



HAL
open science

Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito

Mickaël Matusinski

► **To cite this version:**

Mickaël Matusinski. Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito. Revista del Seminario iberoamericano de matematicas, 2007, IV, pp.39-50. hal-01446555

HAL Id: hal-01446555

<https://hal.science/hal-01446555>

Submitted on 26 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito

Mickaël Matusinski

21 septembre 2007

Table des matières

1	Introduction	1
2	Campos de vectores y ecuaciones sub-analyticas	3
3	Cuerpos de series generalizadas de rango finito	4
4	Compendio de la prueba del teorema principal	5

1 Introduction

Estudiamos ecuaciones diferenciales de tipo $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$ donde $F(Y_0, \dots, Y_n)$ es una serie formal en Y_0, \dots, Y_n con coeficientes en un cierto cuerpo de *series generalizadas* \mathcal{M}_r . Nuestro problema es comprender la relacion que hay entre el conjunto de los exponentes de sus coeficientes (que notamos $\text{Supp } F$) y los exponentes de los elementos de $y_0 \in \mathcal{M}_r$ soluciones (que notamos $\text{Supp } y_0$).

Dado un grupo abeliano totalmente ordenado G , llamamos *serie generalizada con potencias en G* una expression $a = \sum_{g \in G} A_g t^g$. Los coeficientes A_g son reales, t es la variable abstracta y el *soporte* de a (el conjunto de exponentes $g \in G$ tal que $A_g \neq 0$) es un sub-conjunto *bien ordenado* de G . Hahn demostro en [Hah07] que el conjunto de las series generalizadas es un cuerpo valorado.

El estudio de las series generalizadas esta al confluente de recientes adelantos en varios dominios. Subrayamos en los diferentes contextos que vamos a citar la importancia de la *theoria de los cuerpos valorados de caracteristica cero*. Tambien utilizamos en nuestro trabajo un acceso con valoraciones.

En el caso del cuerpo $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ munido de la valoracion y de la derivacion usuales, hay dos resultados cercanos. En [GS91], D. Y. Grigoriev et M. F. Singer consideran ecuaciones diferenciales polinomiales $P(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ con $P \in \mathbb{Q}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$. En tal caso proban que todo elemento de $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ solucion tiene sus exponentes en un \mathbb{Z} -modulo finitamente generado.

J.Cano estudia en [Can93] series generalizadas con potencias racionales soluciones d'ecuaciones diferenciales de tipo $f(x, y, y' \dots, y^{(n)}) = 0$, donde $f(x, y, \dots, y^{(n)}) \in \mathbb{R}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$. Entonces demuestra que los exponentes de una tal serie tienen un denominador comun (serie de tipo Puiseux). Despues utiliza su resultado para determinar el indice de Gevrey de la solucion en funcion del de la serie formal f que define la ecuacion.

F.Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin utilizan una version ligeramente diferente de este ultimo resultado en [CMR05]: dados una ecuacion $f = 0$ y una serie generalizada en $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ solucion, entonces sus exponentes pertenecen a un *reticulo*, es decir un sub-semi-grupo finitamente generado de \mathbb{R}_+ . Les sirve de etapa en la prueba de un teorema de desingularizacion de campos de vectores en dimension tres a lo largo de una trayectoria non oscilante.

Estos resultados son casos particulares de un teorema mucho mas general probado por J. van der Hoeven en su tesis ([vdH97]). Sin entrar en los detalles, se puede resumir asi: *una transserie con soporte bien ordenado que es solucion de un polynomio diferencial con coeficientes reticulados es tambien reticulada.*

Las *transseries* son series formales contruidas por induccion a partir de \mathbb{R}, x , las operaciones de cuerpo, la exponencial, el logaritmo y un procedimiento de summacion infinita parecido a la construccion de las series generalizadas a partir de un cuerpo ordenado abstracto. Se obtiene asi un *cuerpo totalmente ordenado, real cerrado, estable por derivacion, integracion, composicion y inversion funcional.* J. Ecalle introduzco primero las transseries en su prueba de la conjetura de Dulac (cf [É92]).

Encontramos en otros contextos cuerpos similares a el de las transseries llamados cuerpo de *series logaritmico-exponenciales (LE-series)*, o tambien *series exp-log*. Son utilizados en teoria de modelos, en particular para comprender ciertas propiedades de cuerpos estables por la exponencial (es decir un isomorfismo entre el grupo aditivo del cuerpo y su sub-grupo multiplicativo d'elementos positivos). F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann et S. Shelah probaron en [KKS97] que los cuerpos de series generalizadas non triviales no pueden ser estables por exp. Pero pueden ser provistos de una exponencial real restringida, y mismo de cualquiera funcion analytica restringida (cf [vdDMM94]). L. van den Dries introduzco el cuerpo de las *LE-series* estudiando el problema de Tarski sobre la exponencial real ([vdD84][vdD86]).

Otro campo de investigacion que esta relatado con las series generalizadas es el de los cuerpos de Hardy (los cuerpos de germenos de funciones reales a l'infinito estables por derivacion). Son cuerpos naturalmente valorados y se define una nocion de rango que es el numero de classes archimedianas del grupo de valoracion. Estos cuerpos son una eramienta importante en el estudio de funciones non oscilantes. En particular, en el caso de rango finito, Rosenlicht muestra en [Ros83] que existe una escala asymptotica finitamente generada en cual se pueden desarrollar los elementos del cuerpo.

F.Cano, R.Moussu y J.-P.Rolin utilizan esta propiedad en la prueba del teorema de desingularizacion: el conjunto de las funciones meromorfas cerca la singularidad evaluadas en una trayectoria trascendente non oscilante es un cuerpo de Hardy de rango menor que la dimension del espacio que es tres. En el caso donde este cuerpo es de rango uno, muestran que las coordenadas de la trayectoria son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y entonces utilizan el redultado de J.Cano para monstrar que el desarrollo de las coordenadas son series de tipo Puiseux.

2 Campos de vectores y ecuaciones sub-analyticas

Para ilustrar la relacion entre campos de vectores, cuerpos de Hardy y series generalizadas, citamos a partir de [MR06] el siguiente teorema que generaliza el precedente metodo en dimension cualquiera :

Teorema 2.1 *Sea X un campo de vectores analytico sobre una variedad analytic real M de dimension n y γ una trayectoria de X transcendente y sub-analyticamente non oscilante. Sea p el punto limite de γ y un systema de coordenadas locales analytico (x_1, \dots, x_n) centrado en p tal que el grafico de γ pertenezca al primer orthante y admita una parametrizacion $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$. Si cada componente de γ admite un desarrollo asymptotico $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_1^{\mu_i}$, entonces los exponentes μ_i pertenecen a un semi-grupo finitamente generado de \mathbb{R}_+ .*

Para probar este resultado, empenzamos generalizando el procedimiento de eliminacion y resolucion de ecuacion diferencial de F.Cano, R. Moussu y J.-P.Rolin. Transformamos el campo de vectores $\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$ en el systema de $n-1$ ecuaciones diferenciales $a_1(x_1, \dots, x_n)x'_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$. Entonces applicamos $n-1$ veces el procedimiento siguiente : derivamos la primera ecuacion y eliminamos $x'_1, \dots, x'^{i-1}, x'^{i+1}, \dots, x'_n$ con las otras ecuaciones. Asi reducimos el campo de vectores a un systema de $n-2$ ecuaciones diferenciales $f_j(x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1), x_3(x_1), \dots, x_n(x_1)) = 0$. La proyeccion del conjunto analytico $A = \{f_1 = \dots = f_{n-2} = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ sobre el espacio $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^{n-2}$ es un conjunto sub-analytico $\pi(A)$. Entonces existe una funcion sub-analytica H tal que la curva non oscilante $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1))$ verifica la ecuacion $H = 0$. Es decir la funcion $\phi : x_1 \mapsto x_1^{-(n-1)}x_2(x_1)$ es solucion de una ecuacion diferencial sub-analytica $f(x_1, \phi(x_1), \dots, x_1\phi'(x_1), \dots, x_1^{n-1}\phi^{(n-1)}(x_1)) = 0$. Entonces el teorema es una consecuencia directa del resultado siguiente :

Teorema 2.2 *Sea f una funcion sub-analytica en una vecindad del origen de \mathbb{R}^{n+1} . Sea un elemento ϕ de un cuerpo de Hardy en la origen de \mathbb{R}_+ solucion de la ecuacion diferencial $f(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$. Si ϕ tiene un desarrollo asymptotico $\hat{\phi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$ con $\mu_i \in \mathbb{R}_+$, entonces los exponentes μ_i pertenecen a un semi-grupo finitamente generado de \mathbb{R}_+ .*

Nuestra prueba utiliza una decomposicion de las funciones sub-analyticas tal que se encuentra en [vdDMM94] o en [LR97]: una funcion sub-analytica real en una vecindad del origen se puede escribir como una composicion finita de funciones de los tres tipos siguientes :

- i) funciones analyticas en una vecindad del origen de \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}$
- ii) ramificaciones $x \mapsto x^r$, $x \geq 0$, $r \in \mathbb{Q}$
- iii) la funcion division $D(x, y) = \frac{x}{y}$ si $|y| \geq |x|$ et $D(x, y) = 0$ sinon

Hacemos una prueba por induccion sobre la "complexidad de la funcion sub-analytica" relativamente a la precedente decomposicion. Es decir provamos que considerando una funcion candidata para ser solucion de la ecuacion sub-analytica, hay dos casos : o bien esta funcion es solucion de una ecuacion mas simple (es decir con una decomposicion mas simple), o bien

podemos "monomializar" la ecuacion : existe una parte inicial $p_{k_0} = \sum_{i=1}^{k_0} c_i x^{\mu_i}$ de $\hat{\phi}(x)$ tal que,

notando $\hat{\phi}(x) = p_{k_0} + \phi_1(x)$, tenemos $F(x, \hat{\phi}(x), \dots, x^n \hat{\phi}^{(n)}(x))$. En particular en este ultimo caso $\hat{\phi}$ no puede ser solucion de la ecuacion, y ϕ tampoco.

Subrayamos esta dualidad que como vamos a verlo es bastante general. El resultado que vamos a presentar generaliza este ultimo teorema a el caso de ecuaciones y soluciones en un cuerpo de series generalizadas de rango finito.

3 Cuerpos de series generalizadas de rango finito

Nos interesamos a los cuerpos de series con potencias en un grupo abeliano totalmente ordenado de *rango finito* $r \in \mathbb{N}$, es decir con un numero finito de clases archimedianas. El teorema de inmersion de Hahn en [Hah07] nos dice que un tal grupo es isomorfo a un sub-grupo del *producto lexicografico* de r copias de \mathbb{R} (*producto de Hahn*).

Asi consideramos el caso de las series generalizadas con coeficientes reales y exponentes en \mathbb{R}_{lex}^r . Notamos el conjunto de estas series $\mathcal{M}_r = \mathbb{R}((t^{\mathbb{R}_{lex}^r}))$ donde t es una variable formal. Los elementos son de la forma $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_{lex}^r} A_\alpha t^\alpha$ con $A_\alpha \in \mathbb{R}$ y con un soporte $\text{Supp } a = \{\alpha \in \mathbb{R}_{lex}^r \mid A_\alpha \neq 0\}$ que es un sub-conjunto bien ordenado de \mathbb{R}_{lex}^r . Es conocido desde [Hah07] que este conjunto de series es un cuerpo con la adicion usual y el producto de convolucion. Ademas es un cuerpo valorado con valoracion $v : a \mapsto \min(\text{Supp } a)$.

Adoptamos una otra notacion para los elementos de este cuerpo. Para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, ponemos $t_i = t^{e_i}$ donde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el 1 en la i -ema posicion es el i -ema generador del grupo \mathbb{R}^r . Asi $v(t_1) = e_1 > \dots > v(t_r) = e_r$. Podemos escribir un elemento de \mathcal{M}_r , $a = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} t_1^{\alpha_1} \sum_{\alpha_2 \in I_{\alpha_1} \in \mathbb{R}} t_2^{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_r \in I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}} \in \mathbb{R}} M_\alpha t_r^{\alpha_r}$.

Construimos una derivacion sobre el cuerpo \mathcal{M}_r . Definimos las derivadas de los generadores como elementos del cuerpo: $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $t'_i \in \mathcal{M}_r$, y aÑadimos las tres hypotesis siguientes :

(H0) Para todo elemento $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_{lex}^r} A_\alpha t^\alpha$ de \mathcal{M}_r , definimos $a' = \sum A_\alpha (t^\alpha)'$ donde $(t^\alpha) =$

$$(t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r})' = t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} (\alpha_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \alpha_r \frac{t'_r}{t_r}).$$

(H1) para todos $a, b \in \mathcal{M}_r$, $v(a) \leq v(b) \Leftrightarrow v(a') \leq v(b')$

(H2) $v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right) < v\left(\frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}}\right) \forall k \in \{1, \dots, r-1\}$

La primera hypotesis es lo que J.M. del Blanco-Maraña llama en su tesis una derivacion *bien definida* (cf??). Las dos siguientes son equivalentes a decir que nuestro cuerpo es un *pre-H-field* (cf [AvdD05]). Son hypotesis verificadas por los cuerpos de Hardy y el cuerpo de las transseries.

Ejemplo 3.1 El ejemplo que desarrollamos a lo largo de esta conferencia es el siguiente :

$$\text{Ponemos } \begin{cases} t_1 = \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \\ t_2 = x \\ t_3 = \frac{-1}{\log(x)} \end{cases} \quad \text{y } v(t_1) = (1,0,0) > v(t_2) = (0,1,0) > v(t_3) = (0,0,1).$$

Con la derivacion usual, tenemos :

$$\begin{cases} t'_1 &= \frac{\exp(\frac{-1}{x})}{x^2} = t_1 t_2^{-2} \\ t'_2 &= 1 \\ t'_3 &= \frac{1}{x \log^2(x)} = t_2^{-1} t_3^2 \end{cases}$$

$$y v(t'_1) = (1, -2, 0) > v(t'_2) = (0, 0, 0) > v(t'_3) = (0, -1, 2).$$

Para enunciar el teorema principal, damos las definiciones siguientes. Dados unos sub-conjuntos bien ordenados X_1 y X_2 de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$ y reales positivos α y β , llamamos *transformaciones elementales*:

- la suma de los conjuntos: $X_1 + X_2 = \{\xi_1 + \xi_2 \mid \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in X_2\}$
- la añadidura de un nuevo generador: $X_1 + \mathbb{N}\alpha$
- la generacion como semi-grupo aditivo: $\langle X_1 \rangle = \{k_1 \xi_1 + \dots + k_q \xi_q \mid k_i \in \mathbb{N}, \xi_i \in X_1, q \in \mathbb{N}\}$
- la traslacion negativa de β : $(X_1)_{\geq \beta} - \beta$

Para todo orden de derivacion $n \in \mathbb{N}$ en las ecuaciones diferenciales que consideramos, existen ciertos r sub-conjuntos bien ordenados $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$ contruidos a partir de los soportes de las derivadas t'_i de los generadores del cuerpo.

Teorema 3.2 *Sea $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$. Sea la ecuacion corespondente $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^I = 0$ con $c_I \in \mathcal{M}_r$ y cuyo soporte $\text{Supp } F = \cup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I$ es un sub-conjunto bien*

ordenado de \mathbb{R}^r . Sea una solucion $y_0 \in \mathcal{M}_r$ con $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$. Entonces los exponentes de y_0 pertenecen a un sub-conjunto bien ordenado de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$ contruido a partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ con un numero finito de transformaciones elementales.

Este resultado tiene un corolario en el caso "reticulado", es decir:

Corolario 3.3 *Si el soporte de la ecuacion y los conjuntos $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ son incluidos en un reticulo (sub-semi-grupo aditivo finitamente generado) de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$, entonces el soporte de una solucion $y_0 \in \mathcal{M}_r$ con $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$ tambien pertenece a un reticulo de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$*

Para poder evaluar una ecuacion como en el teorema en una serie generalizada y_0 , tenemos que asegurarnos como en [Can93] que $v(y_0) > (0, \dots, 0)$, $v(y'_0) > (0, \dots, 0), \dots, v(y_0^{(n)}) > (0, \dots, 0)$. La condicion $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$ es suficiente (la condicion en [Can93] es $v(y_0) > n$).

4 Compendio de la prueba del teorema principal

Las pruebas de los resultados de D.Y.Grigoriev-M.F.Singer, J.Cano, F.Cano-R.Moussu-J.-P.Rolin, y J.Van der Hoeven utilizan unas generalizaciones del *metodo del poligono de Newton-Fine*. En nuestro caso, decidemos no utilizar este metodo, y expresar directamente las relaciones valuativas entre los exponentes de una solucion y los de los coeficientes de la ecuacion.

La idea principal de la prueba es que, cuando evaluamos la ecuacion en partidas iniciales de mas en mas largas de una serie y_0 cualquiera, hay dos casos :

- o bien la valoracion de la ecuacion es creciente, lo que corespone a valores precisos de los exponentes de la serie

- o bien la valoracion de la ecuacion se estabiliza a partir de una cierta partida inicial. Entonces la serie y_0 no puede ser solucion.

Primero, observamos que una serie y_0 con $v(y_0) > (0, \dots, 0)$ se escribe

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{\mu_r > 0} M_{(0, \dots, 0, \mu_r)} t_r^{\mu_r} + \sum_{\mu_{r-1} > 0} t_{r-1}^{\mu_{r-1}} \sum_{\mu_r \in I_r} M_{(0, \dots, 0, \mu_{r-1}, \mu_r)} t_r^{\mu_r} + \dots \\ &= y_{0,r} + \dots + y_{0,1} \end{aligned}$$

Como en [CMR05], definimos a partir de la derivacion inicial r nuevas derivaciones privilegiadas :

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \quad , \quad D_k(y) = \frac{y'}{\delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right)}$$

donde $\delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right)$ es el termino dominante de $\frac{t'_k}{t_k}$. Para todo monomio $t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}$ de $y_{0,k}$, tenemos $D_k^i(t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}) \sim \mu_k^i t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}$. El interes es que cada derivacion es adaptada a la parte $y_{0,k}$ de y_0 que vamos a considerar. Ademas nos permite definir los conjuntos \mathcal{T}_k que nos permiten relatar el soporte de la ecuacion con los exponentes de la partida inicial en cual la evaluamos :

$$\begin{aligned} &Supp (F(y_{0,k}, \dots, D_k^n y_{0,k})) \subseteq Supp F + \mathcal{T}_k + Supp y_{0,k} \\ \text{donde } \mathcal{T}_k &= \left\langle Supp \frac{D_k t_k}{t_k} \right\rangle + \dots + \left\langle Supp \frac{D_k^n t_k}{t_k} \right\rangle + \dots + \left\langle Supp \frac{D_k t_r}{t_r} \right\rangle + \dots + \left\langle Supp \frac{D_k^n t_r}{t_r} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1 Tenemos :

$$\begin{cases} D_1 y = x^2 y' \\ D_2 y = x y' \\ D_3 y = -x \log(x) y' \\ \mathcal{T}_1 = \mathbb{N}(1,0,0) + \mathbb{N}(0,2,0) + \mathbb{N}(0,3,0) + \mathbb{N}(0,1,2) + \mathbb{N}(0,2,2) + \mathbb{N}(0,2,3) + \mathbb{N}(0,3,4) \\ \mathcal{T}_2 = \mathbb{N}(0,1,0) + \mathbb{N}(0,0,2) + \mathbb{N}(0,0,3) \\ \mathcal{T}_3 = \mathbb{N}(0,0,1) \end{cases}$$

Observamos que en este caso, para $n \geq 4$, los \mathcal{T}_k son independientes de n .

La prueba del teorema principal utiliza una *inducion sobre el numero de generadores que intervienen en la escritura de una partida inicial de y_0* . Es decir hay dos grandes partes :

- i) el caso inicial donde condieramos una partida inicial $y_{0,r} = \sum_{\mu_r > 0} M_{(0, \dots, 0, \mu_r)} t_r^{\mu_r}$.

- ii) la inducion donde suponemos el teorema cierto para una parte inicial $y_{0,r} + \dots + y_{0,k+1}$ y lo probamos para la parte $y_{0,k}$.

En los dos casos consideramos directamente ecuaciones con la "buena" derivacion (la que es adaptada a la partida inicial considerada). Tendremos despues que justificar los *cambios de derivacion* que permiten pasar de una ecuacion de tipo $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$ a otra de tipo $\tilde{F}(z, \dots, D_k^n z) = 0$.

Primero introducimos una nocion de *orden de Weierstrass* de la ecuacion que generaliza la nocion de orden de regularidad de Weierstrass en el caso de las ecuaciones algebraicas (cf por

ejemplo [KP02]). Una ecuacion $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ es de orden de Weierstrass

$w \in \mathbb{N}$ si:

- para todo $I \in \mathbb{N}^{n+1}$, $v(c_I) \geq (0, \dots, 0)$
- existe $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ con $|I| = w$ y $v(c_I) = (0, \dots, 0)$
- para todo $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ con $|I| < w$ y $v(c_I) > (0, \dots, 0)$

Toda ecuacion con soporte bien ordenado tiene un orden de Weierstrass: basta con dividir la ecuacion por el termino dominante de los coeficientes. Nuestro orden de Weierstrass es el analogo del *orden de Newton* en la prueba de J. van der Hoeven en su prueba con el poligono de Newton-Fine (cf [vdH97], [vdH06]).

En la etapa inicial i) de la induccion, la partida inicial de y_0 es de tipo $y_{0,r} = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t_r^\mu$. Es

decir solo intervienen potencias del generador t_r el "menos plano". Es un caso analogo a el de rango uno ($r = 1$).

Dada una ecuacion $F(y, \dots, D_r^n y) = 0$ de orden de Weierstrass $w > 0$, existen multi-indices $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longitud $|I| = r - 1$ tales que las derivadas parciales de la ecuacion correspondientes $F^{(I)}$ sean de orden de Weierstrass 1. Entonces dado uno de estos multi-indices I , notamos $\mathcal{A}_I = \{J \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |J| = 1, v(c_{I+J}) = (0, \dots, 0)\}$ y definimos el *polynomio anulador* asociado a I ,

$$\pi_I(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}_I} \delta(c_{I+J}) X^{i_J}$$

donde i_J es la posicion de 1 en $J = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. π_I es un polynomio escalonado de grado menor que n . Notamos ρ el conjunto de sus raices positivas.

Segun la formula de Taylor, para toda partida inicial $p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}$ de $y_{0,r}$, tenemos:

$$F^{(I)}(p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}) = F^{(I)}(p_S) + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}} (\pi_I(\tilde{\mu} + b_S^{(I)})) \quad \text{con } v(b_S^{(I)}) > (0, \dots, 0)$$

Entonces deducimos de la desigualdad de la valoracion que hay dos casos:

- o bien para toda partida inicial $p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}$ de $y_{0,r}$, tenemos: $v(F^{(I)}(p_S)) = \tilde{\mu}$ o $\tilde{\mu} \in \rho$. En este caso probamos por induccion transfinita que $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \langle \rho \rangle \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_r + \langle \rho \rangle$
- o bien existe una partida inicial $p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0}$ de $y_{0,r}$ tal que: $v(F^{(I)}(p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0})) = \min\{v(F^{(I)}(p_{S_0})), \tilde{\mu}_0\}$. La valoracion asociada a $F^{(I)}$ se estabiliza en $v(F^{(I)}(p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0}))$ cual es menor que $\tilde{\mu}_0$.

En el caso donde para todo I tales que $F^{(I)}$ sea de orden de Weierstrass 1 tenemos estabilizacion, probamos que hay una valoracion estabilizada dominante para todas las derivadas parciales $F^{(I)}$ con $|I| = r - 1$ a partir de una cierta partida inicial p_{S_0} de $y_{0,r}$. Entonces podemos considerar la ecuacion "reducida" al orden de Weierstrass $r - 1$, y repetir el razonamiento precedente con las derivadas parciales a los "pisos" menores que $r - 2$.

Asi tenemos los dos casos principales:

- o bien existe un piso $k \in \{1, \dots, r - 1\}$ tal que $\text{Supp } y_{0,r}$ pertenece a un sub-conjunto bien ordenado de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ construido a partir de $\text{Supp } F$ y \mathcal{T}_r con un numero finito de transformaciones elementares

- o bien existe una partida inicial p_{S_1} de $y_{0,r}$ tal que la valoracion de la ecuacion $F = 0$ ella misma se estabiliza. En este caso, y_0 no puede ser solucion.

En la etapa ii) de la induccion, consideramos una partida inicial $y_{0,k}$ y una ecuacion de la forma $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$. Entonces utilizamos el mismo razonamiento, con una dificultad suplementar.

Las raices de los polynomios anuladores son ciertas valores de μ_k en la valoracion $(0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r)$ de los terminos $M_\mu t^\mu$ de $y_{0,k}$. Tenemos entonces que determinar a que conjunto pertenecen los $(\mu_{k+1}, \dots, \mu_r)$ cuando μ_k es raiz de un polynomio anulador. Ilustramos esto con el diagrama siguiente en el caso $r = 2$:

Para allanar esta dificultad, suponemos que y_0 es solucion de la ecuacion y nos reducimos a el caso de una ecuacion de tipo $G(y, \dots, D_l^n y) = 0$ con una serie solucion $z_{0,l}$. Notamos ρ_1 una raiz del polynomio anulador, p_{S_1} la partida inicial de $y_{0,k}$ con soporte $S_1 = \{(0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r) \in \text{Supp } y_{0,k} \mid \mu_k < \rho_1\}$ y suponemos que S_1 pertenece a un "buen" subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ (como en el teorema). Notamos $\mu_0 = \min(\text{Supp } y_{0,k} \setminus S_1) = (0, \dots, 0, \rho_1, \mu_{0,k+1}, \dots, \mu_{0,r})$ y $M_{\mu_0} t^{\mu_0}$ el termino de $y_{0,k}$ correspondiente. Admitimos aqui que las transformaciones siguientes son bien definidas.

Primero, trasladamos la ecuacion $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ de $p_{S_1} + M_{\mu_0} t^{\mu_0}$, es decir hacemos el cambio de variable $y = y_1 + p_{S_1} + M_{\mu_0} t^{\mu_0}$ en la ecuacion. Obtenemos una ecuacion $\hat{F}(y_1, \dots, D_k^n y_1) = 0$ con una solucion $y_1 = \sum_{\mu > \mu_0} M_\mu t^\mu$. Esta serie tiene una partida inicial

$$y_{1,k} = \sum_{\mu > \mu_0, \mu_k = \rho_1} M_\mu t^\mu.$$

Segundo, hacemos la *explosion* $y_1 = t^{\mu_0} z$ en la ecuacion precedente. Obtenemos una ecuacion $\tilde{F}(z, \dots, D_k^n z) = 0$ con una serie solucion $z_0 = \frac{y_1}{t^{\mu_0}}$. z_0 tiene partida inicial de forma $z_{0,l}$ por un cierto $l > k$.

Tercero, hacemos el cambio de derivacion $\delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right) D_k z = \delta \left(\frac{t'_l}{t_l} \right) D_l z$ y obtenemos una ecuacion $G(z, \dots, D_l^n z) = 0$ con una serie solucion $z_0 = \frac{y_1}{t^{\mu_0}}$ de partida inicial $z_{0,l}$.

Entonces dividimos la ecuacion precedente por el termino dominante de sus coeficientes para obtener una ecuacion con un cierto orden de Weierstrass, y aplicamos la hypotesis de induccion.

Para acabar la prueba, tenemos que justificar los cambios de derivacion $y' = \delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right) D_k y$

$$\delta \left(\frac{t'_l}{t_l} \right) D_l y = \delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right) D_k y \text{ con } l < k.$$

En el primer caso, el cambio no es bien definido cuando $v \left(\frac{t'_k}{t_k} \right) < (0, \dots, 0)$ (los coeficientes que proceden del cambio tienen valor negativo). Asi lo componemos con la explosion $y = \delta \left(\frac{t'_1}{t_1} \right)^n z$ cual es bien definida como hemos supuesto que $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left(\frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$.

En el segundo caso, el cambio no es bien definido en general. Asi lo componemos con la explosion $y = \left(\frac{\delta \left(\frac{t'_l}{t_l} \right)}{\delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right)} \right)^{2n} z$, verificando que este cambio de variable es bien definido.

Références

- [AvdD05] Matthias Aschenbrenner and Lou van den Dries, *Asymptotic differential algebra*, Analyzable functions and applications, Contemp. Math., vol. 373, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 49–85.
- [Can93] José Cano, *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations*, Analysis **13** (1993), no. 1-2, 103–119.
- [CMR05] F. Cano, R. Moussu, and J.-P. Rolin, *Non-oscillating integral curves and valuations*, J. Reine Angew. Math. **582** (2005), 107–141.
- [É92] Jean Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1992.
- [GS91] D. Y. Grigoriev and M. F. Singer, *Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents*, Transactions Amer. Math. Soc. **327** (1991), no. 1, 329–351.
- [Hah07] H. Hahn, *Über die nichtarchimedischen Größensystem*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse (Wien) **116** (1907), no. Abteilung IIa, 601–655.
- [KKS97] Franz-Viktor Kuhlmann, Salma Kuhlmann, and Saharon Shelah, *Exponentiation in power series fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 11, 3177–3183.
- [KP02] Steven G. Krantz and Harold R. Parks, *A primer of real analytic functions*, second ed., Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
- [LR97] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 3, 859–884.
- [MR06] Mickaël Matusinski and Jean-Philippe Rolin, *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 99–102.
- [Ros83] Maxwell Rosenlicht, *The rank of a Hardy field*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), no. 2, 659–671.
- [vdD84] Lou van den Dries, *Remarks on tarski’s problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$* , Logic colloquium ’82 (Florence, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.
- [vdD86] ———, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **15** (1986), no. 2, 189–193.
- [vdDMM94] Lou van den Dries, Angus Macintyre, and David Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 183–205.
- [vdH97] Joris van der Hoeven, *Asymptotique automatique*, Université Paris VII, Paris, 1997, Thèse, Université Paris VII, Paris, 1997, With an introduction and a conclusion in French.
- [vdH06] J. van der Hoeven, *Transseries and real differential algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1888, Springer-Verlag, Berlin, 2006.