuf voix sur douze.*" NB : pour obtenir ses résultats, Laplace suppose que la probabilité de l'erreur de décision de chaque juge "*ne peut varier qu'entre 1/2 et 1, mais qu'elle ne peut être au-dessous de 1/2. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort : elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables et contraires à l'accusé, que je détermine la probabilité de cette opinion.*"

Enfin, en 2015, André Lannoy souligne : "*En fiabilité, le problème de l'estimation d'un taux de défaillance (ou plus généralement d'un taux d'occurrence d'un phénomène) en l'absence de défaillance (ou d'évènement redouté) se pose depuis longtemps. Il semble qu'il n'y a pas de solution vraiment satisfaisante. La solution actuelle consiste à utiliser la méthode dite du Chi 2 au niveau de confiance de 50%, méthode acceptée par les autorités réglementaires dans plusieurs secteurs industriels.*"

Dans ce papier, nous nous sommes focalisé sur les approches statistiques pouvant être employées à partir d'une observation minimaliste, dans un schéma de censure totale d'un échantillon de durée de vie exponentielle (pour simplifier, la généralisation aux lois type Weibull ou Log-Normale étant possible), ou d'un schéma de Bernoulli standard. Au delà de montrer certaines équivalences utiles, nous proposons plusieurs approches permettant un choix argumenté du niveau de confiance pour l'estimation d'une borne inférieure pour la probabilité de défaillance.

2) Notations - Modèles

On s'intéresse ici à deux modèles aléatoires (ainsi que la question adaptée au modèle) pour l'estimation d'une petite probabilité :

2.1. Modèle de Bernoulli

Soit une variable aléatoire D de loi de Bernoulli $B(p)$ dont on cherche à estimer le paramètre $p = P(D = 1)$ à partir d'un échantillon D_1, \dots, D_n pour lequel on observe $D_i = 0, \forall i = 1..n$. Dans ce cas, la fréquence observée fournit comme estimation de p la valeur "inutile" 0. On peut néanmoins définir des méthodes d'estimation réalistes pour lesquelles le résultat est une fonction décroissante de la taille d'échantillon (estimation par intervalle de confiance, estimation bayésienne,...).

2.2. Modèle exponentiel

Soit une durée de vie T , supposée de loi exponentielle $E(\lambda)$, dont on cherche à estimer le paramètre λ à partir d'un échantillon totalement censuré de taille n (n pouvant être égal à 1) : on n'a donc jamais observé la réalisation de T mais l'évènement $T_i > C_i, \forall i = 1..n$, les C_i pouvant être des valeurs constantes (censure de type I) ou aléatoires (censure de type III). On note $T_{TT} = \sum_{i=1}^n C_i$ le temps total d'observation.

De façon équivalente, on peut être amené à chercher dans ce modèle une estimation de :

- λ , le taux de défaillance,
- $MTTF = 1/\lambda$, la durée de vie moyenne,
- $p_0 = P(T \geq t_0)$, une probabilité cible.

Que nous donne la maximisation de la vraisemblance ?

- La vraisemblance $L(\lambda) = \exp(-\lambda T_{TT})$ fournit comme estimation "inutile" du taux de défaillance la valeur 0.
- L'estimation équivalente du $MTTF$ est infinie.
- L'estimation d'une probabilité cible est indépendante de la cible : $P(T \geq t_0) = 1$.

La méthode standard du maximum de vraisemblance (comme la méthode des moments) ne permet donc pas ici de conserver l'information du cumul de temps sans défaillance, alors qu'on voudrait évidemment définir une méthode d'estimation qui en dépende : il ne paraît pas naturel de définir la même estimation d'un taux de défaillance en observant 20 heures sans défaillance ou 5000 heures sans défaillance!

Pour simplifier la lecture, sans perte de généralité, on supposera avoir observé zéro défaillance sur un temps total d'observation T_{TT} , sans spécifier le nombre d'unités testées, ni les valeurs de censure. Par exemple, on suppose qu'un essai zéro défaillance (de durée T_{TT}) a été réussi sur une pièce de loi de fiabilité exponentielle. On cherche alors à estimer $P(T \geq t)$ où T est une durée de vie de même loi exponentielle : quelle est la probabilité qu'un nouvel essai passe le temps t ?

3) Estimation au niveau de confiance $1 - \alpha$

Il est important de noter qu'un niveau de confiance est une "valeur minimale". C'est à dire que lorsque que l'on estime une quantité par intervalle de confiance, la probabilité que la *vraie valeur* appartienne à l'intervalle est **au moins égale** au niveau de confiance.

3.1. Estimation au niveau de confiance $1 - \alpha$ dans le modèle exponentiel

Pour une observation totalement censurée de lois exponentielles, on obtient un intervalle de confiance unilatéral pour le *MTTF* en utilisant le fait que le nombre total de défaillances observées sur n unités suivies sur des périodes fixées, sous hypothèse de réparation immédiate parfaite, est distribué selon une loi de Poisson (Cocoza-Thivent (1997)). On montre alors qu'on est en mesure de calculer la borne inférieure d'intervalle de confiance du *MTTF*, au niveau de confiance $1 - \alpha$ par :

$$MTTF_{inf} = \frac{2T_{TT}}{\chi^2_2(1 - \alpha)} = \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}$$

Donc, au niveau de confiance $1 - \alpha$, l'observation sans défaillance sur un temps de test T_{TT} permet d'affirmer :

- $\lambda \leq -\ln(\alpha) / T_{TT}$,
- $MTTF \geq (-1 / \ln(\alpha)) T_{TT}$,
- $P(T \geq t) \geq \exp\left(\frac{\ln(\alpha)t}{T_{TT}}\right) = \alpha^{t/T_{TT}}$.

3.2. Estimation dans le modèle de Bernoulli ; "the Rule of Three"

L'estimation fréquentiste de la probabilité d'un évènement à partir d'un échantillon i.i.d. d'une loi de Bernoulli $B(p)$ est $\hat{p} = 1/n \sum_{i=1}^n D_i = \bar{D}_n$ et un intervalle de confiance (dit exact) bilatéral est obtenu par recherche des deux bornes L et U vérifiant (en notant $D = \sum_{i=1}^n D_i$)

$$P(\text{Bin}(n, p = L) \geq D) = \alpha/2 \text{ et } P(\text{Bin}(n, p = U) \leq D) = \alpha/2.$$

Cette formule, qui définit l'intervalle de confiance de Clopper-Pearson (Clopper and Pearson, 1934, Brown, Cai, and DasGupta, 2001) peut aussi être calculée au moyen des quantiles d'une loi Beta :

$$L = B_{\alpha/2}(a = D, b = n - D + 1) \text{ et } U = B_{1-\alpha/2}(a = D + 1, b = n - D),$$

ce qui est aisément adapté au cadre unilatéral et pour notre observation de $D = 0$: à la confiance $1 - \alpha$, l'observation de zéro défaut sur n unités permet d'affirmer :

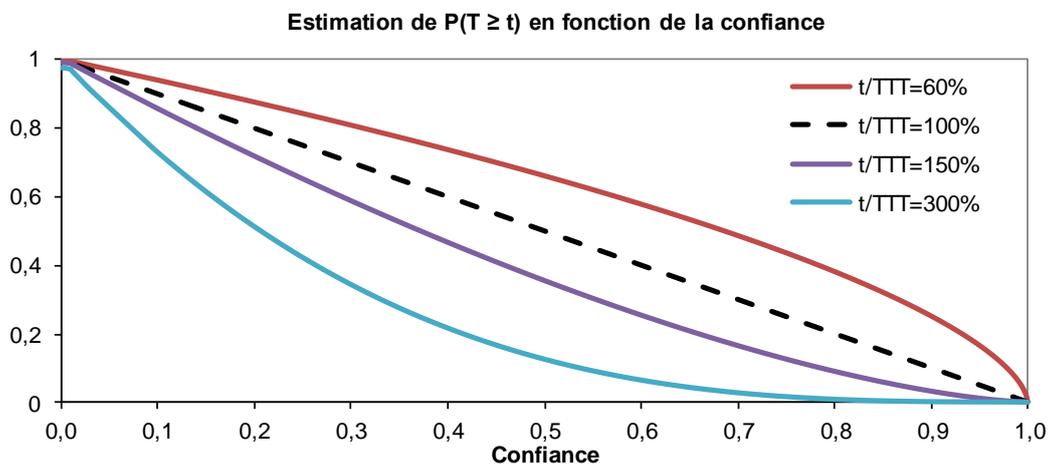
$$p \leq B_{1-\alpha}(a = 1, b = n) = 1 - \alpha^{1/n}.$$

On peut noter que ceci est à l'origine de la règle bien connue des "3 sur n " (the Rule of Three): en choisissant un risque $\alpha = 5\%$ et en approchant pour des valeurs de n assez grandes $1 - \alpha^{1/n}$ par $-\ln(\alpha) / n \approx 3/n$, on retrouve la règle du 3 sur n : l'observation de zéro défaut sur n unités permet d'affirmer à la confiance de 95% que $p \leq 3/n$. Encore une fois, donner une estimation de p requiert ici de se fixer une valeur pour la confiance alpha.

On peut aussi remarquer l'analogie avec le calcul précédent sur le *MTTF* : si le temps de test de chaque unité est identique (égal à C), obtenir un n -échantillon totalement censuré sur un temps total de test $T_{TT} = nC$ sans défaillance donne une valeur limite $1 - \alpha^{C/T_{TT}} = 1 - \alpha^{1/n} \approx 3/n$ pour la probabilité de défaillance avant C . Le cadre de Bernoulli correspond bien au problème exponentiel dans le cas d'un n -échantillon censuré à la même date C et pour lequel on cherche à estimer la probabilité $P(T \geq C)$. Le cadre des durées de vie permet de transférer le problème de recherche de probabilité pour des temps qui ne coïncident pas avec le temps d'observation en test.

4) Le choix du niveau de confiance

Les formules vues aux sections précédentes, dépendant du choix de la valeur de la confiance, il est difficile de fournir une estimation intrinsèquement meilleure que les autres, à moins de pouvoir justifier d'un choix "naturel" ou pour le moins justifiable du niveau de confiance. On pourrait même fournir comme estimation de $P(T \geq t)$ (par exemple), non pas une valeur numérique, mais une courbe des valeurs minimales de $P(T \geq t)$ en fonction de la confiance. Le graphique suivant présente les valeurs correspondantes de $P(T \geq t)$ minimum en fonction du niveau de confiance $1 - \alpha$, pour quatre horizons (t/T_{TT}) :



Cette courbe ne résout pas en elle-même la question du choix de la valeur de confiance. On peut rechercher alors des approches permettant de proposer une confiance précise.

4.1. Estimation de $P(T \geq t)$ par min-max de vraisemblance

Quel est le principe intrinsèque du maximum de vraisemblance ? Il s'agit bien d'écrire que "ce que l'on a observé est ce qui avait les plus grandes chances de se produire". Donc, à minima, cela se traduit par :

$$P(T \geq T_{TT}) \geq 0,5.$$

Donc $MTTF \geq -T_{TT}/\ln(0,5)$ et c'est la borne inférieure du $MTTF$ au niveau de confiance 0,5. On obtient alors (à la confiance 50%) :

$$P(T \geq t) \geq 0,5^{t/T_{TT}}.$$

4.2. Estimation de $P(T \geq t)$ via le "mode de la confiance" : "the Rule of Two"

Nous avons vu précédemment, qu'au niveau de confiance $1 - \alpha$, pour zéro défaillance observée sur le temps T_{TT} ,

$$MTTF \geq \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}.$$

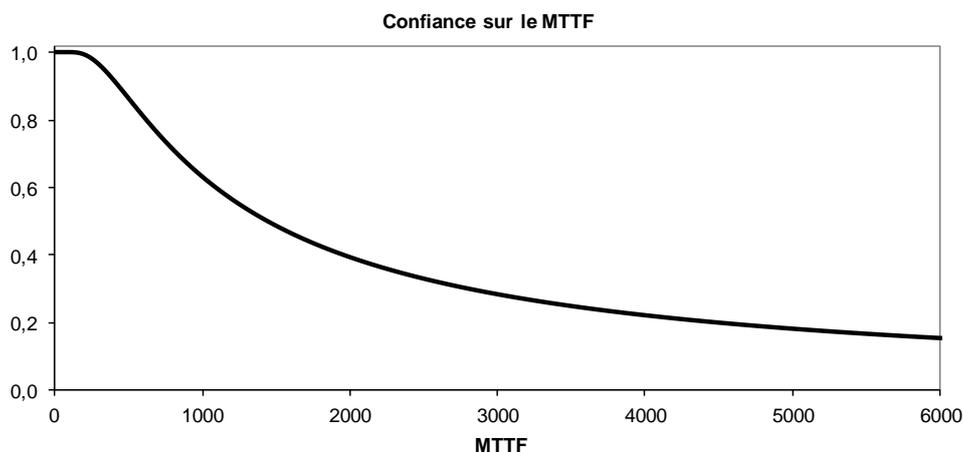
Pour le cas limite, on a :

$$MTTF = \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}.$$

En inversant cette fonction qui donne le $MTTF$ limite en fonction de la confiance voulue, on obtient :

$$1 - \alpha = 1 - \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right).$$

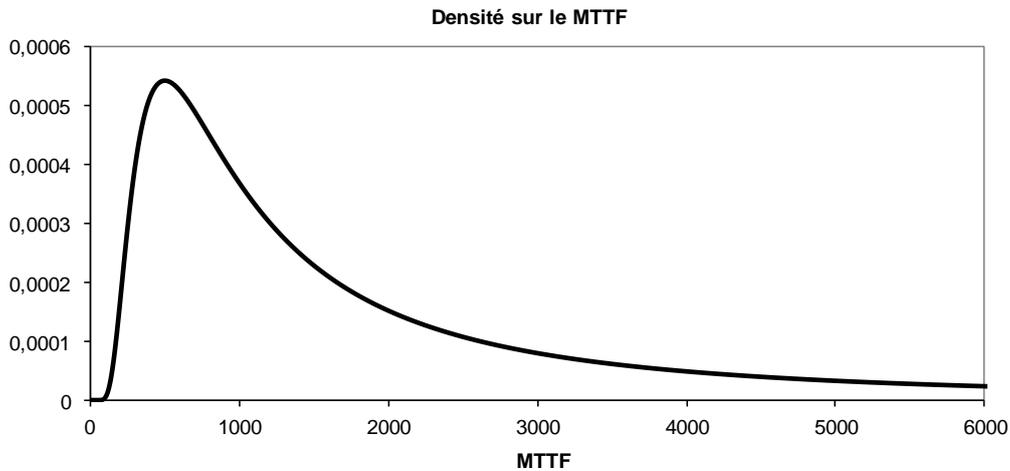
La confiance peut ainsi être vue comme une "fonction de probabilité" sur le $MTTF$. Par exemple, pour $T_{TT} = 1000$ heures, on obtient la courbe suivante :



La dérivée en $MTTF$ est une densité :

$$\frac{d}{dMTTF} \left[1 - \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right) \right] = f(MTTF) = \frac{T_{TT}}{MTTF^2} \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right).$$

Cette densité (qui est celle d'une loi Inverse-Gamma $G(1, T_{TT})$, voir Robert, 2007) a la forme suivante pour $T_{TT} = 1000$ heures :



On peut alors rechercher le mode de cette densité. Celui-ci vaut $\beta/(\alpha + 1)$ pour une loi Inverse-Gamma $G(\alpha, \beta)$. Aussi, on obtient l'estimation :

$$MTTF \geq T_{TT}/2.$$

On en déduit donc que :

$$P(T \geq t) \geq \exp(-2) \frac{t}{T_{TT}}.$$

La confiance en cette estimation vaut 86%.

NB : On peut remarquer que $-\ln(\exp(-2)) = 2$. Cela signifie que pour t petit devant T_{TT} (en pratique, inférieur à 10%), on a "the Rule of Two":

$$P(T \geq t) \geq 1 - \frac{2}{T_{TT}/t} \text{ ou encore, } P(T < t) \leq \frac{2}{T_{TT}/t}.$$

4.3. Estimation de $P(T \geq t)$ via l'intégration sur le MTTF (ou sur la confiance)

L'idée est ici que la confiance sur le MTTF agit comme une loi « a priori » sur le MTTF. On utilise alors cette loi pour estimer $P(T \geq t)$ par intégration sur le MTTF.

$$P(T \geq t) \geq \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{MTTF}\right) \frac{T_{TT}}{MTTF^2} \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right) dMTTF.$$

Ou de manière équivalente par intégration sur la confiance:

$$P(T \geq t) \geq \int_0^1 \alpha^{t/T_{TT}} d\alpha.$$

Après calcul, on trouve le simplissime résultat suivant :

$$P(T \geq t) \geq \frac{T_{TT}}{T_{TT} + t}.$$

Question : Existe-t-il un cadre bayésien dans lequel on retrouve une fonction de la forme :

$$\frac{T_{TT}}{T_{TT} + t} ?$$

La réponse est oui, si l'on suppose un a priori sur le taux de défaillance de type Gamma :

$$f(x, a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}.$$

Alors (Martz and Waller, 1977) la probabilité a priori de réussir un essai 0 défaillance pendant le temps t avec $a = 1$ et $b = T_{TT}$ est :

$$P(T \geq t) = \frac{T_{TT}}{T_{TT} + t}.$$

C'est la borne inférieure de l'estimation proposée. En réalité, un tel a priori correspond à un essai de durée T_{TT} au cours duquel une défaillance ($a = 1$) aurait été obtenue. Il est naturel de retrouver alors la borne inférieure de l'estimation dans le cas de zéro défaillance.

L'estimation de $P(T \geq t)$ obtenue par la méthode d'intégration sur la confiance ne nécessite pas le choix d'une confiance a priori. Pour autant, à cette estimation correspond un certain niveau de confiance. Du fait que toute estimation au niveau de confiance $1 - \alpha$ de $P(T \geq t)$ peut se mettre sous la forme $\alpha^{t/T_{TT}}$, on peut mettre en relation le niveau de confiance avec l'estimateur de la confiance intégrée. On obtient :

$$1 - \alpha = 1 - \left(\frac{T_{TT}}{T_{TT} + t} \right)^{T_{TT}/t}.$$

Cela signifie que le niveau de confiance dans l'estimation de $P(T \geq t)$ n'est pas constant et dépend de l'horizon t .

NB : Plus t est petit devant T_{TT} (en pratique, inférieure à 10%), plus la confiance se rapproche de $1 - \exp(-1)$. On a alors "the Rule of One" :

$$P(T \geq t) \geq 1 - \frac{1}{T_{TT}/t} \text{ ou encore, } P(T < t) \leq \frac{1}{T_{TT}/t}.$$

La confiance limite vaut alors 63%.

4.4. Estimation de $P(T \geq t)$ par méthode bayésienne

Il est bien connu que la loi Gamma est la loi conjuguée du modèle exponentiel : si l'on suppose un a priori sur le taux de défaillance λ de type Gamma : $prior(\lambda) \sim \Gamma(a, b)$ de densité $b^a / \Gamma(a) x^{a-1} e^{-bx}$ où a et b sont à fixer, alors la loi a posteriori de λ suite à une observation de K défaillances sur un temps total de test T_{TT} est : $posterior(\lambda) \sim \Gamma(a + K, b + T_{TT})$, ce qui donne pour une observation complètement censurée :

$$posterior(\lambda | K = 0) \sim \Gamma(a, b + T_{TT}).$$

Ceci permet de fournir des estimations basées sur la moyenne a posteriori $a / (b + T_{TT})$, le mode a posteriori $(a - 1) / (b + T_{TT})$, ou la médiane qui ne se calcule que numériquement

dans le cas général. Le choix crucial des paramètres a et b , qui interviennent ainsi dans le résultat de l'estimation, peut reposer sur l'interprétation suivante : la connaissance a priori sur λ est équivalente à a pseudo-défaillances observées pendant un pseudo temps de test b . Cela conduit à des méthodes simples d'*élicitations* de l'apriori mais n'enlève pas la multiplicité des résultats possibles selon les choix de a et b (comme le choix de la confiance dans les méthodes fréquentistes conduit à une multiplicité de solution d'estimation).

5) Discussion

Ce problème d'estimation, dont l'énoncé est particulièrement simple, nous montre la diversité des raisonnements possibles. Chaque raisonnement conduit à une estimation par intervalle très variable.

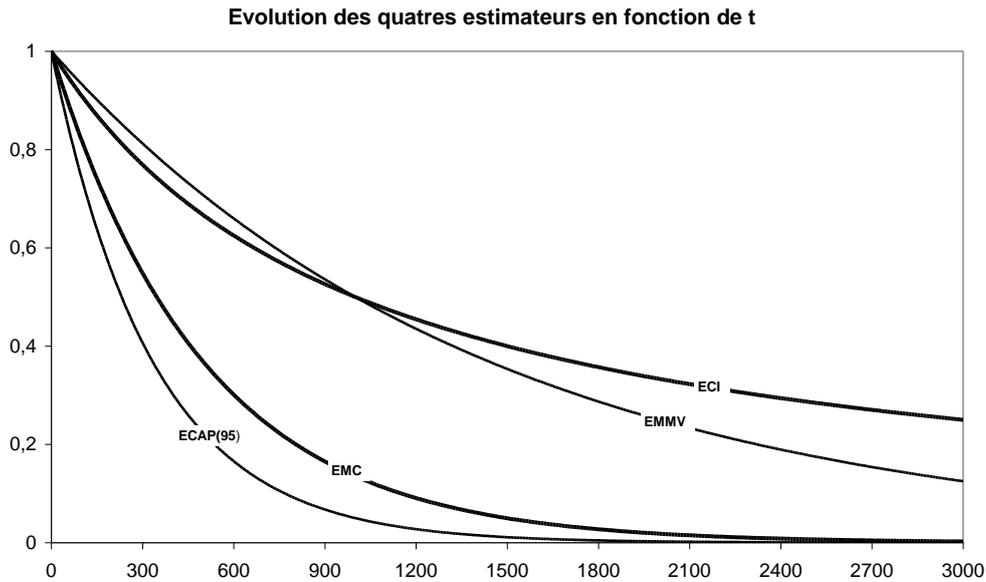
Pour résumer, les différentes estimations de $P(T \geq t)$ sont les suivantes :

Méthode	Estimation
Maximum de vraisemblance (EMV)	$P(T \geq t) \geq 1$
Estimateur avec confiance a priori (ECAP(95))	$P(T \geq t) \geq 0,05^{t/T_{TT}}$
Estimateur via le mode de confiance (EMC)	$P(T \geq t) \geq \exp(-2)^{t/T_{TT}}$
Estimateur via la confiance intégrée (ECI)	$P(T \geq t) \geq T_{TT}/(T_{TT} + t)$
Estimateur du Min-Max de vraisemblance (EMMV)	$P(T \geq t) \geq 0,5^{t/T_{TT}}$

Par exemple, pour $T_{TT} = 1000$ heures et $t = 600$ heures, les estimations sont les suivantes :

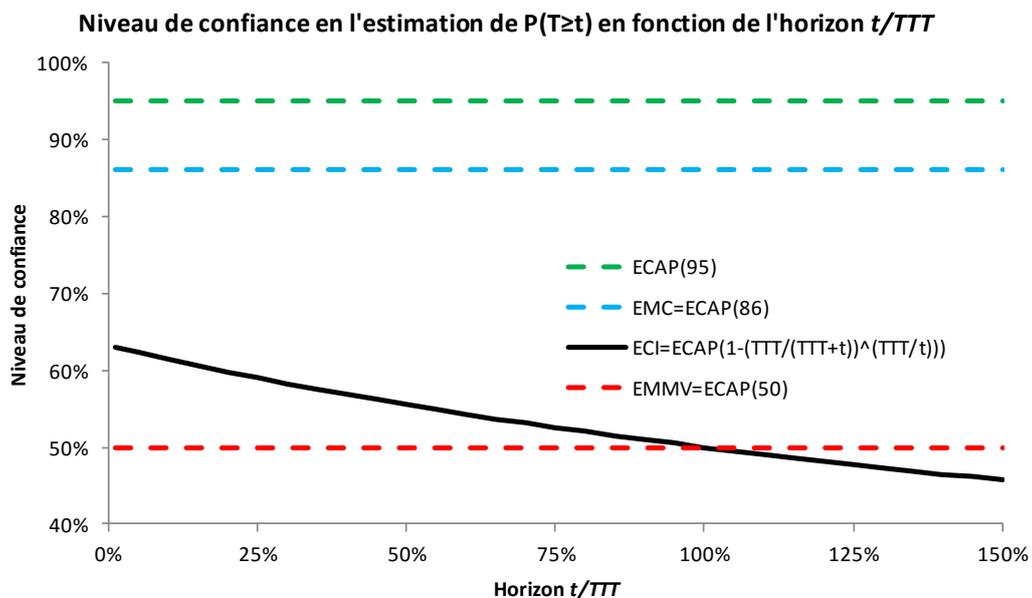
Méthode	$P(T \geq t) \geq$	Remarque
Maximum de vraisemblance (EMV)	1	L'"absurde"
Estimateur avec confiance a priori (ECAP(95))	0,17	Le "Rule of Three"
Estimateur via le mode de confiance (EMC)	0,30	Le "Rule of Two"
Estimateur via la confiance intégrée (ECI)	0,62	Le "pseudo-bayésien"
Estimateur du Min-Max de vraisemblance (EMMV)	0,66	L'"EMV intrinsèque"

Si l'on regarde l'évolution des estimations de $P(T \geq t)$ en fonction des valeurs de l'horizon t , pour T_{TT} fixé ici à 1000 heures, on obtient le graphique ci-dessous :



On remarque que les estimateurs de $P(T \geq t)$ par "min-max de vraisemblance" et par "mode de confiance" sont des estimateurs du type "confiance à priori (ECAP)". Les courbes d'estimation en fonction de l'horizon ne se croisent pas et sont chacune à un niveau de confiance constant. En revanche, l'estimateur via l'intégration de la confiance est atypique puisqu'il propose une estimation dont le niveau de confiance dépend de l'horizon. On peut alors noter que cet estimateur coupe l'estimateur du min-max de vraisemblance lorsque l'horizon est égal au temps total de test (T_{TT}).

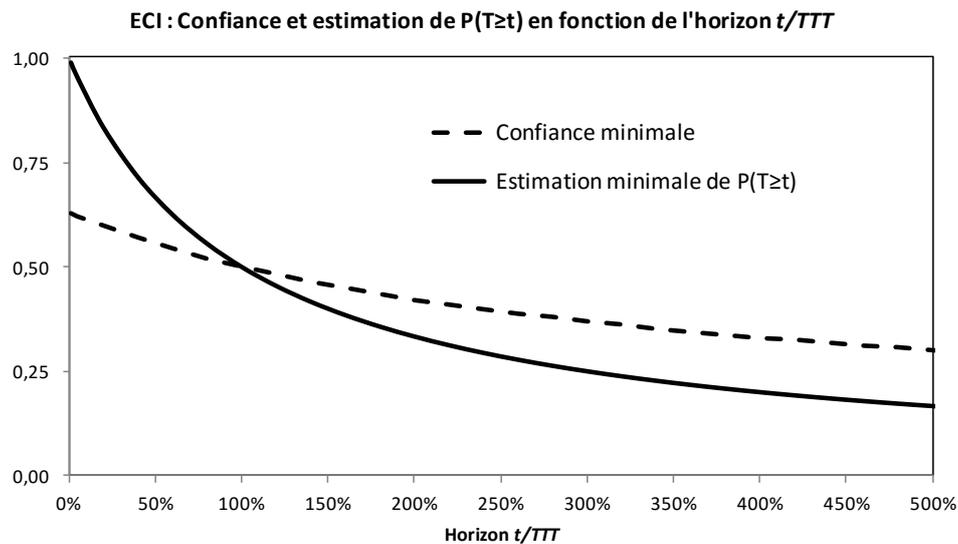
Afin de bien interpréter ces différents estimateurs, le graphique suivant montre les niveaux de confiance en fonction de l'horizon (t/T_{TT}).



On retrouve dans ce dernier graphique que pour un horizon de 100% (i.e. $t/T_{TT} = 1$), la confiance de l'estimateur via la confiance intégrée est de 50%.

La subjectivité du choix a priori d'une confiance reste finalement toujours un dilemme. Le choix d'un niveau de confiance a priori doit être guidé par des arguments raisonnables. Nous pensons en particulier qu'un bon estimateur doit conduire à estimer à $\frac{1}{2}$ la probabilité que la pièce fonctionne au moins le même temps que T_{TT} . De ce point de vue, les estimateurs ECI et EMMV sont pertinents.

Le caractère remarquable de la simplicité de l'estimateur ECI au regard de la complexité de sa construction, le fait que son niveau de confiance continue sa chute en dessous de 50% pour les valeurs $t > T_{TT}$ (domaine non observé), le fait que cet estimateur soit un compromis entre estimation et niveau de confiance nous fait pencher vers cet estimateur. Il se résume par le graphique suivant :



In fine, le choix reste délicat. Il faut seulement avoir une raison défendable de choisir l'un plutôt que l'autre... Les concepts d'EMC, d'ECI et EMMV sont généralisables aux lois de fiabilité de type log-location-scale, comme la loi de Weibull ou la loi Log-Normale si on considère connu le paramètre de forme : il suffit par exemple pour une loi $Y \sim W(\eta, \beta)$ de se ramener à la loi exponentielle de $Y = T^\beta$ pour transférer les calculs de probabilités sur la loi exponentielle et appliquer les résultats décrits.

6) Bibliographie

- [1] Agresti, A., Coull, B.A. (1998). *Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions*, The American Statistician, **52**, N°2, 119-126.
- [2] Bacha, M., Celeux, G., Idée, E., Lannoy, A., & Vasseur, D. (1998). Estimation de modèles de durées de vie fortement censurées. *Editions Eyrolles*.
- [3] Brown, L.D., Cai, T., DasGupta, A. (2001). *Interval estimation for the binomial distribution*, Statist. Sci., **16**, 101-133.
- [4] Clopper, C., Pearson, E.S. (1934). *The use of confidence of fiducial limits illustrated in the case of the binomial*, Biometrika, **26**, 404-413.

- [5] Coccozza-Thivent C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer, Collection Mathématiques et Applications, n°28.
- [6] Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. 2nd edition, *John Wiley and Sons, Hoboken*.
- [7] Martz, H. F., Jr. And Waller, R. A. (1977). *A Bayesian Zero-Failure (BAZE)*. Reliability Demonstration Testing Procedure for Components of Nuclear Reactor Safety Systems. *Los Alamos Scientific Lab N Mex*.
- [8] Robert, C. (2007). *The Bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation*. *Springer Science & Business Media*.