



**HAL**  
open science

## Les fonctions elliptiques revisitées

Jean-Christophe Feauveau

► **To cite this version:**

| Jean-Christophe Feauveau. Les fonctions elliptiques revisitées. 2017. hal-01447504

**HAL Id: hal-01447504**

**<https://hal.science/hal-01447504v1>**

Preprint submitted on 26 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les fonctions elliptiques revisitées

Jean-Christophe Feauveau<sup>1</sup>

27 janvier 2017

ABSTRACT. Les fonctions elliptiques sont des objets mathématiques largement étudiés et standardisés. Les deux approches usuelles sont dues à Jacobi et Weierstrass.

À partir d'une intégrale de contour dont la forme a permis d'unifier nombre de formules sommatoires (d'Euler-MacLaurin, de Poisson, de Voronoï ou du Cercle), nous allons retrouver l'intégralité des fonctions elliptiques, qu'elles soient proposées sous la forme de Jacobi ou de Weierstrass. Mais à une translation près dans leur forme naturelle.

Ce qui pouvait apparaître comme un défaut conduit, en fait, à une renormalisation des fonctions elliptiques permettant de déterminer de manière assez simple des représentations en somme de séries de Fourier et des factorisations de ces fonctions.

KEY WORDS. fonctions elliptiques, intégrales de contour, séries de Fourier, factorisations.

Classification A.M.S. 2010 : 33E05, 11G16, 11J89.

## Introduction

Depuis Abel, Jacobi et Weierstrass, les bases de la théorie des fonctions elliptiques sont bien établies. Abel procède par une inversion de longueur d'arc d'ellipse (ce qui justifie la dénomination de ces fonctions), Jacobi introduit les fonctions theta pour définir les fonctions elliptiques, enfin Weierstrass définit celles-ci à l'aide de séries qui livrent de manière immédiate la double périodicité de telles fonctions.

À la suite de Weierstrass, la présentation moderne des fonctions elliptiques repose sur deux piliers : le caractère méromorphe et la double périodicité. Cette dernière propriété entraîne naturellement des représentations de type trigonométrique bien connues pour les fonctions de Jacobi - voir [Halp], [Whit] et [Armi] - mais pas pour les fonctions de Weierstrass.

Nous proposons dans cet article un cadre unifié pour obtenir, par un même formalisme, les fonctions elliptiques de Weierstrass et de Jacobi. Suivant les idées développées dans [Feau], un calcul d'intégrale dans le champ complexe donnera un accès direct aux développements de Fourier des fonctions elliptiques. Nous déduisons aussi des représentations intégrales, des représentations en séries de Fourier ainsi que des factorisations de ces fonctions elliptiques renormalisées.

## I – Étude d'un cas particulier

Afin de motiver l'ensemble de l'étude, commençons par un cas particulier.

Ainsi que nous l'établirons à la partie III, la fonction  $H(s) = \frac{s}{\sin(s)\sin(is)}$  décroît assez rapidement à l'infini lorsque l'on évite ses pôles.

Précisément, pour certaines suites de chemins  $\gamma_n$ , qui finissent par englober  $\mathbb{C}$  à la limite, on établira

$$\forall z \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + i] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} \frac{s}{\sin(s)\sin(is)} e^{2isz} ds = 0.$$

---

1. Jean-Christophe Feauveau,  
Professeur en classes préparatoires au lycée Bellevue,  
135, route de Narbonne BP. 44370, 31031 Toulouse Cedex 4, France,  
email : Jean-Christophe.Feauveau@ac-toulouse.fr

Les pôles de  $H$  sont en  $0, \pi\mathbb{Z}^*$  et  $i\pi\mathbb{Z}^*$ , et un calcul aisé de résidu donne

$$\forall z \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + i] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \frac{\cos(2n\pi z)}{\operatorname{sh}(n\pi)} = -\frac{1}{4\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \frac{\operatorname{ch}(2n\pi z)}{\operatorname{sh}(n\pi)}.$$

Le caractère 1 périodique et  $i$  périodique des deux membres de cette égalité permet de prolonger de manière holomorphe la fonction

$$\tilde{\varphi}(z) = \pi + 4\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \frac{\cos(2n\pi z)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$$

sur  $|Re(z)| < \frac{1}{2}, |Im(z)| < \frac{1}{2}$  puis  $\mathbb{C} - (\frac{1+i}{2} + \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  par double périodicité :  $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \tilde{\varphi}(z + n + im) = \tilde{\varphi}(z)$ .

En primitivant 3 fois  $\tilde{\varphi}$ , la singularité en  $\frac{1+i}{2}$  devient artificielle : les pôles de  $\tilde{\varphi}$  sont d'ordre au plus 3. Il s'agit donc d'une fonction elliptique (Cf. II pour le rappel de la définition et les propriétés élémentaires de ces fonctions).

Par périodicité, on déduit l'existence d'un unique pôle sur la maille élémentaire  $[0, 1] + i[0, 1]$ . La parité de  $\tilde{\varphi}$  permet aussi de conclure que les pôles sont doubles et placés en  $\Lambda = \frac{1+i}{2} + \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ . Il s'agit d'une fonction elliptique de type Weierstrass. La parité et la nullité en 0 de  $\tilde{\varphi}$  permet alors d'affirmer l'existence de  $\alpha \in \mathbb{C}$  (on montrera que  $\alpha = 1$ ) telle que

$$\tilde{\varphi}(z) = \alpha \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

On obtient ainsi un premier résultat naturel : le développement de Fourier d'une fonction de type Weierstrass, ce qui n'est pas courant dans la littérature. La raison vient certainement du choix usuel de placer le pôle en 0. Nous discuterons par la suite de l'utilité de la translation de  $\frac{1+i}{2}$  opérée ici, c'est un point essentiel.

## II – Notations et généralités sur les fonctions elliptiques

Étant donnés  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , deux nombres complexes non nuls tels que  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ , on note  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  le réseau  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2} = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ . Les réseaux  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  et  $\Lambda_{\omega_1, -\omega_2}$  étant identiques, on peut imposer  $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ , ce que nous ferons systématiquement par la suite.

On note  $\Delta_{\omega_1, \omega_2} = \omega_1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + \omega_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , c'est le pavé élémentaire de base et toute translation sera aussi nommé pavé élémentaire. On remarque que  $(a + \Delta_{\omega_1, \omega_2})_{a \in \Lambda_{\omega_1, \omega_2}}$  est une partition de  $\mathbb{C}$ .

On note enfin  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , puis  $\tilde{\Delta}_{\omega_1, \omega_2} = \Delta_{\omega_1, \omega_2} - \{-\omega_0\}$ .

Étant donnés  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , deux nombres complexes non nuls, tels que  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$  (et donc  $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ ), on dit que  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est une fonction elliptique sur le réseau  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  si

- (i)  $f$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ ,
- (ii)  $f$  est doublement périodique, de périodes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

La théorie bien connue des fonctions elliptiques donne les résultats suivants :

- (i) Si  $f$  est elliptique et holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , alors elle est constante.
- (ii) Le nombre de pôles et de zéros dans un pavé élémentaire est fini. De plus, la somme des résidus se trouvant dans un pavé élémentaire n'ayant pas de pôle sur sa frontière est nulle : si  $(a_i)_{i \in I}$  sont les pôles de  $f$  dans  $a + \Delta_{\omega_1, \omega_2}$ , tous hors de la frontière, alors :

$$\sum_{i \in I} Res(f, a_i) = 0.$$

(iii) La somme des multiplicités des pôles (comptées négativement) et des zéros (comptées positivement) de  $f$  dans un pavé élémentaire est nul.

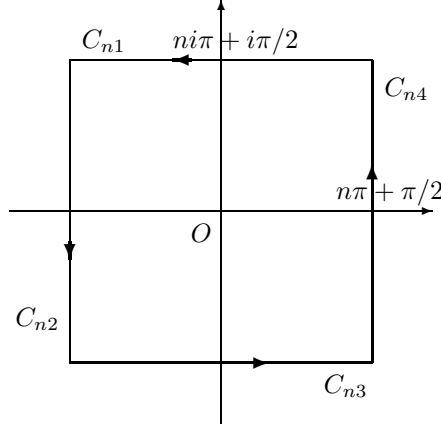
Pour faire court, (i) est une conséquence du théorème de Liouville, (ii) puis (iii) sont obtenus en calculant les intégrales de  $f$  puis  $f'/f$  sur la frontière d'un pavé élémentaire ne rencontrant pas de pôle ou de zéro sur sa frontière, celles-ci étant nulles par symétrie. On pourra, par exemple, consulter [Whit] ou [Armi] sur ces points.

Notons enfin que  $z \mapsto f(z)$  est elliptique sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  si et seulement si  $z \mapsto f(\omega_1 z)$  est elliptique sur  $\Lambda_{1, \tau}$ , avec  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ .

### III - La fonction de Weierstrass modifiée sur $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$

Pour généraliser les résultats de la partie I, on considère la fonction  $H(s) = \frac{s}{\sin(\omega_1 s) \sin(\omega_2 s)}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le chemin  $C_n$  reliant par des segments, et dans le sens trigonométrique, les points  $(n + \frac{1}{2})\pi(\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1})$ ,  $(n + \frac{1}{2})\pi(-\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1})$ ,  $(n + \frac{1}{2})\pi(-\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})$  et  $(n + \frac{1}{2})\pi(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})$ . Par ce choix, le chemin passe exactement "entre" les pôles de  $H$  sur les axes  $\omega_1 \mathbb{R}$  et  $\omega_2 \mathbb{R}$ . Les quatre segments sont notés respectivement  $C_{nj}$ ,  $1 \leq j \leq 4$  (sur la figure  $\omega_1 = 1$  et  $\omega_2 = i$ ) :



**Théorème 1 :** Pour  $z \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\omega_1 + ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\omega_2$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_n} H(s) e^{2isz} ds = 0$ .

*Démonstration :* Vérifions le résultat pour le segment  $C_{n,1}$ , les trois autres cas s'en déduisent par symétrie.

Montrons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[(n+\frac{1}{2})\pi(-1-\tau^{-1}), (n+\frac{1}{2})\pi(1-\tau^{-1})]} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} e^{2isz} ds = 0$ , ce qui donnera le résultat par changement de variables  $\tau = \omega_2/\omega_1$ , pour  $z \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau$ .

Soit  $z = a + b\tau$ ,  $(a, b) \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$ . Pour  $s = u + (n + \frac{1}{2})\pi\tau^{-1}$ , avec  $-(n + \frac{1}{2})\pi \leq u \leq (n + \frac{1}{2})\pi$ ,

$$\left| \frac{e^{2isz}}{\sin(s)\sin(\tau s)} \right| = \left| \frac{e^{2ias}}{\sin(s)} \right| \left| \frac{e^{2ibs\tau}}{\sin(\tau s)} \right| = \left| \frac{e^{2ia(n+\frac{1}{2})\pi\tau^{-1}}}{\sin(u + (n + \frac{1}{2})\pi\tau^{-1})} \right| \left| \frac{e^{2ibu\tau}}{\cos(\tau u)} \right|.$$

On pose  $\tau^{-1} = \alpha + i\beta$  (notons que  $\beta < 0$ ) et

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{2ia(n+\frac{1}{2})\pi\tau^{-1}}}{\sin(u + (n + \frac{1}{2})\pi\tau^{-1})} \right| &= \left| \frac{e^{-2a(n+\frac{1}{2})\pi\beta}}{\sin((u + (n + \frac{1}{2})\pi\alpha) + i(n + \frac{1}{2})\pi\beta)} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\pi\beta + i(u+(n+\frac{1}{2})\pi\alpha)}}{\text{sh}((n + \frac{1}{2})\pi\beta - i(u + (n + \frac{1}{2})\pi\alpha))} \right| e^{(1-2a)(n+\frac{1}{2})\pi\beta}. \end{aligned}$$

La fonction  $v \mapsto \left| \frac{e^v}{\operatorname{sh}(v)} \right|$  est bornée sur  $|Re(v)| > 1$ , alors que  $u \mapsto \left| \frac{e^{2ibu\tau}}{\cos(\tau u)} \right|$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $|2b| < 1$ . Il en résulte l'existence de  $M > 0$  ne dépendant que de  $z$  et  $\tau$  tel que  $\left| \frac{e^{2isz}}{\sin(s)\sin(\tau s)} \right| \leq M e^{(1-2a)(n+\frac{1}{2})\pi\beta}$ , et le résultat s'en déduit.

On est donc amené à intégrer sur des segments de direction  $\omega_1$  et  $\omega_2$  passant exactement entre les pôles de  $H$  et à faire un calcul de résidus.

Les pôles de  $H$  sont tous simples :

- (i)  $s = 0$ , et le résidu vaut  $\frac{1}{\omega_1\omega_2}$ .
- (ii)  $s = n\pi/\omega_1$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ , et le résidu vaut  $\frac{(-1)^n n\pi}{\omega_1^2 \sin(n\pi\omega_2/\omega_1)} e^{2in\pi z/\omega_1}$ .
- (iii)  $s = n\pi/\omega_2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ , et le résidu vaut  $\frac{(-1)^n n\pi}{\omega_2^2 \sin(n\pi\omega_1/\omega_2)} e^{2in\pi z/\omega_2}$ .

Le calcul de résidus proposé au théorème 1 donne finalement :  $\forall z \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\omega_1 + ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\omega_2$ ,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_2/\omega_1)} \cos(2nz\pi/\omega_1) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_1/\omega_2)} \cos(2nz\pi/\omega_2).$$

En notant  $\Theta(z)$  cette valeur commune, le caractère périodique de chacun des membres de l'égalité permet de prolonger  $\Theta$  de manière holomorphe sur  $|Im(z/\omega_1)| < \frac{1}{2}Im(\omega_2/\omega_1)$ ,  $|Im(z/\omega_2)| < -\frac{1}{2}Im(\omega_1/\omega_2)$  puis  $\mathbb{C} - (\omega_0 + \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$  par double périodicité :  $\Theta(z + \omega_1 n + \omega_2 m) = \Theta(z)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ .

Par triple intégration sur  $\tilde{\Delta}_{\omega_1, \omega_2}$ , on constate que les pôles sont tous doubles à résidus nuls et placés sur le réseau translaté  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}^* = \omega_0 + \Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ , avec  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

D'après le théorème de Liouville, à une constante multiplicative et une constante additive près, il s'agit de

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\omega_1, \omega_2}(z) &= \sum_{a \in \Lambda_{\omega_1, \omega_2}^*} \left( \frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + (n + \frac{1}{2})\omega_1 + (m + \frac{1}{2})\omega_2)^2} - \frac{1}{((n + \frac{1}{2})\omega_1 + (m + \frac{1}{2})\omega_2)^2}. \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{\varphi}_{\omega_1, \omega_2}$  est une fonction méromorphe qui présente des pôles doubles à résidus nuls sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}^*$ , ainsi que des zéros doubles sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ . C'est la fonction elliptique qui apparaît naturellement ici et qui est étudiée à présent.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER DE  $\tilde{\varphi}_{\omega_1, \omega_2}$

Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\tilde{\varphi}_{\omega_1, \omega_2}(z) = \alpha(\Theta(z) - \Theta(0))$ .

Déterminons  $\alpha$  en étudiant  $\Theta(z) = \frac{1}{\alpha(z - \omega_0)^2} + O(1)$  au voisinage de  $\omega_0$ .

En développant, on constate que  $\left| (-1)^n \frac{\cos(2n\pi z/\omega_1)}{\sin(n\pi\omega_2/\omega_1)} + i e^{-2in\pi(z-\omega_0)/\omega_1} \right| e^{n\pi Im(\omega_2/\omega_1)}$  est majoré in-

dépendamment de  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in [0, \frac{1}{2}[\omega_1 + [0, \frac{1}{2}[\omega_2$ . On pose  $\psi(z) = -i \frac{\omega_2}{\omega_1} \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-2in\pi(z-\omega_0)/\omega_1}$  et donc

$\Theta - \psi$  est borné sur  $[0, \frac{1}{2}[\omega_1 + [0, \frac{1}{2}[\omega_2$ .

Un calcul direct montre que  $\psi(z) = -i\frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{e^{-2i\pi(z-\omega_0)/\omega_1}}{(1 - e^{-2i\pi(z-\omega_0)/\omega_1})^2}$  et  $\lim_{z \rightarrow \omega_0} (z - \omega_0)^2 \psi(z) = \frac{i\omega_1\omega_2}{4\pi^2}$ .

On déduit  $\tilde{\wp}(z) = -i\frac{4\pi^2}{\omega_1\omega_2}(\Theta(z) - \Theta(0))$ .

Ainsi  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  est paire, admet un pôle double en  $\omega_0$ , s'annule deux fois en 0 et il vient :

$$\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z) = -\frac{i4\pi^2}{\omega_1^2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_2/\omega_1)} \cos(2n\pi \frac{z}{\omega_1}) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_2/\omega_1)} \right) \quad (1)$$

$$= \frac{i4\pi^2}{\omega_2^2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_1/\omega_2)} \cos(2n\pi \frac{z}{\omega_2}) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\omega_1/\omega_2)} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{\sin((z - \omega_0 - \omega_2 n)\pi/\omega_1)^2} - \frac{1}{\sin((\omega_0 + \omega_2 n)\pi/\omega_1)^2} \right). \quad (3)$$

$$= \frac{\pi^2}{\omega_2^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{\sin((z - \omega_0 - \omega_1 n)\pi/\omega_2)^2} - \frac{1}{\sin((\omega_0 + \omega_1 n)\pi/\omega_2)^2} \right). \quad (4)$$

Les deux premières égalités sont valable pour  $|Im(z/\omega_1)| < \frac{1}{2}Im(\omega_2/\omega_1)$  et  $|Im(z/\omega_2)| < -\frac{1}{2}Im(\omega_1/\omega_2)$  respectivement. Les deux dernières proviennent de la relation d'Euler  $\sin(z)^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$  et sont valables sur  $\mathbb{C} - \Lambda_{\omega_1, \omega_2}^*$ .

À noter que dans le cas particulier étudié à la partie I, la symétrie de la fonction donne une formule

explicite pour la constante  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(in\pi)} = -i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\text{sh}(n\pi)} = \frac{-i}{4\pi}$ .

LIEN AVEC LA FONCTION DE WEIERSTRASS

On rappelle la définition de la fonction de Weierstrass :

$$\wp_{\omega_1, \omega_2}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(z + n\omega_1 + m\omega_2)^2} - \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^2}. \quad (5)$$

Il vient immédiatement :

$$\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z) = \wp_{\omega_1, \omega_2}(z + \omega_0) - \wp_{\omega_1, \omega_2}(\omega_0).$$

Notons les différences :

- (i) Les pôles de  $\wp_{\omega_1, \omega_2}$  sont localisés sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  alors que ceux de  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  le sont sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}^*$ .
- (ii) Les zéros de  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  sont localisés sur  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ , alors que ceux de  $\wp_{\omega_1, \omega_2}$  sont inconnus.
- (iii) Pour  $\wp_{\omega_1, \omega_2}$ , on particularise le pôle en 0 ce qui disymétrise la fonction alors que  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  est par nature symétrique.
- (iv) Le choix de normalisation de  $\wp_{\omega_1, \omega_2}$  est étroitement lié à la paramétrisation d'une famille précise de cubiques. Nous verrons que le choix retenu pour  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  permet de paramétrer une autre famille de cubiques, elle aussi importante.

#### IV - Les fonctions de Weierstrass sur le réseau réduit $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$

Comme noté précédemment, l'étude des fonctions elliptiques sur un réseau  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  se ramène à l'étude sur le réseau  $\Lambda_{1, \tau} = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Ceci sera largement exploité pour l'étude de formes modulaires.

Résumons les connaissances concernant les fonctions  $\wp_\tau = \wp_{1, \tau}$  et  $\tilde{\wp}_\tau = \tilde{\wp}_{1, \tau}$  sur le réseau  $\Lambda_\tau$ .

$$\wp_\tau(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(z+n+m\tau)^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \Lambda_\tau \quad (6)$$

et

$$\tilde{\wp}_\tau(z) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(z+(n+\frac{1}{2})+(m+\frac{1}{2})\tau)^2} - \frac{1}{((n+\frac{1}{2})+(m+\frac{1}{2})\tau)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - (\frac{1+\tau}{2} + \Lambda_\tau). \quad (7)$$

Ces fonctions sont reliées par  $\tilde{\wp}_\tau(z) = \wp_\tau(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) - \wp_\tau(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})$ .

• LA FONCTION  $\tilde{\wp}$

- L'intégrale de l'équation fonctionnelle :  $\forall z \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau$ ,

$$\int_{C_\infty} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} e^{2isz} ds = 0.$$

- Le calcul de résidus :  $\forall z \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau$ ,

$$\frac{1}{2\pi} + \tau \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\tau)} \cos(2nz\pi) + \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi/\tau)} \cos(2nz\pi/\tau) = 0.$$

- Les représentations de Fourier :  $\forall z = \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\tilde{\wp}_\tau(z) = 4i\pi^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\tau)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi\tau)} \cos(2n\pi z) \right) \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$= \frac{4i\pi^2}{\tau^2} \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi/\tau)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sin(n\pi/\tau)} \cos(2n\pi z/\tau) \right) \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

- Les représentations intégrales :  $\forall z = \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\wp}_\tau(z) &= -8i\pi^2 \int_{C_1} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} (\cos(2sz) - 1) ds && \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \\ &= 8i\pi^2 \int_{C_\tau} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} (\cos(2sz) - 1) ds && \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ici,  $C_1$  est un chemin orienté qui englobe les pôles  $n\pi, n \in \mathbb{N}^*$ , et  $C_\tau$  les pôles  $n\frac{\pi}{\tau}, n \in \mathbb{N}^*$ .

• LA FONCTION  $\wp$

- L'intégrale de l'équation fonctionnelle :  $\forall z \in ]0, 1[ + ]0, 1[\tau$ ,

$$\int_{C_\infty} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} e^{is(2z-1-\tau)} ds = 0.$$

- Le calcul de résidus :  $\forall z \in ]0, 1[ + ]0, 1[\tau$ ,

$$\frac{1}{2\pi} + \tau \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sin(n\pi\tau)} \cos(n\pi(2z-\tau)) + \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sin(n\pi/\tau)} \cos(n(2z-1)\pi/\tau) = 0.$$

- Les représentations de Fourier :  $\forall z = \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}\wp_\tau(z) &= c_\tau - 4i\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sin(n\pi\tau)} \cos(n\pi(2z - \tau)) && \text{pour } \beta \in ]0, 1[ \\ &= d_\tau + \frac{4i\pi^2}{\tau^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sin(n\pi/\tau)} \cos(n(2z - 1)\pi/\tau) && \text{pour } \alpha \in ]0, 1[.\end{aligned}$$

Les termes  $c_\tau$  et  $d_\tau$  ne dépendant que de  $\tau$  et vérifient  $c_\tau - d_\tau = -\frac{2}{\tau}$ .

- Les représentations intégrales :  $\forall z = \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}\wp_\tau(z) &= c_\tau - 8i\pi^2 \int_{C_1} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} \cos(s(2z - 1 - \tau)) ds && \text{pour } \beta \in ]0, 1[ \\ &= d_\tau + 8i\pi^2 \int_{C_1} \frac{s}{\sin(s)\sin(\tau s)} \cos(s(2z - 1 - \tau)) ds. && \text{pour } \alpha \in ]0, 1[.\end{aligned}$$

Ici,  $C_1$  est un chemin orienté qui englobe les pôles  $n\pi, n \in \mathbb{N}^*$ , et  $C_\tau$  les pôles  $n\frac{\pi}{\tau}, n \in \mathbb{N}^*$ .

## V - Les fonctions de Jacobi

Précédant historiquement les fonctions de Weierstrass, les fonctions elliptiques de Jacobi constituent l'autre famille standard de fonctions elliptiques.

Nous renvoyons à [Armi] et [Whit] pour les définitions de ces fonctions. Notons simplement que les périodes sont liées à deux réels  $K$  et  $K'$  (définies eux-mêmes à l'aide d'un paramètre  $k$ ), que l'on pose  $\tau = iK'/K$  et  $q = e^{i\pi\tau}$  (attention, ce n'est pas la convention usuelle dans le cadre des formes modulaires). Pour faire le lien avec ce qui suit, on trouve les développements de Fourier de  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  et  $\text{dn}$  (avec la notation en  $q$ ) dans [Armi] et [Whit].

L'approche développée dans la partie III avec le calcul  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_n} H(s) e^{2isz} ds = 0$  reste valable pour obtenir les fonctions de Jacobi. Les démonstrations de convergence sont similaires à celles développées en partie III et seront omises. Dans tous les cas, après une transformation  $z \mapsto \alpha z$  où  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la double périodicité se ramène aux périodes  $(1, 2\tau)$  ou  $(2, 2\tau)$  avec  $\text{Im}(\tau) > 0$ . A l'instar du choix de réseau  $\Lambda_\tau$  à la section précédente, la forme réduite sera déterminante pour l'étude de formes modulaires.

### • LA FONCTION $\text{dn}$

- L'intégrale de l'équation fonctionnelle :  $\forall z \in \frac{1}{2} + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$\int_{C_\infty} \frac{1}{\sin(s)\cos(\tau s)} e^{is(2z-1)} ds = 0.$$

- Le calcul de résidus :  $\forall z \in \frac{1}{2} + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi z)}{\cos(n\pi\tau)} - \frac{2}{\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((n + \frac{1}{2})\pi(2z - 1)/\tau)}{\sin((n + \frac{1}{2})\pi/\tau)} = 0.$$

- Les représentations de Fourier :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$



$$DN(z, \tau) = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn}(2Kz) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos(2n\pi z)}{1 + q^{2n}} \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi z)}{\cos(n\pi\tau)} \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{2}{\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((n + \frac{1}{2})\pi(2z - 1)/\tau)}{\sin((n + \frac{1}{2})\pi/\tau)} \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (12)$$

- Les représentations intégrales :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$DN(z, \tau) = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn}(2Kz) = 1 + 4i\pi \int_{C_1} \frac{1}{\sin(s)\cos(\tau s)} \cos(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2}$$

$$= -4i\pi \int_{C_\tau} \frac{1}{\sin(s)\cos(\tau s)} \cos(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

A noter que  $C_\tau$  englobe les pôles  $(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\tau}, n \in \mathbb{N}$ , et  $C_1$  les pôles  $n\pi, n \in \mathbb{N}^*$ .

• LA FONCTION  $\operatorname{sn}$

- L'intégrale de l'équation fonctionnelle :  $\forall z \in \frac{1}{2} + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$\int_{C_\infty} \frac{1}{\cos(s)\sin(\tau s)} e^{is(2z-1)} ds = 0.$$

- Le calcul de résidus :  $\forall z \in \frac{1}{2} + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ + ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi(2z - 1)/\tau)}{\cos(n\pi/\tau)} - 2\tau \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n + 1)\pi z)}{\sin((n + \frac{1}{2})\pi\tau)} = 0.$$

- Les représentations de Fourier :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$SN(z, \tau) = \frac{Kk}{2\pi} \operatorname{sn}(2Kz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \sin((2n + 1)\pi z)}{1 - q^{2n+1}} \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n + 1)\pi z)}{\sin((n + \frac{1}{2})\pi\tau)} \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$= \frac{i}{4\tau} + \frac{i}{2\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi(2z - 1)/\tau)}{\cos(n\pi/\tau)} \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (15)$$

- Les représentations intégrales :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$SN(z, \tau) = \frac{Kk}{2\pi} \operatorname{sn}(2Kz) = \pi \int_{C_1} \frac{1}{\cos(s)\sin(\tau s)} \cos(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2}$$

$$= \frac{i}{4\tau} - \pi \int_{C_\tau} \frac{1}{\cos(s)\sin(\tau s)} \cos(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

A noter que  $C_1$  englobe les pôles  $(n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$  et  $C_\tau$  les pôles  $n\pi/\tau, n \in \mathbb{N}^*$ .

• LA FONCTION  $\text{cn}$

- L'intégrale de l'équation fonctionnelle :  $\forall z \in \frac{1}{2}+] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[+ - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$\int_{C_\infty} \frac{1}{\cos(s)\cos(\tau s)} e^{is(2z-1)} ds = 0.$$

- Le calcul de résidus :  $\forall z \in \frac{1}{2}+] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[+ - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tau,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((n + \frac{1}{2})\pi(2z - 1)/\tau)}{\cos((n + \frac{1}{2})\pi/\tau)} - \tau \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n + 1)\pi z)}{\cos((n + \frac{1}{2})\pi\tau)} = 0.$$

- Les représentations de Fourier :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$CN(z, \tau) = \frac{Kk}{2\pi} \text{cn}(2Kz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \cos((2n+1)\pi z)}{1 + q^{2n+1}} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi z)}{\cos((n + \frac{1}{2})\pi\tau)} \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((n + \frac{1}{2})\pi(2z - 1)/\tau)}{\cos((n + \frac{1}{2})\pi/\tau)} \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (18)$$

- Les représentations intégrales :  $\forall z = \frac{1}{2} + \alpha + \beta\tau, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$$CN(z, \tau) = \frac{Kk}{2\pi} \text{cn}(2Kz) = i\pi \int_{C_1} \frac{1}{\cos(s)\cos(\tau s)} \sin(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\beta| < \frac{1}{2}$$

$$= -i\pi \int_{C_\tau} \frac{1}{\cos(s)\cos(\tau s)} \sin(s(2z - 1)) ds \quad \text{pour } |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

A noter que  $C_1$  englobe les pôles  $(n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$  et  $C_\tau$  les pôles  $(n + \frac{1}{2})\pi/\tau, n \in \mathbb{N}$ .

• LES FONCTIONS  $\text{nd}, \text{cd}$  ET  $\text{sd}$

Le lecteur vérifiera sans difficulté que l'on obtient de même les développements en séries de Fourier et des représentations intégrales pour les autres fonctions de Jacobi. Pour une application aux formes modulaires, les fonctions  $\text{nd}, \text{cd}$  et  $\text{sd}$  renormalisées seront particulièrement utiles. On considère respectivement :

$$\int_{C_\infty} \frac{1}{\sin(s)\cos(\tau s)} e^{2isz} ds = 0, \quad \int_{C_\infty} \frac{1}{\cos(s)\sin(\tau s)} e^{2isz} ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\infty} \frac{1}{\cos(s)\cos(\tau s)} e^{2isz} ds = 0,$$

c'est à dire, en changeant  $2z - 1$  par  $2z$  dans les intégrales précédentes. Comme précédemment, les représentations de Fourier suivantes sont valables sur  $z = \alpha + \beta\tau$  pour  $|\beta| < \frac{1}{2}$  puis  $|\alpha| < \frac{1}{2}$ . Il vient :

$$ND(z, \tau) = \frac{2k'K}{\pi} \operatorname{nd}(2Kz) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^n \cos(2n\pi z)}{1 + q^{2n}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\pi z)}{\cos(n\pi\tau)} \quad (19)$$

$$= \frac{2}{\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi z/\tau)}{\sin((n+\frac{1}{2})\pi/\tau)} \quad (20)$$

$$CD(z, \tau) = \frac{Kk}{2\pi} \operatorname{cd}(2Kz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}} \cos((2n+1)\pi z)}{1 - q^{2n+1}} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi z)}{\sin((n+\frac{1}{2})\pi\tau)} \quad (21)$$

$$= \frac{i}{4\tau} + \frac{i}{2\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\pi z/\tau)}{\cos(n\pi/\tau)} \quad (22)$$

$$SD(z, \tau) = \frac{Kk'k'}{2\pi} \operatorname{sd}(2Kz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}} \sin((2n+1)\pi z)}{1 + q^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi z)}{\cos((n+\frac{1}{2})\pi\tau)} \quad (23)$$

$$= -\frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi z/\tau)}{\cos((n+\frac{1}{2})\pi/\tau)} \quad (24)$$

## V - Factorisation des fonctions elliptiques

Les zéros et les pôles des fonctions elliptiques étudiées précédemment sont bien localisés ce qui va permettre de factoriser ces fonctions. Les résultats présentés ici auront un impact important dans l'études des formes modulaires qui en résultent. Nous commençons par factoriser  $\tilde{\varphi}_\tau$  puis les fonctions de Jacobi, ces fonctions étant rénormalisées dans les perspectives à venir.

- FACTORISATION DE  $\Upsilon(z, \tau) = -\frac{1}{16\pi^2} \tilde{\varphi}_\tau(z)$

Afin de simplifier les expressions dans les égalités modulaires, on normalise  $\tilde{\varphi}_\tau$  en mettant aussi en évidence la variable  $\tau$  :

$$\Upsilon(z, \tau) = -\frac{1}{16\pi^2} \tilde{\varphi}_\tau(z).$$

On rappelle la définition du réseau réduit  $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  et on introduit  $\Lambda_\tau^* = \frac{1+\tau}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ .

La variable  $\tau$  étant fixée, afin de compenser les zéros et les pôles de  $z \mapsto \Upsilon(z, \tau)$ , on introduit la fonction méromorphe

$$F(z, \tau) = \prod_n \prod_m \left( \frac{z + m + n\tau}{z + \omega_0 + m + n\tau} \right)^2.$$

En regroupant selon la variable  $m$  et en symétrisant afin d'avoir des termes convergent, la relation

d'Euler  $\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=-N, n \neq 0}^N \left( \frac{z+n}{n} \right)$  conduit naturellement à

$$\begin{aligned} F(z, \tau) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=-N}^N \frac{\sin(\pi(z+n\tau))^2}{\sin(\pi(z-1/2-1/2\tau+n\tau)) \sin(\pi(z+1/2+1/2\tau+n\tau))} \\ &= \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(z+n\tau))^2}{\sin(\pi(z-1/2-1/2\tau+n\tau)) \sin(\pi(z+1/2+1/2\tau+n\tau))} \end{aligned}$$

qui, toujours à  $\tau$  fixé, converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C} - \Lambda_\tau^*$  selon la variable  $z$  avec des pôles d'ordre deux. La limite est donc méromorphe, 1 et  $\tau$  périodique.

Le théorème de Liouville permet d'affirmer que  $z \mapsto \Upsilon(z, \tau)F(z, \tau)^{-1}$  est une constante en  $z$  et il existe une fonction  $\tau \mapsto a(\tau)$  telle que :

$$\forall (z, \tau) \in (\mathbb{C} - \Lambda^*) \times \mathcal{H}, \quad \Upsilon(z, \tau) = a(\tau) \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(z + nt))^2}{\sin(\pi(z - 1/2 - 1/2t + nt)) \sin(\pi(z + 1/2 + 1/2t + nt))}.$$

Pour la suite, et conformément à l'usage pour les formes modulaires, on pose  $q = e^{2i\pi\tau}$  et on cherche  $\alpha(q) = a(\tau)$  vérifiant :

$$\Upsilon(z, \tau) = -\alpha(q) \frac{q^{1/2}}{4\sin(\pi z)^2} \left( \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi} z q^n) (1 - e^{-2i\pi} z q^n)}{(1 + e^{2i\pi} z q^{n+1/2}) (1 + e^{-2i\pi} z q^{n+1/2})} \right)^2.$$

De la représentation de Fourier :

$$\Upsilon\left(\frac{1}{2}, 2\tau\right) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sin(2(2n+1)\pi\tau)}.$$

on obtient facilement  $\Upsilon\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_1(2n+1)q^{2n+1}$  où  $\sigma_1(n) = \sum_{d|n, d>0} d$ .

On dispose alors d'une égalité modulaire

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_1(2n+1)q^{2n+1},$$

où  $\eta(\tau) = q^{-1/24} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)$  est la fonction de Dedekind, voir par exemple [Rou] page 2 ou [Koh] page 146. Et par suite,

$$\Upsilon\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = q^{1/2} \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - q^{2k+2})^4}{(1 - q^{2k+1})^4}.$$

Grâce à l'égalité  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + q^n) \cdot \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+1}) = 2$ , il vient

$$\Upsilon\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = -\alpha(q) \frac{q^{1/2}}{4} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + q^n)^4}{(1 - q^{n+1/2})^4} = -4\alpha(q) q^{1/2} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^{2n+1})^4 (1 - q^{n+1/2})^4}$$

et enfin  $-4\alpha(q) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^4 (1 - q^{n+1/2})^4$ . Par suite,

$$\Upsilon(z, \tau) = \frac{q^{1/2}}{16\sin(\pi z)^2} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^4 (1 - q^{n+1/2})^4 \left( \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi} z q^n) (1 - e^{-2i\pi} z q^n)}{(1 + e^{2i\pi} z q^{n+1/2}) (1 + e^{-2i\pi} z q^{n+1/2})} \right)^2.$$

$$\Upsilon(z, \tau) = \sin(\pi z)^2 q^{1/2} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^4 (1 - q^{n+1/2})^4 \left( \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi} z q^{n+1}) \times (1 - e^{-2i\pi} z q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi} z q^{n+1/2}) (1 + e^{-2i\pi} z q^{n+1/2})} \right)^2$$

ou, en revenant à  $\tilde{\wp}_\tau$ ,

$$\tilde{\wp}_\tau(z) = -16\pi^2 \sin(\pi z)^2 q^{1/2} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^4 (1 - q^{n+1/2})^4 \left( \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi} z q^{n+1}) (1 - e^{-2i\pi} z q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi} z q^{n+1/2}) (1 + e^{-2i\pi} z q^{n+1/2})} \right)^2.$$

• FACTORISATION DE  $SD(z, \tau)$  :

Suivant la section précédente et après normalisation, pour  $\tau \in \mathcal{H}$  et  $z = x + y\tau$  :

$$\begin{aligned} SD(z, \tau) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi z)}{\cos((n+\frac{1}{2})\pi\tau)} && \text{si } |y| < \frac{1}{2}, \\ &= -\frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi z/\tau)}{\cos((n+\frac{1}{2})\pi/\tau)} && \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cette fonction est elliptique en  $z$  (à  $\tau$  fixé) de période 2 et  $2\tau$ . De plus :

$$SD(z+1, \tau) = -SD(z, \tau) \quad \text{et} \quad SD(z+\tau, \tau) = -SD(z, \tau).$$

Par suite  $1+\tau$  et  $1-\tau$  sont des périodes de  $SD(z, \tau)$ .

La fonction s'annule uniquement en  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Ceci montre que  $1+\tau$  et  $1-\tau$  forme un système fondamental de période. Dans le pavé fondamental  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](1+\tau) + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](1-\tau)$ , 0 est un zéro dans l'intérieur du domaine, alors que  $-1$ ,  $1$ ,  $\tau$  et  $-\tau$  se partagent chacun sur quatre domaines. Le pavé translaté  $\frac{1}{2} + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](1+\tau) + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](1-\tau)$  contient exactement 0 et 1 comme zéro qui sont bien intérieurs.

Par suite, hors de  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ ,  $SD(z, \tau)$  ne s'annule pas. C'est le même phénomène que pour  $\Upsilon$ , de plus les pôles de  $SD(z, \tau)^2$  sont simples et sur le réseau  $\Lambda^*$  et par suite :

$$\forall (z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathcal{H}, \quad SD(z, \tau)^2 = \Upsilon(z, \tau).$$

En effet,  $z \mapsto SD(z, \tau)^2$  est une fonction elliptique de degré 2 sur le réseau  $\Lambda_\tau$  avec des zéros doubles sur  $\Lambda_\tau$  et des pôles sur  $\Lambda_\tau^*$ . Il reste à ajuster la constante de proportionnalité avec un équivalent en 0 pour conclure à l'égalité annoncée par le théorème de Liouville.

La factorisation de  $\Upsilon(z, \tau)$  conduit simplement à celle de  $SD$  selon les variables  $z$  et  $q$  :

$$SD(z, \tau) = \sin(\pi z) q^{1/4} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^2 (1 - q^{n+1/2})^2 \prod_{n=0}^N \frac{(1 - e^{2i\pi z} q^{n+1}) (1 - e^{-2i\pi z} q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2}) (1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}.$$

• LES FONCTIONS DE JACOBI  $CD(z, \tau)$  ET  $ND(z, \tau)$  :

Pour rappel, lorsque  $\tau \in \mathcal{H}$  avec  $z = x + y\tau$  :

$$\begin{aligned} CD(z, \tau) &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi z)}{\sin((n+\frac{1}{2})\pi\tau)} && \text{si } |y| < \frac{1}{2}, \\ &= \frac{i}{4\tau} + \frac{i}{2\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\pi z/\tau)}{\cos(n\pi/\tau)} && \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ ND(z, \tau) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\pi z)}{\cos(n\pi\tau)} && \text{si } |y| < \frac{1}{2}, \\ &= \frac{2}{\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi z/\tau)}{\sin((n+\frac{1}{2})\pi/\tau)} && \text{si } |x| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La fonction  $z \mapsto CD(z, \tau)$  admet 2 et  $\tau$  comme couple de périodes fondamentales et vérifie  $CD(z+1, \tau) = -CD(z, \tau)$ . Ses zéros, tous simples, sont sur  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Ses pôles sont sur  $\frac{1+\tau}{2} + 2\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  et sont simples. La fonction  $z \mapsto ND(z, \tau)$  admet 1 et  $2\tau$  comme couple de périodes fondamentales et vérifie  $ND(z+\tau, \tau) = -ND(z, \tau)$ . Ses zéros, tous simples, sont sur  $\frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Ses pôles sont sur  $\frac{1+\tau}{2} + 2\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  et sont simples.

Les développements de Fourier de  $SD$  et  $CD$  donnent l'égalité :

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad CD(0, \tau) = -iSD\left(\frac{1}{2}, \tau + 1\right).$$

Les zéros et les pôles de  $CD$  sont identifiés, en suivant le processus de factorisation de  $\Upsilon$ , il vient :

$$CD(z, t) = \cos(\pi z) q^{1/4} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - q^{n+1})^2}{(1 - q^{n+1/2})^2} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}.$$

De cette dernière égalité et de la factorisation de  $SD$  on déduit alors :

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad CD(0, \tau) = SD\left(\frac{1}{2}, \tau\right) \iff i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sin\left((n + \frac{1}{2})\pi\tau\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\cos\left((n + \frac{1}{2})\pi\tau\right)}.$$

En considérant les développements de Fourier, il vient donc :

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad ND(0, \tau) = 4iSD\left(\frac{\tau}{2}, \tau\right).$$

Connaissant cette relation et la localisation des pôles et des racines de  $ND$ , on peut factoriser :

$$ND(z, t) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+1})^2 (1 - q^{n+1})^2 \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 - e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}.$$

En résumé,  $\Upsilon = SD^2$  et on a les factorisations :

$$\Upsilon(z, \tau) = \sin(\pi z)^2 q^{1/2} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^4 (1 - q^{n+1/2})^4 \left( \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi z} q^{n+1})(1 - e^{-2i\pi z} q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})} \right)^2, \quad (25)$$

$$SD(z, \tau) = \sin(\pi z) q^{1/4} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+2})^2 (1 - q^{n+1/2})^2 \prod_{n=0}^N \frac{(1 - e^{2i\pi z} q^{n+1})(1 - e^{-2i\pi z} q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}, \quad (26)$$

$$CD(z, t) = \cos(\pi z) q^{1/4} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - q^{n+1})^2}{(1 - q^{n+1/2})^2} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}, \quad (27)$$

$$ND(z, t) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^{2n+1})^2 (1 - q^{n+1})^2 \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 - e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}{(1 + e^{2i\pi z} q^{n+1/2})(1 + e^{-2i\pi z} q^{n+1/2})}. \quad (28)$$

## VII - Equation différentielle vérifiée par $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$

La fonction de Weierstrass  $\wp = \wp_{\omega_1, \omega_2}$  est classiquement la solution d'une équation différentielle autonome  $y'^2 = 4y^3 - 6g_4y - 140g_6$ , où l'on a posé

$$\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}, \quad g_k = \sum_{a \in \Lambda_{\omega_1, \omega_2} - \{0\}} \frac{1}{a^k}.$$

Cette relation permet à son tour de paramétrer une cubique par  $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ . La relation (6) montre que  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  vérifie aussi une équation différentielle de même type, retrouvons cela.

Notons  $f(z) = \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z + \omega_0) = \wp_{\omega_1, \omega_2}(z) - \wp_{\omega_1, \omega_2}(\omega_0)$ ,  $f$  est paire et possède un pôle d'ordre 2 en 0 de résidu nul. Les développements formels de  $f$  et  $f'$  au voisinage de 0 s'écrivent

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \nu_0 + \nu_2 z^2 + \nu_4 z^4 + O(z^6) \quad \text{et} \quad f'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2\nu_2 z + 4\nu_4 z^3 + O(z^5).$$

Le choix  $a = -12\nu_0$  et  $b = 12\nu_0^2 - 20\nu_2$  donne  $f'^2 - 4f^3 - af^2 - bf = -28\nu_4 + 20\nu_0\nu_2 - 4\nu_0^3 + O(z^2)$ . Le théorème de Liouville permet d'affirmer que  $f'^2 - 4f^3 - af^2 - bf = -28\nu_4 + 20\nu_0\nu_2 - 4\nu_0^3$  et l'évaluation en  $z = \omega_0$  indique

$$-28\nu_4 + 20\nu_0\nu_2 - 4\nu_0^3 = 0. \quad (29)$$

Ainsi  $f$  est solution de l'équation

$$y'^2 = 4y^3 + a(\omega_1, \omega_2)y^2 + b(\omega_1, \omega_2)y. \quad (30)$$

L'équation étant autonome,  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z)$  est également solution de (30). La relation (29) est une égalité entre formes modulaires et, de même, la nullité des coefficients du développement asymptotique de  $f'^2 - 4f^3 - af^2 - bf$  donne des relations entre formes modulaires.

On note  $\sum' = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{-N \leq n, m \leq N, \\ (n, m) \neq (0, 0)}}$ . Un calcul direct donne

$$\nu_0 = -\frac{1}{\omega_0^2} + \sum' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^2} - \frac{1}{(\omega_0 + n\omega_1 + m\omega_2)^2} = 4 \sum' \frac{(-1)^{n+m}}{(n(\omega_1 + \omega_2) + m(\omega_1 - \omega_2))^2},$$

$$\nu_2 = 3 \sum' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^4} \quad \text{et} \quad \nu_4 = 5 \sum' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^6}.$$

Ainsi,

$$a(\omega_1, \omega_2) = -48 \sum' \frac{(-1)^{n+m}}{(n(\omega_1 + \omega_2) + m(\omega_1 - \omega_2))^2}$$

et

$$b(\omega_1, \omega_2) = 192 \left( \sum' \frac{(-1)^{n+m}}{(n(\omega_1 + \omega_2) + m(\omega_1 - \omega_2))^2} \right)^2 - 60 \sum' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^4}.$$

Il est quasiment immédiat que les coefficients  $\nu_{2k}(1, \tau)$  sont colinéaires aux fonctions d'Eisenstein  $G_{2k}(\tau)$  pour  $k \geq 1$ . Plus surprenant, dans la représentation choisie,  $\nu_0(1, 2\tau + 1)$  est colinéaire à  $G_2^*(\tau)$  [Diam], ce qui renforce la pertinence de la convention développée ici. Dans le même esprit, la conjecture abc et la preuve d'A. Wiles du théorème STW pour les courbes elliptiques semi-stables portent sur des cubiques du type  $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$  et non  $y^2 = x^3 + \alpha x + \beta$  comme dans la paramétrisation de Weierstrass.

Finalement, à l'instar du cas classique, on peut factoriser cette équation et introduire un discriminant. La fonction  $\tilde{\wp} = \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  est paire,  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ -périodique, bien définie en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , d'où  $\tilde{\wp}'(\frac{\omega_1}{2}) = \tilde{\wp}'(\frac{\omega_2}{2}) = 0$ .

Sur la surface compacte  $\mathbb{C}/\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$  le nombre de zéros de  $\tilde{\wp}'$  est égal au nombre de pôles (tous comptés avec les multiplicités). L'unique pôle est d'ordre 3 et congru à  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , par suite 0,  $\frac{\omega_1}{2}$  et  $\frac{\omega_2}{2}$  sont les seuls zéros modulo le réseau de  $\tilde{\wp}'$  et ils sont tous d'ordre un.

On déduit :

$$\tilde{\wp}'^2 = 4\tilde{\wp}^3 + a(\omega_1, \omega_2)\tilde{\wp}^2 + b(\omega_1, \omega_2)\tilde{\wp} = 4\tilde{\wp}(\tilde{\wp} - \tilde{\wp}(\frac{\omega_1}{2}))(\tilde{\wp} - \tilde{\wp}(\frac{\omega_2}{2})).$$

Enfin,  $\tilde{\wp}(z) - \tilde{\wp}(\frac{\omega_1}{2}) = 0$  possède exactement deux zéros sur  $\mathbb{C}/\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ . Puisque  $\tilde{\wp}'(\frac{\omega_1}{2}) = 0$ , on déduit que  $\frac{\omega_1}{2}$  est l'unique zéro (double) de  $\tilde{\wp}(z) - \tilde{\wp}(\frac{\omega_1}{2}) = 0$  modulo  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ .

Par suite  $\tilde{\wp}(\frac{\omega_1}{2}) \neq \tilde{\wp}(\frac{\omega_2}{2})$ .

Le discriminant de l'équation  $\tilde{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = a^2 - 16b = 16(\tilde{\wp}'(\frac{\omega_1}{2}) - \tilde{\wp}'(\frac{\omega_2}{2}))^2$  est de degré 4 et ne s'annule jamais.

Ce type de discriminant est particulièrement intéressant dans le cadre des formes modulaires. On pose

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad \tilde{\Delta}(\tau) = \tilde{\Delta}(1, \tau).$$

Les relations valables sur  $\mathcal{H}$  :

$$\tilde{\Delta}(\tau + 2) = \tilde{\Delta}(\tau) \text{ et } \tilde{\Delta}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^4 \tilde{\Delta}(\tau)$$

conduisent à poser  $\Delta_4(\tau) = \tilde{\Delta}(2\tau)$ .

Par des techniques usuelles, les égalités précédentes permettent d'établir que  $\Delta_4$  est une forme modulaire de poids 4 et de niveau 4, qui ne s'annule pas sur  $\mathcal{H}$ . Elle joue sur son espace le même rôle que le discriminant usuel  $\Delta$  sur l'espace des formes modulaires de poids 12 et de niveau 1.

### VIII - Inverse de la fonction $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$

Par construction,  $\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}$  est paire, elle présente un zéro double en 0 et un pôle double en  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , avec un résidu nul.

Par suite  $z \mapsto \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z) \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}(z - \omega_0)$  est constante non nulle d'après le théorème de Liouville. Notons  $C(\omega_1, \omega_2)$  cette valeur.

Par parité, il vient

$$C(\omega_1, \omega_2) = \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}\left(\frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_2)\right)^2 = \tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}\left(-\frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_2)\right)^2.$$

L'équation (30) indique que  $\frac{1}{\tilde{\wp}_{\omega_1, \omega_2}} = \frac{f}{C}$  est solution de  $y'^2 = b(\omega_1, \omega_2)y^3 + a(\omega_1, \omega_2)y^2 + 4y$ . D'après ce qui précède, la fonction  $f$  n'étant solution que d'une unique équation de ce type, c'est à dire (30) elle-même, il vient donc

$$C(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4}b(\omega_1, \omega_2).$$

On définit  $C(\tau) = C(1, \tau)$  qui est alors 2 périodique et vérifie  $C(\tau) = \tau^4 C(-1/\tau)$ . On pose enfin  $C_1(\tau) = C(2\tau)$  et, à l'instar de  $\Delta_4$ , on montre que  $C_1$  est une forme modulaire de poids 4 et de niveau 4 qui ne s'annule pas sur  $\mathcal{H}$ .

### IX – Conclusion et perspectives

L'étude des fonctions elliptiques, suivant l'approche de Weierstrass et de Jacobi forme une théorie mathématique dont les éléments de base sont standardisés. Par exemple la fonction de Weierstrass  $\wp$  présente un pôle à l'origine. À l'aide d'intégrales de contour, dont l'introduction est justifiée par une approche plus globale des formules sommatoires [Feau], nous avons retrouvé assez simplement les fonctions elliptiques usuelles... À une translation près.

Cette translation apparaît naturellement dans le calcul des intégrales de contour, et cet élément manquant nous a permis de factoriser les fonctions elliptiques suivant l'approche présentée ici.

C'est aussi cette renormalisation qui a conduit à des développements en séries de Fourier des fonctions de Weierstrass ou de Jacobi sur les réseaux réduits, et dont l'observation relève immédiatement un caractère modulaire.

Ces développements de séries de Fourier seront un point d'accès à certaines fonctions modulaires. Ils permettront, par exemple, de proposer des bases d'espaces modulaires dont les éléments ne s'annulent pas sur le demi-plan de Poincaré. Quelques exemples caractéristiques de ces objets sont d'ailleurs apparus naturellement dans l'étude de l'équation différentielle liée à une fonction elliptique de type Weierstrass, ou dans l'inversion d'une telle fonction.



Quand aux applications des formules de factorisation, certaines sont immédiates, en voici un exemple. On rappelle les notations  $\gamma(z, \tau) = -\frac{1}{16\pi^2} \tilde{\wp}_\tau(z)$  et  $q = e^{2i\pi\tau}$ , une application directe de la formule de factorisation (25) conduit successivement à :

$$-\frac{1}{16\pi^2} \tilde{\wp}_\tau\left(\frac{1}{2}\right) = q^{1/2} \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - q^{2k+2})^4}{(1 - q^{2k+1})^4},$$

$$\frac{1}{\pi^2} \tilde{\wp}_t\left(\frac{\tau}{2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - q^{k+1/2})^8 (1 - q^{k+1})^4,$$

$$\frac{1}{\pi^2} \tilde{\wp}_{\tau+1}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - q^{2k+1})^{12} (1 - q^{2k+2})^4}{(1 - q^{k+1/2})^8}.$$

Par suite, le discriminant modulaire  $\Delta(q) = q \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^k)^{24}$  se factorise sous la forme

$$\Delta(q) = \frac{1}{256\pi^{12}} \left( \tilde{\wp}_\tau\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{\wp}_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right) \tilde{\wp}_{\tau+1}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) \right)^2.$$

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [Halp] : G.H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Jacques Gabay, 1886.
- [Armi] : V. Armitage et W. F. Eberlein, *Elliptic Functions*, Cambridge University Press, 2006.
- [Apos] : T. M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer-Verlag New York, 1976.
- [Whit] : E.T Whittaker, G.N Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, London, 1940.
- [Diam] : F. Diamond, J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Springer-Verlag New York, 2005.
- [Feau] : J.-C. Feauveau, *Une approche unifiée pour les formules sommatoires*, eprint 2016 hal-01295429
- [Rous] : J. Rouse, J. J. Webb, *On spaces of modular forms spanned by eta-quotients*, eprint arXiv :1311.1460
- [Kohl] : G. Köhler, *Eta Products and Theta Series Identities*, Springer-Verlag Berlin, 2011.