



HAL
open science

Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens

Daniel Guin

► **To cite this version:**

Daniel Guin. Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens. 2015, pp.1-46. hal-01442936

HAL Id: hal-01442936

<https://hal.science/hal-01442936>

Submitted on 21 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens

PLAN

0. Avant-propos

I. Rappels sur la géométrie euclidienne

1. Postulats d'Euclide
2. Formalisation : produit scalaire - distance - angle

II. Géométrie non euclidienne

1. Négation du postulat des parallèles
2. Géodésiques
3. Reformulation des postulats d'Euclide
4. Géométrie sphérique

III. Modèles de la géométrie hyperbolique

1. Définition
2. Le disque de Poincaré
3. Le demi-plan de Poincaré

IV. Annexes

Annexe 1 - Le plan euclidien

Annexe 2 - La géométrie sphérique (et elliptique)

Annexe 3 - Le disque de Poincaré

Annexe 4 - Le demi-plan de Poincaré

Annexe 5 - Compléments

1. Le disque de Beltrami-Klein
2. Un théorème de classification
3. Un modèle exotique
4. La géométrie de Minkovski
5. Le cône de lumière

0. Avant-propos

L'objectif de ce texte sur les Géométries Non Euclidiennes (GNE) est de donner aux professeurs de philosophie un outil permettant de s'appropriier les idées et concepts essentiels des GNE. Cette présentation n'est pas une approche historique ou philosophique ou épistémologique. Elle est purement mathématique, avec un vocabulaire contemporain qui permet d'éviter le flou de certaines notions que l'on trouve souvent dans les formulations historiques. De plus, elle permet de mieux appréhender le fait que la géométrie euclidienne n'est pas *la* géométrie mais *une* géométrie parmi d'autres.

Afin de rendre ce texte plus lisible, les notions présentées sont très simplifiées, cette simplification pouvant parfois conduire à des abus de langage, à un manque de rigueur et à certaines inexactitudes d'un point de vue mathématique. Que les mathématiciens qui liraient ce texte veuillent bien les considérer pour ce qu'elles sont. Les notions techniques sont renvoyées en annexes où les professeurs de mathématique qui travailleraient en collaboration avec leurs collègues de philosophie pourront trouver les indications pour justifier les résultats mentionnés dans le cours du texte. Ils pourront également consulter les textes indiqués dans la bibliographie.

La géométrie euclidienne est fondée sur cinq postulats. Pendant vingt siècles la question de l'indépendance du cinquième postulat par rapport aux quatre autres a été posée. Autrement dit, le cinquième postulat est-il bien un postulat ou est-il une propriété qui peut être démontrée à partir des quatre autres postulats ? Rappelons qu'en mathématique, pour toute théorie, on essaye de donner un ensemble minimal d'axiomes mutuellement indépendants.

L'étude de cette question a conduit aux GNE (géométrie sphérique et géométrie hyperbolique) qui sont des géométries qui satisfont aux quatre premiers postulats et à la négation du cinquième, ce qui montre que le cinquième postulat n'est pas une conséquence des quatre autres. En effet, si le cinquième postulat était une conséquence des quatre premiers, il serait également vérifié dans ces GNE ; on aurait alors une géométrie vérifiant une propriété et sa négation, ce qui est impossible (d'après le principe de non contradiction en logique classique).

Nous commençons en rappelant les postulats d'Euclide et quelques notions élémentaires de la géométrie euclidienne. Nous introduisons le concept de *distance* et de "plus court chemin" entre deux points (*géo-désique*), ce qui permet de traiter toutes ces géométries (euclidienne et non euclidiennes) dans un cadre conceptuel unique, (une autre notion permet cette unité de point de vue, c'est la *courbure*, que nous

n'aborderons pas ici). Nous donnons plusieurs *modèles planaires* de la géométrie hyperbolique, qui sont des représentations dans le plan utilisant des courbes usuelles (droites, cercles) et nous montrons dans un de ces modèles (le demi-plan de Poincaré) que la géométrie hyperbolique satisfait aux quatre premiers postulats d'Euclide et à la négation du cinquième.

Les illustrations de ce texte sont dues au talent d'Olivier Roizès, que nous remercions chaleureusement. Il a réalisé des vidéos en géométrie dynamique qui permettent de très bien visualiser quelques propriétés fondamentales des GNE, (cf bibliographie). Certaines, en particulier celles numérotées 04 et 05, contiennent des résultats très intéressants et peu connus.

I. Rappels sur la géométrie euclidienne (dans le plan)

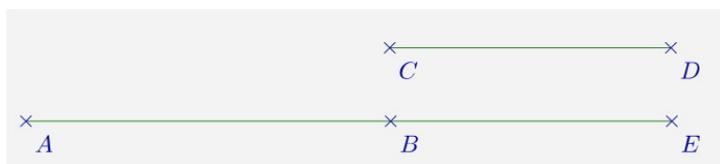
1. Postulats d'Euclide

Les formulations des postulats d'Euclide proposées ci-dessous sont différentes des formulations originelles. Elles leurs sont bien sur équivalentes et mieux adaptées à notre propos.

P1. Par tous points A et B distincts l'un de l'autre, il passe une droite.



P2. Pour tous segments AB et CD , il existe un unique point E tel que B est entre A et E et le segment CD est de longueur égale à la longueur du segment BE



P3. Pour tous points O et A , il existe un cercle de centre O et de rayon OA .

P4. Tous les angles droits sont égaux.

P5. Pour toute droite D et tout point P extérieur à D , il passe par P une droite parallèle à D et une seule.

On rappelle que deux droites dans un plan sont dites **parallèles** si elles n'ont aucun point commun. (*On remarquera que cette notion de droite parallèle n'a de sens que dans le plan. Pour une définition généralisable à l'espace cf. Annexe 1.*)

Remarque : Les postulats P1, P2, P3, P4, P5 sont équivalents aux postulats P1, P2, P3, P4, P5' avec

P5'. La somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés (π radians).

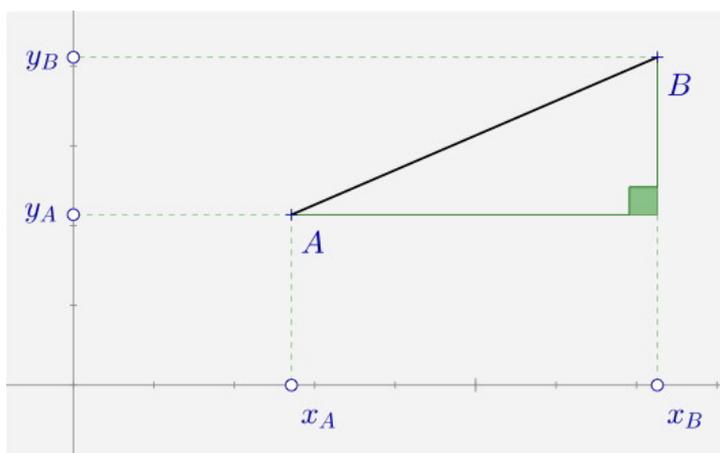
Il apparaît immédiatement un problème de définition dans ce qui précède :

- qu'est-ce qu'une droite ("une longueur sans largeur "d'après la définition d'Euclide), qu'est-ce qu'un cercle, qu'est-ce qu'un angle ?

Nous allons, ci-dessous, rappeler quelques concepts simples qui permettent de formaliser rigoureusement les postulats d'Euclide.

2. Formalisation : produit scalaire - distance - angle

On considère le plan \mathbb{R}^2 rapporté à un repère orthonormé et les points A, B .



D'après le théorème de Pythagore, la longueur du segment AB , qu'on note $\|AB\|$, est

$$\|AB\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

i.e.

$$\|AB\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Autrement dit, la longueur d'un vecteur \vec{V} de composantes (X, Y) (dans le cas du vecteur \vec{AB} , $X = x_B - x_A$ et $Y = y_B - y_A$) est

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Pour donner une interprétation plus générale à ce résultat, nous introduisons la notion de **produit scalaire**. Soient $\vec{V} = (X, Y)$ et $\vec{V}' = (X', Y')$ deux vecteurs, on pose

$$\langle \vec{V} | \vec{V}' \rangle = XX' + YY'$$

et on appelle ce nombre réel le produit scalaire de \vec{V} et \vec{V}' .

On voit donc que, dans le cas particulier où $\vec{V}' = \vec{V}$, on a $\langle \vec{V} | \vec{V} \rangle = X^2 + Y^2 = \|\vec{V}\|^2$.

Autrement dit, la longueur du segment AB est

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB} | \vec{AB} \rangle},$$

par conséquent, les longueurs s'expriment à l'aide du produit scalaire.

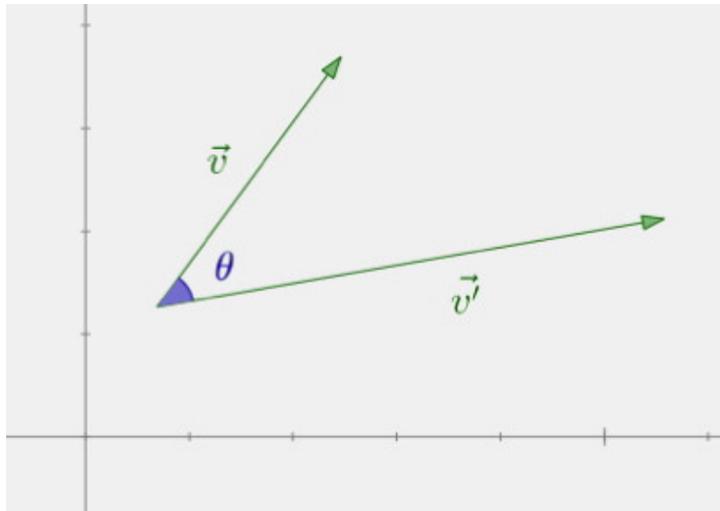
Le produit scalaire permet d'exprimer la distance entre deux points. Etant donné deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, on appelle **distance euclidienne** de A à B , que l'on note $d(A, B)$, l'expression

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \|\vec{AB}\|.$$

Avec cette notion de distance, on montre que le **minimum** de la distance entre A et B est réalisé par le **segment** AB porté par la **droite** passant par A et B , (cf *Annexe 1*).

Un **cercle** de centre O et de rayon OA est l'ensemble des points du plan qui sont à une distance $\|OA\|$ de O .

D'autre part, les relations métriques dans le triangle permettent de montrer que



$$\langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{v}'\| \cos(\theta).$$

Autrement dit,

l'angle θ est entièrement déterminé par le produit scalaire.

C'est l'angle (compris entre 0 et π) dont le *cosinus* vaut $\frac{\langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{v}'\|}$.

Moralité

On "remonte" tout dans l'autre sens : on considère \mathbb{R}^2

- on définit sur \mathbb{R}^2 un produit scalaire, (*cf. Annexe 1*),

- on en déduit une *distance*, d'où des *droites*, *cercles*, *angles* et on énonce les postulats d'Euclide avec ces objets.

II. Géométrie non euclidienne

1. Négation du postulat des parallèles P5

Question

Le postulat P5 est-il une conséquence des postulats P1, P2, P3, P4 ?

Idée de réponse

Existe-t-il une géométrie satisfaisant à P1, P2, P3, P4 et nonP5 ?
(cf. *Avant-propos*)

P5 est un énoncé universel (il s'applique à toute droite et tout point extérieur à la droite). Nous savons que la négation d'une propriété universelle consiste en un énoncé d'*existence* d'un objet ne satisfaisant pas la propriété. De plus, si une proposition s'énonce $P \text{ et } Q$, alors la négation de cette proposition est $\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$.

Par conséquent,

nonP5 :

Il existe une droite D et un point P extérieur à D tels que :

- il n'existe **aucune** droite parallèle à D passant par P

ou

- il existe **au moins deux** droites parallèles à D passant par P .

nonP5' :

- il existe un triangle dont la somme des angles est **supérieure** à π

ou

- il existe un triangle dont la somme des angles est **inférieure** à π .

Une **géométrie non euclidienne** est une géométrie satisfaisant à **P1, P2, P3, P4, nonP5 ou nonP5'**.

2. Géodésiques

Comme il a été rappelé ci-dessus, en géométrie euclidienne, i.e. dans le plan \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne, la courbe qui réalise le minimum de la distance entre deux points A et B est le segment de droite AB .

Il est clair que pour définir des géométries non euclidiennes, il va falloir, au moins, *considérer une autre distance* que celle définie en I.2. Pour éviter des confusions induites par la terminologie dans la suite, on pose la définition suivante :

Définition. Soient X un ensemble de points et d une distance définie sur X . On appelle **géodésique** une courbe \mathcal{C} dans X telle que, pour tout couple de points (A, B) de \mathcal{C} , l'arc de la courbe \mathcal{C} compris entre A et B réalise le **minimum de distance** de A à B , i.e. l'arc AB sur toute autre courbe passant par A et B sera de longueur supérieure à celle de l'arc de courbe AB sur \mathcal{C} , (*cf. Annexe 1*).

On voit bien que dans la géométrie euclidienne du plan, les géodésiques sont les droites, (*cf. Annexe 1*).

3. Reformulation des postulats d'Euclide

P1. Par tous points A et B distincts l'un de l'autre, il passe une géodésique.

P2. Pour tous arcs de géodésiques AB et CD , il existe un unique point E tel que B est entre A et E et l'arc de géodésique CD est de longueur égale à la longueur de l'arc de géodésique BE .

P3. Pour tous points O et A , il existe un cercle de centre O et de rayon OA .

P4. Tous les angles droits (i.e. les angles formés par l'intersection de deux géodésiques déterminant des angles égaux) sont égaux.

P5. Pour toute géodésique D et tout point P extérieur à D , il passe par P une géodésique parallèle à D et une seule. (Deux géodésiques sont **parallèles** si elles n'ont aucun point commun. Comme dans le cas des droites, cette définition ne convient pas dans le cas général - cf. *Annexe 1* - mais elle sera suffisante pour notre propos.)

On a alors,

nonP5 :

Il existe une géodésique D et un point P extérieur à D tels que :

- il n'existe aucune géodésique parallèle à D passant par P

ou

- il existe au moins deux géodésiques parallèles à D passant par P .

Un triangle (géodésique) dans (X, d) est déterminé par trois points et par trois arcs de géodésiques les reliant deux à deux.

nonP5' :

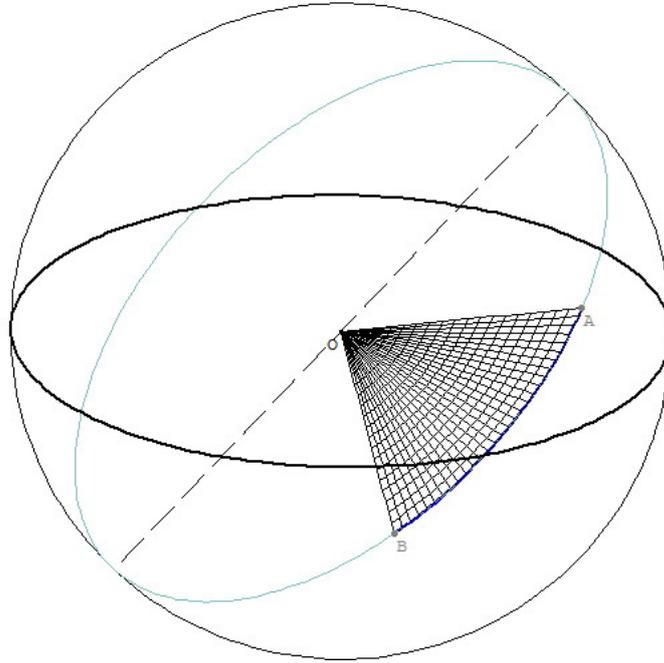
- il existe un triangle (géodésique) dont la somme des angles est supérieure à π

ou

- il existe un triangle (géodésique) dont la somme des angles est inférieure à π .

4. Géométrie sphérique

Nous allons introduire succinctement une géométrie qui vérifie la première option de *non P5* ou *non P5'*. L'ensemble X est ici l'ensemble des points de la sphère (euclidienne) de rayon 1.



On définit sur X la distance entre les points A et B par

$$d_1(A, B) = \widehat{AOB},$$

où \widehat{AOB} est l'angle (aigu) au centre, i.e. l'angle des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} (exprimé en radians). (En général, la distance entre les points A et B sur une sphère de rayon R est $R \times \widehat{AOB}$, où R est le rayon de la sphère ; ici $R = 1$.)

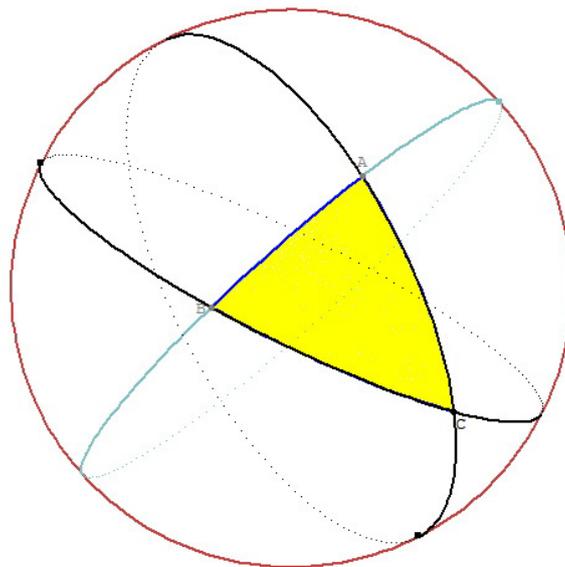
On montre que les **géodésiques sont les grands cercles**, i.e. l'intersection de la sphère et d'un plan passant par le centre d'icelle, (cf. *Annexe 2* et [R01])

Remarque : si les points A et B sont antipodaux (i.e. symétriques par rapport au centre), il passe par ces deux points une infinité de géodésiques (on peut penser au méridiens terrestres) (cf. *Annexe 2*).

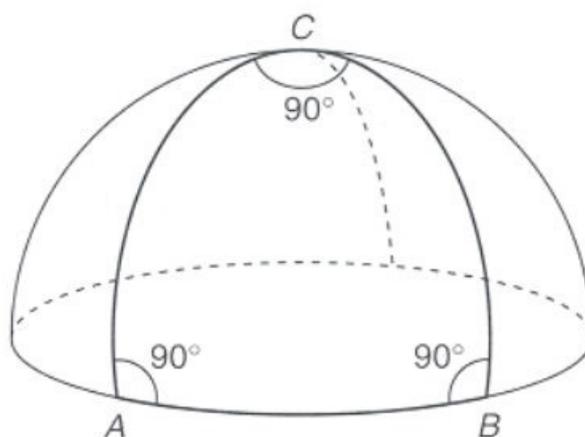
Deux grands cercles distincts l'un de l'autre sont toujours sécants, donc, par un point P extérieur à une géodésique C , **il ne passe aucune géodésique parallèle à C** , (non **P5** ; on notera que toute géodésique et tout point extérieur fournissent un contre-exemple à l'énoncé universel P5).

On montre (cf. Annexe 2) que la somme des angles d'un triangle (géodésique) est supérieure à π (**non P5'**) et que l'aire d'un triangle (géodésique) dont les angles aux sommets sont α , β , γ est

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

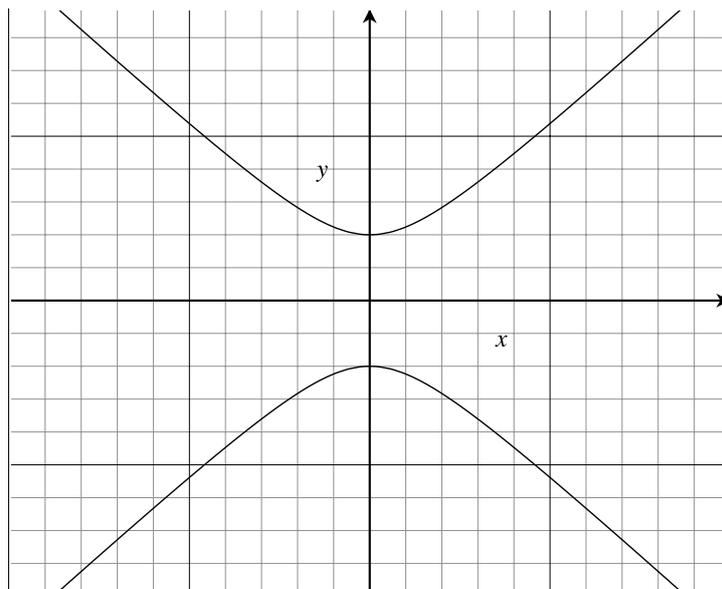


En particulier, il existe de vrais triangles (géodésiques) qui ont trois angles droits,

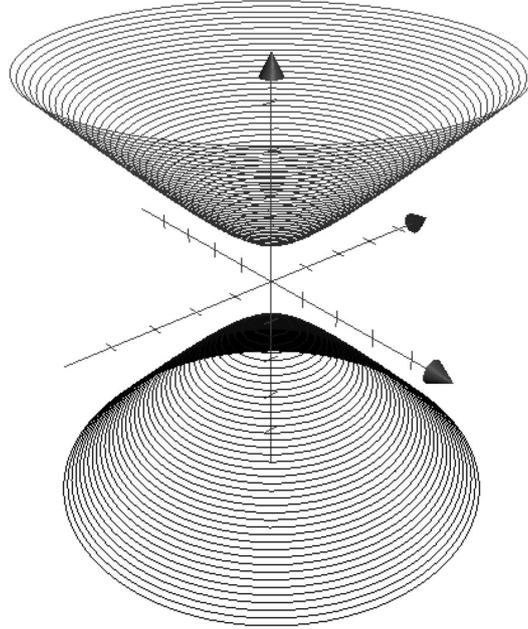


III. Modèles de la géométrie hyperbolique

On considère \mathcal{H} , un hyperboloïde, i.e. la surface engendrée par une hyperbole tournant autour de l'un de ses axes de symétrie.



Hyperbole d'équation $y^2 - x^2 = 1$



Hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 = z^2 - 1$

On suppose que le sommet de \mathcal{H} est placé au point $(0, 0, 1)$ dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 et que l'axe de symétrie est l'axe Oz . Soient deux points A et B sur \mathcal{H} et Γ la "grande hyperbole" passant par ces deux points, i.e. la courbe intersection de \mathcal{H} avec le plan OAB . On définit alors la distance $d(A, B)$ comme étant l'aire balayée par le segment de droite OH , lorsque H parcourt l'arc de Γ compris entre A et B , (cf. [R01] ou la figure ci-dessous).

On imagine bien qu'il n'est pas très aisé d'étudier les notions géométriques associées à cette distance. Aussi, on va transposer le problème en donnant des représentations planes, ce que nous appellerons des *modèles planaires*.

1. Définition

Nous appellerons *modèle planaire* (dans la suite nous dirons simplement *modèle*) de la géométrie hyperbolique un domaine du plan \mathbb{R}^2 , muni d'une distance qui ne sera pas la distance euclidienne, mais dont les géodésiques pourront s'exprimer par des courbes usuelles de la géométrie euclidienne (droites, cercles).

2. Le disque de Poincaré

Pour ce modèle, on "projette" \mathcal{H} sur le plan xOy à partir du point $O' = (0, 0, -1)$. Autrement dit, on considère les points a', h', b' obtenus comme intersections du plan xOy avec les droites OA , OH et OB respectivement.

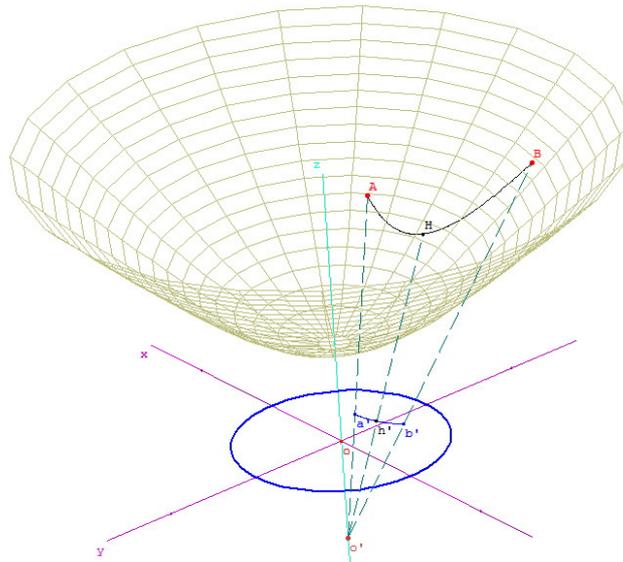
Autrement dit, on considère le disque unité

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$$

i.e.

$$\mathcal{B} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}.$$

C'est le disque unité ouvert, i.e. sans le cercle qui le borde. Autrement dit, c'est l'ensemble des points du plan qui sont à une distance euclidienne de l'origine O strictement inférieure à 1.

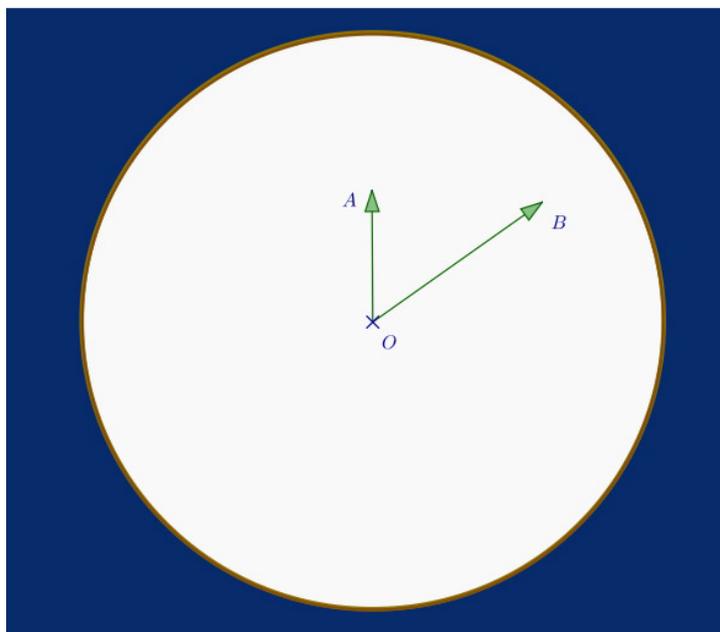


Le disque de Poincaré

- **Distance** : on définit sur \mathcal{B} une nouvelle distance d_2 telle que $d_2(a', b') = d(A, B)$, où A, B, a', b' correspondent aux points de la figure ci-dessus. (On peut définir intrinsèquement d_2 , cf. *Annexe 3*).

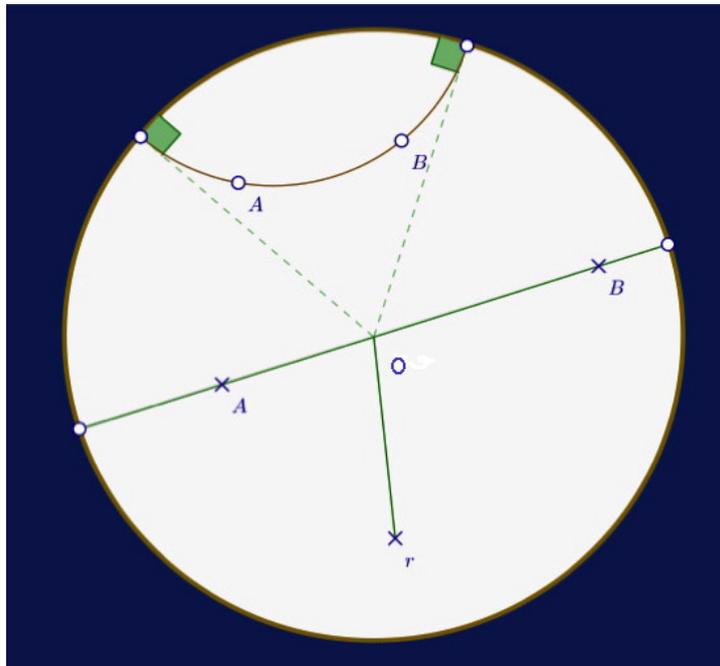
On appelle **disque de Poincaré**, que l'on note \mathbb{D} , le disque \mathcal{B} muni de la distance d_2 .

- **Géodésiques** : soient A et B deux points de \mathbb{D} .



On montre que dans \mathbb{D} , la géodésique passant par A et B est :

- le diamètre euclidien AOB si les points A, O, B sont alignés
- l'arc de cercle euclidien passant par A et B , orthogonal au cercle euclidien unité, i.e. les tangentes à l'arc de cercle et au cercle unité forment, à leurs intersections, des angles droits (*cf. dessin ci-dessous et Annexe 3*).

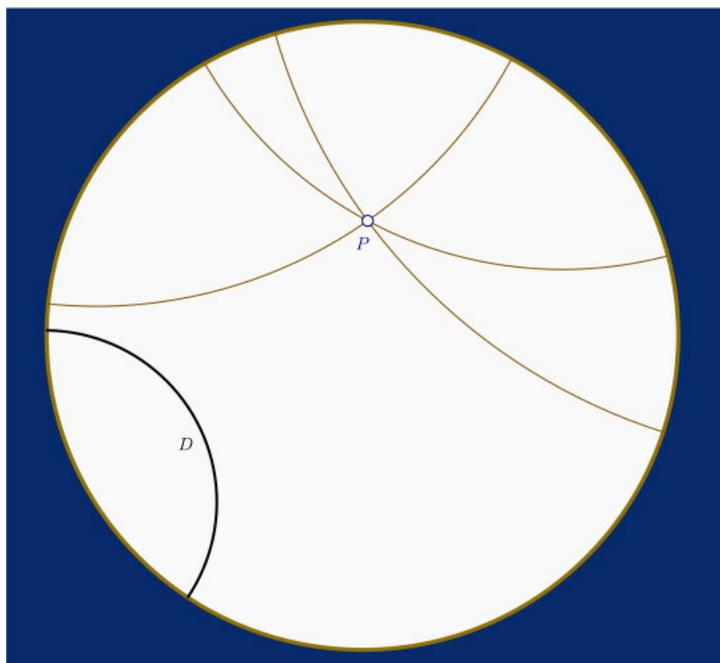


Remarque importante : On a $\lim_{r \rightarrow 1} d_2(O, r) = +\infty$, (cf. Annexe 3).

Autrement dit, quand on se rapproche du cercle unité, les longueurs hyperboliques, i.e. pour la distance d_2 , tendent vers l'infini. Pour cette raison, le cercle unité est appelé, dans ce contexte, *cercle à l'infini*. Les géodésiques (diamètres ou arcs de cercles orthogonaux au cercle unité) sont donc de longueur hyperbolique infinie.

Observons (d'abord) que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants (H.Poincaré).

- **Parallèles :** Par un point P extérieur à une géodésique D , il passe une **infinité de géodésiques parallèles à D** , (Non P5).



On montre, (cf. Annexe 3), que la somme des angles d'un triangle (géodésique) est inférieure ou égale à π , (**non P5'**), et que l'aire d'un triangle (géodésique) dont les angles aux sommets sont α, β, γ est

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

3. Le demi-plan de Poincaré

On suppose que le plan est rapporté à un système d'axes orthonormés et on considère l'ensemble \mathbb{H} des points (x, y) dont l'ordonnée y est strictement positive. On peut exprimer intrinsèquement ceci de la façon suivante :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\},$$

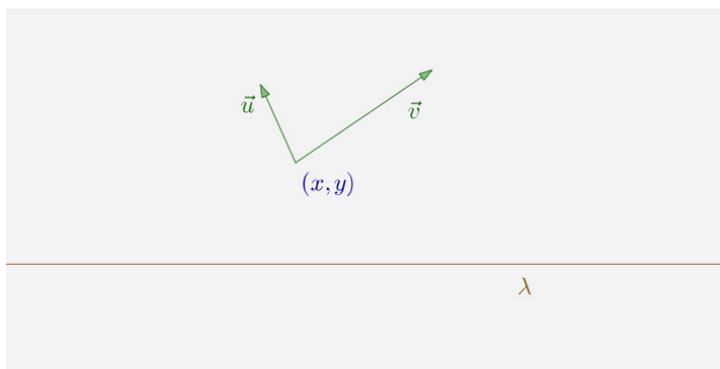
i.e.

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \mid y > 0\}.$$

On notera que la droite $\lambda = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'appartient pas à \mathbb{H} .

On définit sur cet ensemble \mathbb{H} une nouvelle distance d_3 , (cf. Annexe 4). Cette distance est associée au "produit scalaire" défini ci-dessous.

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ et un point (x, y) dans \mathbb{H} . On suppose que ces deux vecteurs ont leur origine au point (x, y) et on définit un nouveau produit scalaire, qu'on notera $\langle -, - \rangle_{(x,y)}$.



On pose

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle_{(x,y)} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{y^2}$$

où $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ est le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^2 . (La dépendance de l'expression ci-dessus relativement au point (x, y) est expliquée à l'Annexe 4).

Alors, la longueur du vecteur \vec{u} est donnée par (cf. page 6)

$$\|\vec{u}\|_{(x,y)} = \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle_{(x,y)}} = \sqrt{\frac{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}{y^2}} = \frac{\|\vec{u}\|}{y}$$

et l'on voit que $\|u\|_{(x,y)}$ tend vers l'infini quand y tend vers 0.

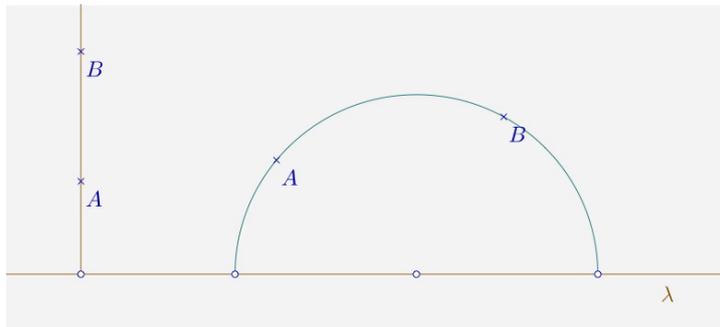
Pour cette raison, la droite λ est appelée *droite à l'infini*.

Définition : Le **demi-plan de Poincaré** est l'ensemble \mathbb{H} muni de la distance d_3 .

Géodésique passant par deux points A et B :

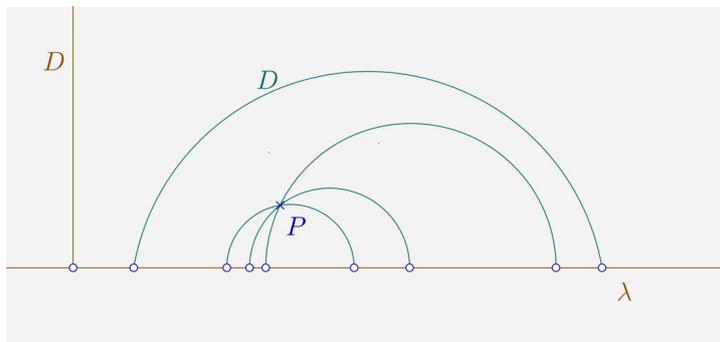
Premier cas : Les deux points A et B sont sur une droite euclidienne verticale, alors la géodésique (pour la distance d_3) joignant ces deux points est la portion de cette droite euclidienne contenue dans \mathbb{H} .

Second cas : Sinon, la géodésique (pour la distance d_3) est le demi-cercle euclidien passant par A et B et centré sur λ , (cf. Annexe 4).

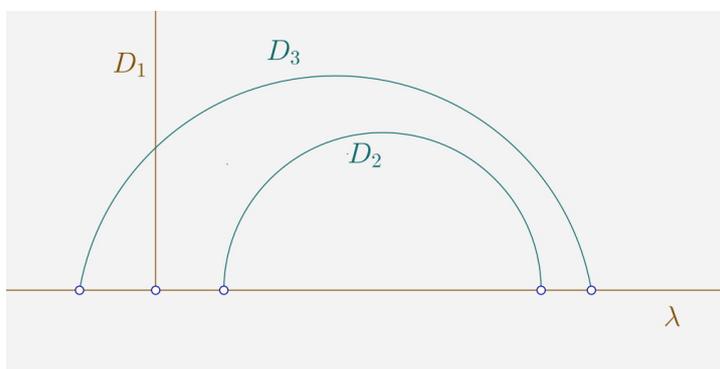


Angles : Soient D et D' deux géodésiques sécantes : on montre que leur angle θ est l'angle des tangentes euclidiennes à D et D' en leur point d'intersection, (*cf. Annexe 4*).

Parallèles : Par un point P extérieur à une géodésique D , il passe une infinité de géodésiques parallèles à D , (**non P5**).



Remarque : la notion de géodésiques parallèles **n'est pas transitive**.



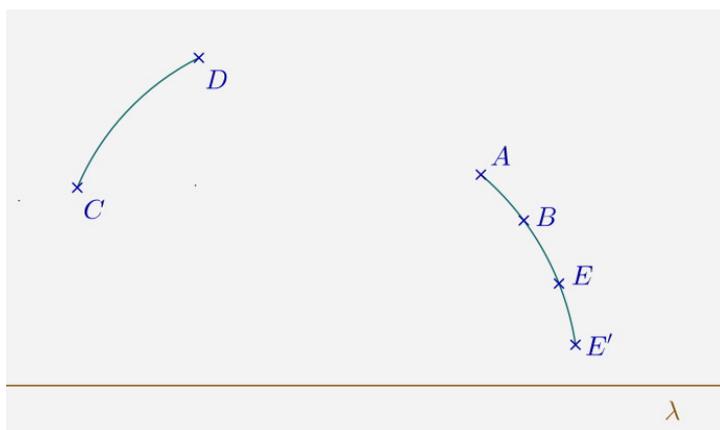
Les géodésiques D_1 et D_2 sont parallèles, ainsi que les géodésiques D_2 et D_3 , alors que les géodésiques D_1 et D_3 ne sont pas parallèles.

Proposition.

La géométrie ainsi définie sur \mathbb{H} satisfait aux postulats P1, P2, P3, P4.

En effet

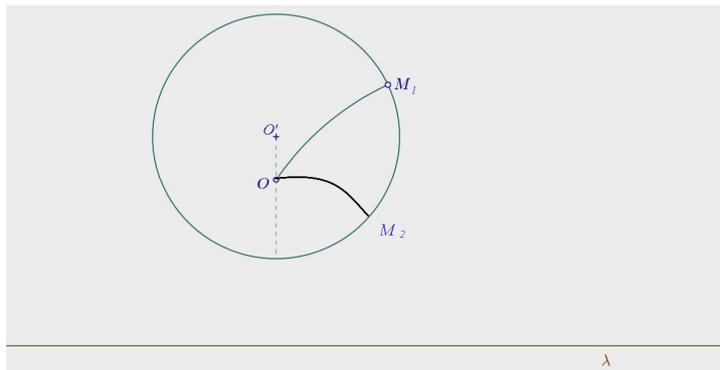
- P1 : déjà vu.
- P2 :



Quand on se déplace sur la géodésique AB en se rapprochant de λ , la distance tend vers l'infini. On peut donc choisir un point E' tel que

la distance BE' soit arbitrairement grande. Par conséquent, on peut choisir un point E entre B et E' tel que la distance BE soit égale à la distance CD .

- P3 : Soit O un point de \mathbb{H} et r une longueur. Puisque, entre O et la droite λ la distance d_3 est infini, l'ensemble des points M vérifiant $d_3(O, M) = r$ est entièrement contenu dans \mathbb{H} . Par conséquent, les cercles dont le centre est un point de \mathbb{H} et de rayon donné existent dans \mathbb{H} . On verra à l'Annexe 4 que la représentation d'un cercle pour la distance d_3 dans le demi-plan de Poincaré est un vrai cercle euclidien mais dont le centre euclidien est décalé par rapport au centre hyperbolique (rappelons que lorsqu'on se rapproche de λ , la distance d_3 entre deux points augmente). Autrement dit, étant donné un point O de \mathbb{H} et un rayon R , il existe un point O' de \mathbb{H} et un rayon R' tels que l'ensemble des points M de \mathbb{H} vérifiant $d_3(O, M) = R$ coïncide avec le cercle euclidien de centre O' et de rayon R' .



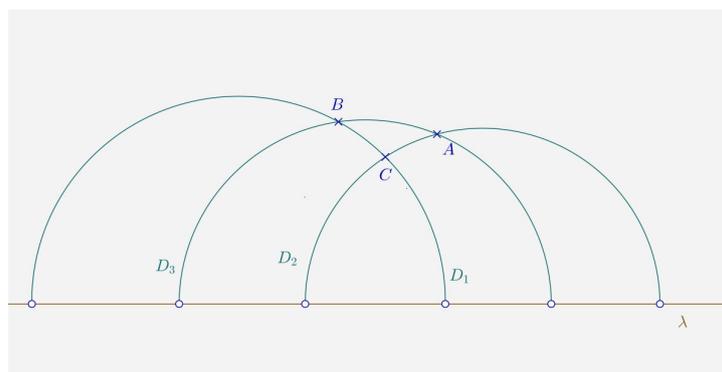
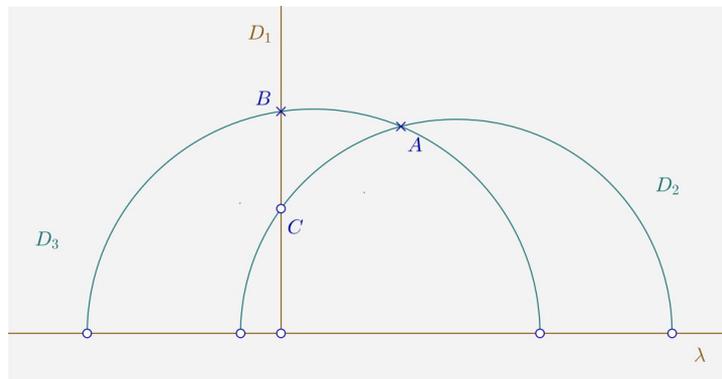
$$d_3(O, M_1) = d_3(O, M_2) = R$$

(car plus on se rapproche de λ , plus les distances sont grandes).

- P4 : Les angles étant les mêmes que dans le cas euclidien, P4 est satisfait.

- nonP5 : est satisfait.

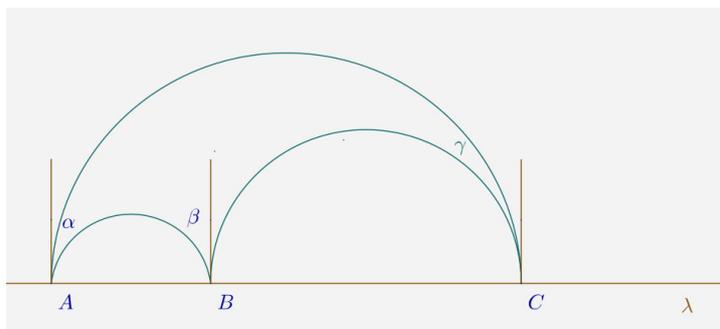
Triangles (géodésiques) : Il y a deux types de triangles



La somme des angles d'un triangle est inférieure à π . Soit ABC un triangle (géodésique) dont on note α, β, γ les angles en, respectivement, A, B, C .

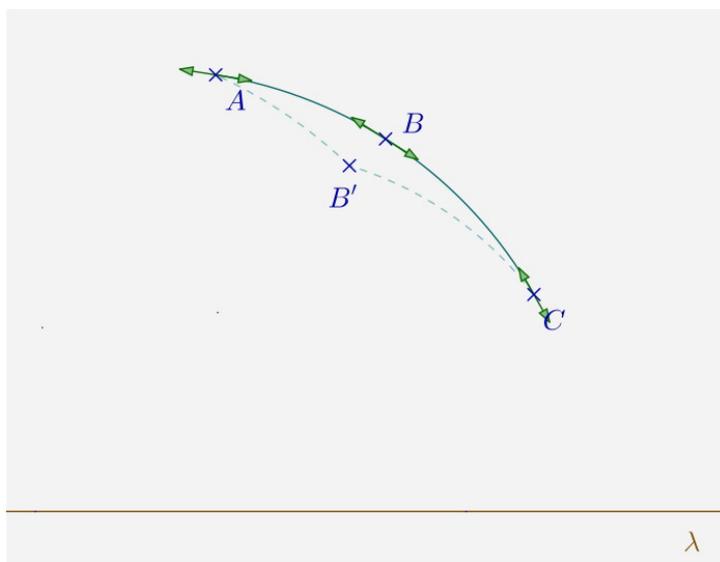
Cas extrêmes :

a) $\alpha + \beta + \gamma = 0$



(chacun des angles α , β , γ est nul)

b) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

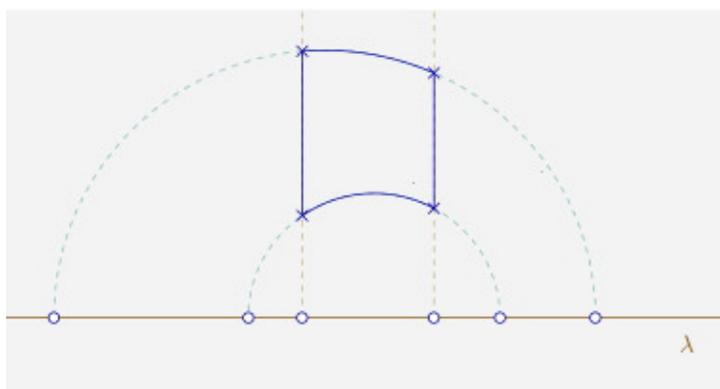
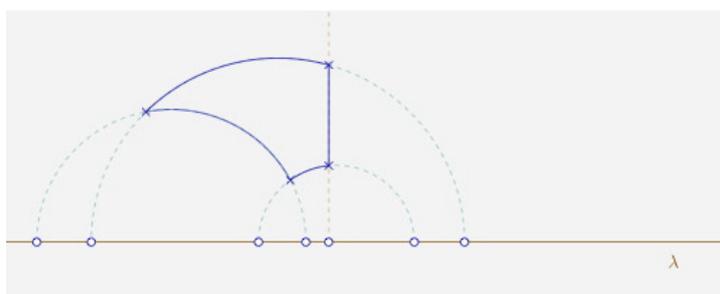
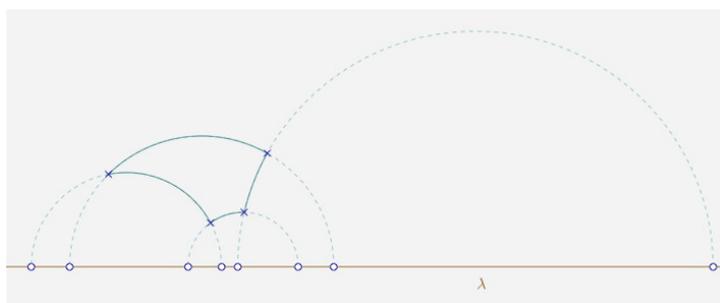


(quand le point B' se rapproche de B , les angles α et γ tendent vers 0 et l'angle β tend vers π)

On montre que l'aire d'un triangle est égale à $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, (cf. *Annexe 4*).

Des calculs simples (i.e. faisables par des élèves de terminale S) permettent de calculer la circonférence d'un cercle, l'aire d'un disque, l'aire d'un polygone à n côtés (qui est égale à $(n - 2)\pi - \sum \text{angles}$), etc.

Quadrilatères : Il y a trois types de quadrilatères



Il n'existe pas de rectangle ! En effet, s'il existait un "vrai" rectangle (i.e. un quadrilatère non plat avec quatre angles droits), on pourrait le décomposer en deux "vrais" triangles et la somme des angles du quadrilatère serait égale à la somme des angles des deux triangles. On aurait donc

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 2\pi$$

avec $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < \pi$ et $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < \pi$. Impossible.

On trouvera en *Annexe 5* des compléments mathématiques et des exemples d'applications des GNE "au réel".

Annexe 1 - Le plan euclidien

Longueur d'une courbe plane.

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne, le minimum de la distance entre deux points distincts A et B est la longueur du segment de droite joignant A à B . En effet, soit \mathcal{C} le graphe d'une fonction de classe C^1 (i.e. fonction dérivable à dérivée continue) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. On sait que pour calculer la longueur de \mathcal{C} , on peut procéder de la manière suivante : on considère des points $M_0 = A, M_1, \dots, M_i, \dots, M_n = B$ sur la courbe \mathcal{C} et on considère la courbe \mathcal{C}_n formée par les segments de droites $M_i M_{i+1}$, $0 \leq i \leq (n-1)$. La longueur L_n de la courbe \mathcal{C}_n est la somme des longueurs des segments $M_i M_{i+1}$ et la longueur de la courbe \mathcal{C} est $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. Le résultat découle alors de l'inégalité triangulaire vérifiée par la distance.

Plus généralement, si la fonction γ est donnée sous forme paramétrique, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où les fonctions $x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont de classe C^1 , la longueur de la courbe \mathcal{C} est donnée par

$$\int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

et un calcul simple donne le résultat.

Produit scalaire dans \mathbb{R}^2 .

La notion de produit scalaire sur un espace vectoriel est définie de manière intrinsèque (*forme bilinéaire symétrique définie positive*), et on montre que si la dimension de l'espace vectoriel est finie, il existe une base de cet espace vectoriel relativement à laquelle l'écriture du produit scalaire a la forme indiquée au paragraphe I. En particulier, pour tout produit scalaire $\langle -, - \rangle$ défini sur \mathbb{R}^2 , il existe une base telle que, pour tous vecteurs \vec{V} et \vec{V}' qui s'écrivent relativement à cette base $\vec{V} = (X, Y)$ et $\vec{V}' = (X', Y')$, on a

$$\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle = XX' + YY'.$$

Droites parallèles

La définition de droites parallèles dans un plan (deux droites sans point commun) ne se généralise pas à l'espace (deux droites dans l'espace qui ne sont pas dans un même plan peuvent ne pas avoir de point commun sans être parallèles). On est donc amené à définir la notion de parallélisme de deux droites de la manière suivante.

On sait qu'une droite D est définie par un point et un vecteur directeur \vec{V} . Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Cette définition s'étend aisément aux droites de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$.

Annexe 2 - La géométrie sphérique.(cf. [Perrin])

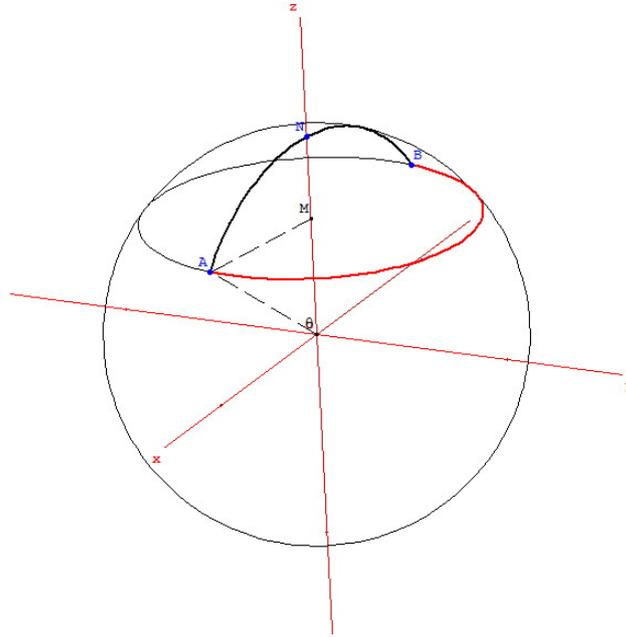
Les géodésiques sont les grands cercles.

La démonstration complète de ce résultat (pourtant très intuitif) est difficile. Nous allons en donner une version simplifiée en admettant d'abord que la longueur de toute courbe dans l'espace \mathbb{R}^3 est supérieure à la longueur de sa projection dans un plan.

En admettant ce résultat, il est clair qu'alors les géodésiques de la sphère sont des courbes obtenues comme intersection de la sphère avec un plan. Par conséquent, ce sont nécessairement des cercles. Soient A et B deux points distincts sur la sphère. Il s'agit donc de montrer que, parmi tous les arcs de cercles tracés sur la sphère et passant par A et B , le plus court correspond au grand cercle passant par ces deux points.

Rappelons qu'un *grand cercle* est l'intersection de la sphère et d'un plan passant par son centre. Deux points sur un cercle déterminent deux arcs de cercles ; si ces deux points ne sont pas diamétralement opposés, il y a un "petit" arc et un "grand" arc de cercle joignant ces deux points.

Notons Γ le grand cercle passant par A et B (on note R son rayon) et l_{AB} la longueur de son "petit" arc compris entre A et B (en noir sur la figure ci-dessous). Considérons C un autre cercle passant par A et B , de centre M et de rayon r : notons L_{AB} la longueur de son "petit" arc compris entre A et B . Sans perte de généralité, on peut supposer que ces cercles correspondent à ceux de la figure ci-dessous, cas dans lequel L_{AB} (en rouge) vaut la moitié du périmètre du cercle C .



On a $r = R\sin\theta$ et, donc, $L_{AB} = \pi R\sin\theta$. D'autre part, on a $l_{AB} = R2\theta$. Or, sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a $\pi\sin\theta \geq 2\theta$, d'où $L_{AB} \geq l_{AB}$.

Aire d'un triangle (géodésique).

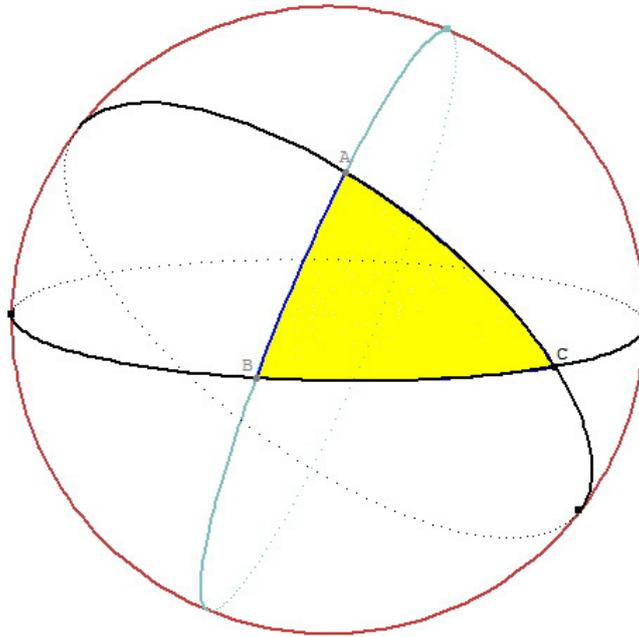
Soit ABC un triangle (géodésique) sur la sphère unité : on note α, β, γ ses angles en, respectivement, A, B et C et \mathcal{A} son aire. Nous allons montrer que

$$\mathcal{A} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Une aire étant un nombre positif ou nul, il en découle que dans un triangle (géodésique) sur la sphère, la somme des angles est supérieure à π .

Par analogie avec les fuseaux horaires, on appelle *fuseau* la portion de la sphère unité déterminée par deux grands cercles passant par des points antipodiques. Il est facile de vérifier que si l'angle au centre du fuseau est θ , l'aire de ce fuseau est 2θ .

Considérons maintenant un triangle (géodésique) ABC sur la sphère unité.



Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le grand cercle passant par B et C est dans le plan de l'équateur et que le point A se trouve dans l'hémisphère nord S^+ . L'aire de S^+ est 2π . Or, S^+ est formé de la réunion suivante : le fuseau de sommet B contenant le triangle ABC , le fuseau de sommet C contenant le triangle ABC (on compte ainsi deux fois l'aire du triangle ABC), le fuseau de sommet A contenant le triangle antipodique à ABC , moins ce triangle dont l'aire est égale à \mathcal{A} par symétrie.

On a donc

$$2\pi = 2\beta + 2\gamma - \mathcal{A} + 2\alpha - \mathcal{A},$$

d'où

$$\mathcal{A} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Géométrie elliptique

Comme on l'a remarqué en II.4, en géométrie sphérique il existe des couples de points (les points antipodiques) par lesquels il passe une infinité de géodésiques. Pour remédier à ce problème (on veut que deux points distincts définissent une unique géodésique), tout en conservant les propriétés de la géométrie sphérique (en particulier la négation de **P5**), on procède de la façon suivante : on remplace la sphère S par la

surface \bar{S} obtenue en identifiant les points antipodiques. On peut alors se restreindre à l'hémisphère nord, équateur compris, et identifier les points antipodiques de cet équateur. On peut représenter cette surface en la projetant sur le plan de l'équateur : on obtient un disque dont les points diamétralement opposés doivent être identifiés. Les géodésiques sont des arcs de cercles qui joignent deux points opposés du disque.

Annexe 3 - Le disque de Poincaré. (cf. [Ghys])

Distance

Le disque de Poincaré est $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On définit sur \mathbb{D} une norme par : pour tout \vec{v} , vecteur d'origine un point z , $\|\vec{v}\|_2 = \frac{1}{1-|z|^2} \|\vec{v}'\|$, où la dernière norme est la norme euclidienne. Pour une courbe de classe C^1 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$, la longueur de la courbe, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ s'exprime alors

$$\text{long}_2(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|_2 dt,$$

et on définit la distance entre deux points z_1 et z_2 de \mathbb{D} par

$$d_2(z_1, z_2) = \inf(\text{long}_2(\gamma)),$$

le \inf étant pris sur toutes les courbes γ de classe C^1 joignant z_1 à z_2 .

Géodésiques

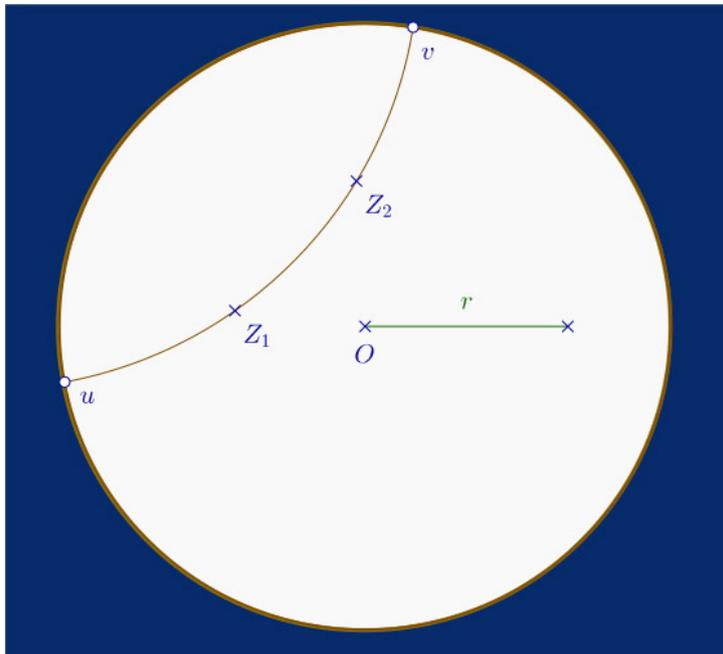
Soit r un point de \mathbb{D} . Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ est une courbe joignant le centre O de \mathbb{D} à r , la projection radiale $|\gamma| : [0, 1] \rightarrow [0, 1[\subset \mathbb{D}$ joint aussi O à r et sa longueur est plus petite que celle de γ (car la projection radiale d'un vecteur est plus courte que ce vecteur). Donc l'unique courbe qui minimise la longueur long_2 entre O et r est le rayon Or . Sa longueur est

$$\int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Il est donc clair que $\lim_{r \rightarrow 1} d_2(O, r) = +\infty$, justifiant ainsi la remarque du paragraphe III.2.

Soient deux points z_1 et z_2 de \mathbb{D} : il existe une isométrie qui envoie z_1 sur l'origine O et z_2 sur un point r de l'axe réel positif. La géodésique joignant z_1 à z_2 est donc l'image du rayon Or par l'isométrie inverse.

Par conséquent, déterminer la géodésique joignant deux points qui sont tous les deux distincts de l'origine, consiste à déterminer l'image d'un segment radial par une homographie. (*Les isométries de \mathbb{D} sont les rotations de centre O ou les homographies. Les homographies envoient un cercle sur un cercle et préservent l'angle d'intersection entre les cercles, cf, par exemple [Lafontaine] ou [Audin].*) Par conséquent, l'image d'un diamètre de \mathbb{D} par une homographie est un arc de cercle contenu dans \mathbb{D} et orthogonal au cercle unité.



Annexe 4 - Le demi-plan de Poincaré

Le demi-plan de Poincaré est le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

avec le produit scalaire dans chaque plan tangent¹ $T_z\mathbb{H} = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ donné par

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle_{(x,y)} = \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{y^2}$$

où $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2 . Ce produit scalaire induit la norme

$$\|\vec{w}\|_{(x,y)} = \frac{\|\vec{w}\|}{y}$$

Géodésiques

On déduit de l'expression de la norme ci-dessus que la longueur d'un chemin de classe C^1 , $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ est donnée par

$$L_\gamma = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt$$

et la distance d_3 entre deux points z et w de \mathbb{H} est définie par

$$d_3(z, w) = \inf_\gamma L_\gamma$$

où le inf est pris sur l'ensemble des chemins de classe C^1 , $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ tel que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = w$.

Supposons que les points z et w sont sur une demi-droite verticale : $z = ic$ et $w = id$, avec $d > c$. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ tel que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = w$, γ de classe C^1 . Alors

$$L_\gamma = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{d}{c}\right).$$

D'autre part, pour le chemin $\alpha : [c, d] \longrightarrow \mathbb{H}$ défini par $\alpha(t) = it$, on a

$$L_\alpha = \int_c^d \frac{\|\alpha'(t)\|}{\text{Im}(\alpha(t))} dt = \int_c^d \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{d}{c}\right).$$

1. De manière générale, étant donné une surface S (suffisamment régulière) et un point M de cette surface, on considère le plan tangent à S en M et on considère le produit scalaire de deux vecteurs dans ce plan.

Par conséquent, la géodésique joignant ic à id est le segment de droite verticale entre ces deux points.

Soient maintenant deux points distincts z et w de \mathbb{H} , non situés sur une demi-droite verticale. Alors, l'unique demi-cercle \mathcal{C} centré sur la droite $y = 0$ passant par z et w est transformé par une isométrie de \mathbb{H} en un segment vertical, (cf. [Lafontaine]). Il résulte de ce qui précède que \mathcal{C} est la géodésique de \mathbb{H} joignant z et w .

Angles

Soient D et D' deux géodésiques sécantes : leur angle θ est l'angle des tangentes euclidiennes à D et D' en leur point d'intersection. En effet

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle_{(x,y)}}{\|\vec{u}\|_{(x,y)}^{1/2} \|\vec{v}\|_{(x,y)}^{1/2}} \\ &= \frac{\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{y^2}}{\frac{\|\vec{u}\|^{1/2}}{y} \frac{\|\vec{v}\|^{1/2}}{y}} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^{1/2} \|\vec{v}\|^{1/2}} \end{aligned}$$

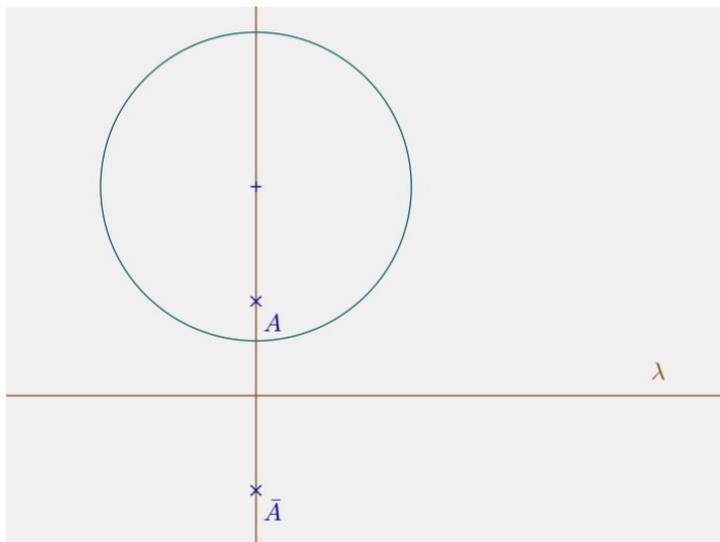
Cercle dans \mathbb{H} .

Pour tout point M de \mathbb{H} , on note \overline{M} son symétrique par rapport à la droite $y = 0$. On peut alors interpréter géométriquement la distance d_3 sur \mathbb{H} en posant

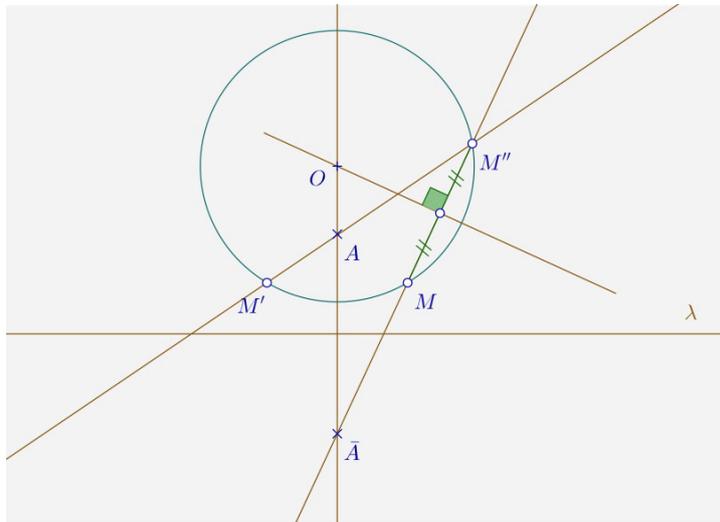
$$d_3(M, N) = \operatorname{Argth}\left(\frac{MN}{\overline{MN}}\right)$$

où Argth est la fonction réciproque de la fonction th , i.e., définie sur $[0, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ par $\operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Alors, le cercle de centre A et de rayon r dans \mathbb{H} est l'ensemble des points M tels que $d_3(A, M) = r$, i.e. $\frac{AM}{\bar{A}M} = th(r)$. Or, on sait que l'ensemble des points M du plan vérifiant $\frac{AM}{\bar{A}M} = k$ est un cercle dont le centre est sur la droite $\overline{A\bar{A}}$. On vérifie que pour $k = th(r)$, ce cercle est entièrement dans le demi-plan supérieur.



On peut construire le centre O de ce cercle de la manière suivante : si l'on connaît un point M de ce cercle non situé sur la droite $\overline{A\bar{A}}$, alors le point M' symétrique de M par rapport à $\overline{A\bar{A}}$ appartient aussi au cercle, ainsi que le point M'' obtenu comme intersection de la droite \overline{AM} avec la droite AM' . Le centre O du cercle est alors l'intersection de la médiatrice de MM'' avec la droite $\overline{A\bar{A}}$, (cf. dessin ci-dessous).

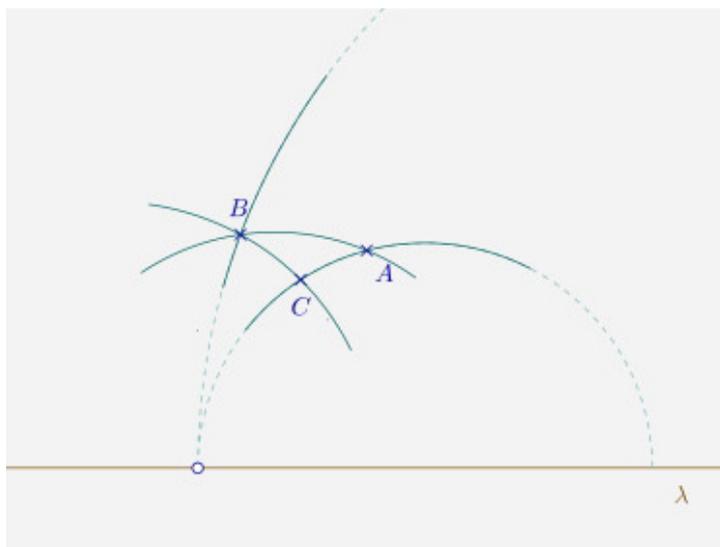


Aire d'un triangle (géodésique).

Soit ABC un triangle (géodésique) dans \mathbb{H} , d'angles aux sommets α, β, γ . Alors son aire est

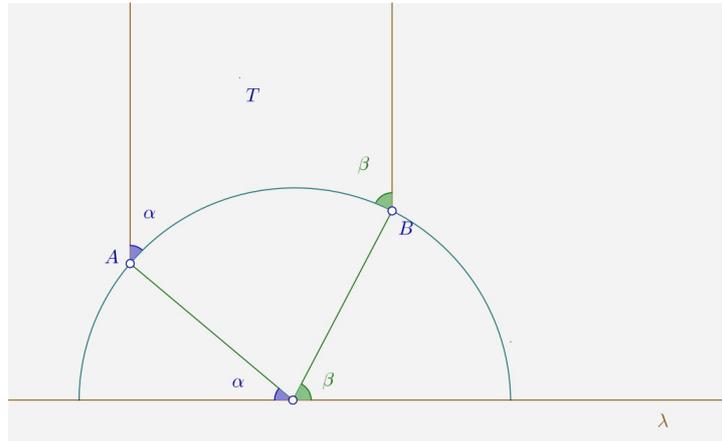
$$\mathcal{A} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Tout triangle est la différence de deux triangles ayant un sommet à l'infini (cf. figure ci-dessous).



Par conséquent, il suffit de faire le calcul pour ces triangles.

On peut supposer que le point à l'infini de T (cf. ci-dessous) n'est pas sur le bord du demi-plan



On doit calculer

$$\int \int_T \frac{dx dy}{y^2}$$

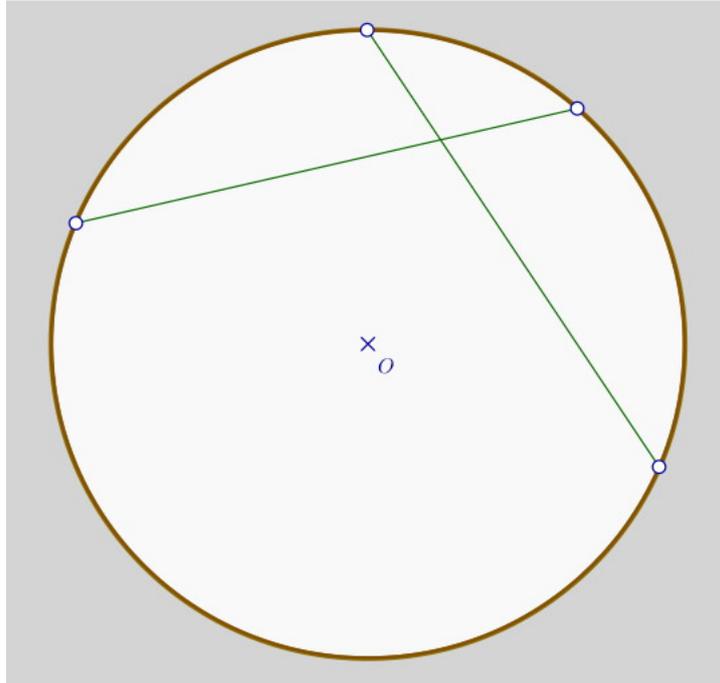
qui, par la formule de Stokes, est égal à

$$\int_{\delta T} \frac{dx}{y}.$$

où δT est le bord de T . Il est constitué de deux demi-droites verticales et de l'arc de cercle joignant A et B que l'on paramètre en coordonnées polaires :

$$\int_{\delta T} \frac{dx}{y} = \int_{arc AB} \frac{dx}{y} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-r \sin \theta}{r \sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta.$$

D'où le résultat.



L'utilisation de ce modèle nécessite de bien maîtriser le birapport, (cf [Audin]).

2. Un théorème de classification, (cf. [Ghys])

Théorème. Soit (X, d) un espace métrique ayant les propriétés suivantes :

- (X, d) est une surface (i.e. tout point de X admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2) ;
- (X, d) est 2-homogène (i.e. si $d(x, y) = d(x', y')$, il existe une isométrie qui envoie x sur x' et y sur y') ;
- (X, d) est un espace géodésique (i.e. pour tout couple de points (x, y) , il existe une courbe $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(l) = y$ et qui est une isométrie sur son image, de sorte que $d(x, y) = l$).

Alors, (X, d) est isométrique à l'un des trois exemples suivants :

- le plan euclidien ;
- un sphère ou le quotient d'une sphère dans lequel on identifie les paires de points antipodaux (espace elliptique de Klein) ;
- le disque de Poincaré (dont la distance est la distance hyperbolique à une constante multiplicative près).

3. Un modèle exotique, (cf. [Ghys])

On considère \mathcal{E} l'ensemble des ellipses du plan euclidien, centrées à l'origine, bordant un domaine d'aire 1. On peut interpréter une telle ellipse e comme la sphère unité pour une norme $\| - \|_e$. On peut définir sur cet ensemble de "points" une distance d ($d(e_1, e_2) = \ln(\sup_{v \neq 0 \in \mathbb{R}^2} \frac{\|v\|_{e_1}}{\|v\|_{e_2}})$). On vérifie que (X, d) satisfait aux hypothèses du théorème et que, compte tenu de la distance, ce n'est ni le plan euclidien, ni un espace sphérique ou elliptique. C'est donc un modèle de la géométrie hyperbolique.

4. La géométrie de Minkovski

On considère l'"espace-temps", i.e. l'ensemble

$$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t), \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

où (x, y, z) désignent les coordonnées d'un point dans l'espace et t représente le temps.

Si cet espace était muni de la distance donnée par le produit scalaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

on obtiendrait l'espace euclidien \mathbb{R}^4 . (Alors, l'ensemble des points équidistants d'un point donné est une (hyper)-sphère.)

On munit cet espace du "produit scalaire" défini par

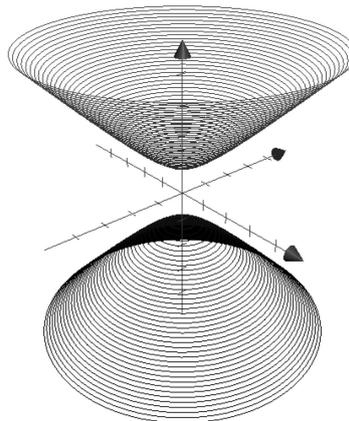
$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$$

où c est la vitesse de la lumière ($c = 299\,792\,458$ m/s).

La géométrie induite par ce "produit scalaire" est appelée : **géométrie de Minkovski**, ou encore, \mathbb{R}^4 muni de cette géométrie est appelé **espace de Minkovski**.

C'est l'espace de la relativité restreinte

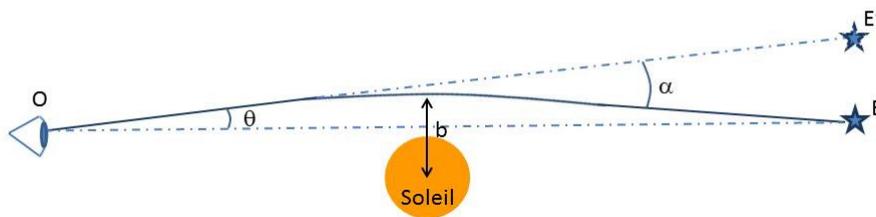
Dans cet espace, l'ensemble des points équidistants (i.e. à égale distance spatio-temporelle) d'un point donné est un hyperboloïde.



Hyperboloïde à deux nappes d'équation $x^2 + y^2 = z^2 - 1$

La lumière ne se déplace pas en ligne droite!!!

Déflexion des rayons lumineux



$$\alpha \approx \frac{4 G M}{c^2 b}$$

$\theta \approx 1$ sec d'arc (dans le cas du soleil).

L'angle θ a été mesuré en 1919 lors d'une éclipse du soleil.

C'est exactement la déflexion prévue par la théorie de la relativité. Newton (i.e. la mécanique classique) donnait la moitié de la déflexion réelle.

5. Le cône de lumière

Le cône est la "surface" d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$$

i.e.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

Le premier membre représente le carré de la distance de l'origine A au point de l'espace de coordonnées (x, y, z) : notons cette distance d . On a alors

$$d^2/t^2 = c^2$$

i.e.

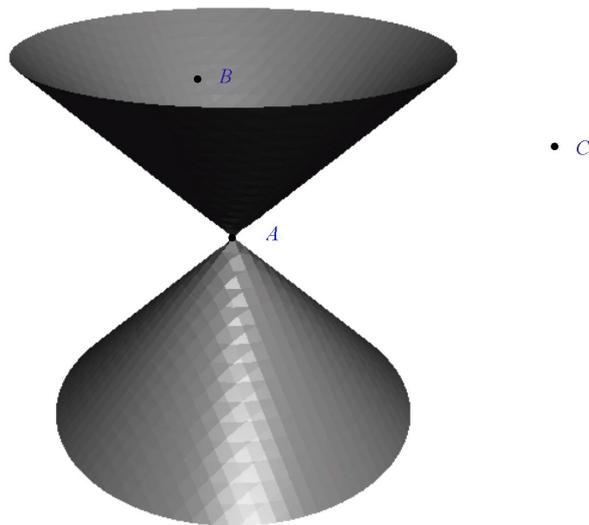
$$d/t = c$$

L'événement (ou point de l'espace-temps) C à l'extérieur du cône est tel que $d/t > c$. Par conséquent, cet événement ne peut être relié causalement à l'événement A .

L'événement (ou point de l'espace-temps) B à l'intérieur du cône est tel que $d/t < c$. Il peut donc être relié causalement avec A .

L'intérieur supérieur du cône peut être vu comme l'ensemble des événements futurs par rapport à A et l'intérieur inférieur peut être vu comme l'ensemble des événements passés par rapport à A .

Un système qui passe par les points de l'espace-temps du cône se déplacent à la vitesse de la lumière. Ce cône correspond à la limite physique des points de l'espace-temps qui peuvent être reliés causalement à A .



cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$

Bibliographie

- [Audin] Michèle AUDIN - *Géométrie* Collection Enseignement Sup ////
Mathématiques, EDP Sciences.
- [Ghys] Etienne GHYS - *Poincaré et son disque*. www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/disque-poincare.pdf
- [Perrin] Daniel PERRIN - *Les géométries non euclidiennes*. www.math.univ-psud.fr/~perrin/Conferences/Romilly.pdf
- [Lafontaine] Jacques LAFONTAINE - *Résumé d'un cours de Géométrie*. www.Math.univ-montp2.fr/~lafontaine/coursgeo.pdf
- [Roizès] Olivier ROIZES -
- [R01] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique01>
De l'hyperboloïde au disque de Beltrami-Poincaré.
- [R02] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique02>
Une utilisation des h-réflexions : (h)-pavage directionnel et (h)-billard.
- [R03] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique03>
h-polygones réguliers et porisme de Steiner.
- [R04] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique04>
Familles de n-gones en porisme de Steiner.
- [R05] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique05>
Polynômes de degré 3 et courbes elliptiques.
- [R06] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique06>
Fibration de Hopf de S^3 grâce aux quaternions classiques et à la projection stéréographique tendue à \mathbb{R}^4 .
- [R07] <http://vimeo.com/geometryinteractivideo/geometriehyperbolique07>
La pseudo-sphère.