

	<b>Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes</b>	
--	--	---

## FICHER SATELLITE

<b>Disciplines</b>	Mathématiques – Sciences physiques - Philosophie
<b>Thème</b>	Géométries non euclidiennes
<b>Descriptif</b>	Ce document est destiné essentiellement à l'auto-formation des enseignants de mathématiques, de SPC et de philosophie. Il offre quelques repères historiques et épistémologiques sur les géométries non euclidiennes. Certains éléments pourront également nourrir les discussions en classe, lorsqu'il s'agira, par exemple, de présenter la démarche historique du mathématicien qui a conduit à l'élaboration de nouvelles géométries ou de discuter les obstacles à leur émergence.
<b>Objectifs</b>	En termes de contenus, ce document vise d'une part à mettre en perspective la géométrie en la situant entre logique et intuition au cours de son évolution historique d'Euclide à Hilbert et Klein. D'autre part, ce document pose les principaux jalons historiques sur les géométries non euclidiennes en mettant en avant les enjeux conceptuels.
<b>Fichiers constitutifs</b>	histoire_GNE.pdf
<b>Mots-clés</b>	Géométries non euclidiennes, histoire des mathématiques, épistémologie des mathématiques
<b>Auteur</b>	Thomas Hausberger

<sup>1</sup> Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Pointier Christophe, Reboul Henri, Vergnerie Cédric

# Quelques repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes

## 1. La Géométrie : entre logique et intuition, d'Euclide à Hilbert et Klein.

L'objectif de cette première partie est de mettre en perspective la géométrie en la situant entre logique et intuition. En effet, l'épistémologie de la géométrie présente, de façon assez caractéristique, une tension entre ces deux pôles. Ce questionnement nous amène également à rendre compte de l'évolution historique de la géométrie d'Euclide à Hilbert et Klein, au cours de laquelle la géométrie passe du statut de science mathématique appliquée à celui de mathématique pure (formelle).

### a) La géométrie d'Euclide, une modélisation de l'espace sensible

La géométrie, en tant que science hypothético-déductive, est une branche des mathématiques née de la pratique des mathématiciens de la Grèce Antique. Les mots mathématicien et géomètre étaient mêmes synonymes et Platon a fait écrire sur le fronton de l'Académie « que nul n'entre ici s'il n'est point géomètre ». La science géométrique a été consignée au sein des *Eléments* d'Euclide, lequel aurait vécu vers l'an 300 avant J.-C (l'on dispose de très peu d'informations biographiques à son sujet). Les *Eléments* constituent l'ouvrage non religieux le plus souvent réédité de toute l'histoire (plus de 1000 éditions imprimées depuis 1482). Il a servi de manuel à de nombreuses générations de mathématiciens.

Comment s'organise un tel traité et de quoi la Géométrie parle-t-elle ? Voici quelques extraits des premières pages du livre I des *Eléments* :

#### DÉFINITIONS

1. Un point est ce qui ne peut être divisé en parties.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
- (...)
15. Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé à l'intérieur de cette figure étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.
- (...)
24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.
- ...

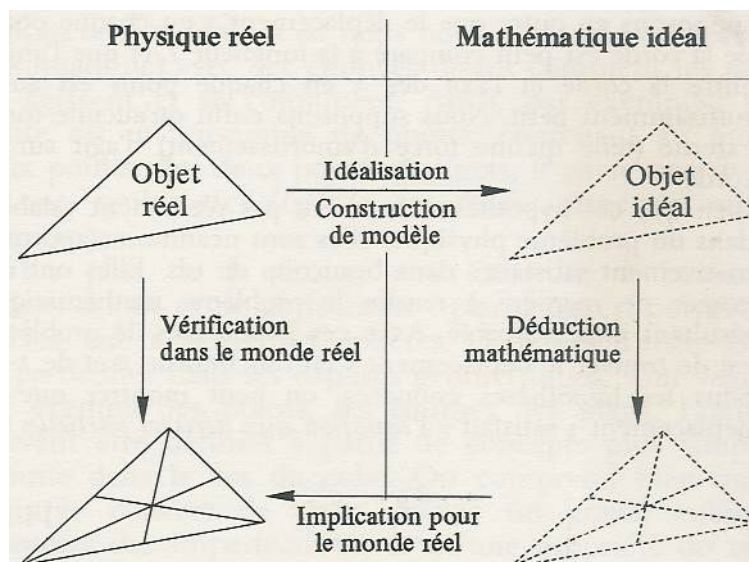
Euclide nomme ici ligne ce que nous appelons segment. Noter la hardiesse de la définition : le segment est défini par « passage à la limite » à partir du rectangle, dont la largeur diminue jusqu'à s'annuler. La définition 4 renvoie probablement à l'idée de symétrie : la droite est de toutes les courbes celle qui possède le plus de symétries (tout point est centre de symétrie).

Les objets mathématiques sont obtenus par abstraction à partir de l'espace sensible. Ils modélisent donc des objets du monde réel. C'est cependant le Monde Intelligible que visent les platoniciens (voir la ressource satellite *Théorie de la connaissance de Platon*). Le géomètre raisonne ainsi dans l'abstrait, par déduction logique à partir des hypothèses qu'il pose. Le dialogue entre Socrate et Glaucon dans *la République* de Platon (voir document 1 en annexe) résume bien la conception grecque des idéalités mathématiques ainsi que la méthode du géomètre, fondée sur le raisonnement hypothético-déductif.

Le philosophe Ferdinand Gonseth ([G2]) appelle « abstraction par schématisation » ce processus mental qui conduit à la formation des idéalités mathématiques (nous parlerons également d'*idéalis*ation) :

*Le maître propose à l'élève certaines réalisations physiques : le faîte d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou encore la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée ; et il lui demande d'y apercevoir la notion à définir. Il exige de savoir distinguer dans chacun de ces exemples concrets une chose idéale qu'ils ont en commun : la droite géométrique. [...] Il lui demande encore d'apercevoir dans les objets proposés les premières propriétés des êtres abstraits qu'il vient d'imaginer : qu'une droite est déterminée par deux points, etc. En un mot, il exige de l'élève un acte de véritable création mentale, dont il faut se garder de diminuer l'importance. [...] Il n'est pas question de dire que la droite est dans le faîte du toit ou dans la ligne de visée : on sait fort bien qu'il n'y a pas de trajectoire parfaitement droite. [...] On rend en partie compte de ces circonstances en disant que la droite est une image schématique de la réalité.*

On peut résumer la situation comme suit :



Le travail du géomètre est en quelque sorte dialectique, entre l'abstrait et le concret, dans un va et vient entre le monde mathématique idéal et le monde physique réel.

## b) L'appareillage hypothético-déductif chez Euclide

Le traité d'Euclide se poursuit par l'énoncé des principes.

### DEMANDES

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

### NOTIONS COMMUNES

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
5. Le tout est plus grand que la partie.

Ainsi que l'a clarifié Aristote (-384 à -322) dans son *Organon*, un principe est une proposition première (qui ne résulte pas d'autre chose, n'a pas d'antécédent), conformément à son étymologie : qui est au commencement, à l'origine et commande à la suite. Les *axiomes* sont des principes communs à toutes les sciences ; ils sont connus par intuition, s'imposent à l'esprit. Les principes propres (spécifiques à la géométrie, par exemple) sont appelés *hypothèses* par Aristote.

Les *notions communes* d'Euclide renvoient à ce qu'Aristote appelle axiome et les *demandes* (appelées également *postulats*) aux hypothèses. Le lecteur pourra consulter le document 2 de l'annexe pour plus de détails sur les nuances à faire entre ces différentes notions, selon Aristote ou Euclide.

A la différence des définitions et notions communes, les demandes (ou postulats) sont des principes *indémontrables ou non démontrés*. Ainsi est-il possible de discuter le caractère non-démontrable (premier) d'un postulat : c'est justement ce qui se produit à propos du cinquième postulat d'Euclide, énoncé ci-dessus, et dont il sera question plus en détail dans la seconde partie de ce document. La postérité ne retiendra que le terme axiome, qui d'ailleurs ne traduit plus la conception d'Aristote : de nos jours, une science formelle comme les mathématiques pose, pour chacune de ses théories (la géométrie, l'arithmétique, la théorie des probabilités, etc.) des principes appelés axiomes, tenus pour vrais sans invoquer l'intuition (voir paragraphe d) ci-dessous). Comme nous allons le voir, les géométries non-euclidiennes ne sont pas étrangères à cette évolution.

### c) La géométrie, une science abstraite (à l'issue de sa formalisation par Euclide) ?

Dans son effort de rationalité, le géomètre semble ainsi avoir réussi à se libérer de l'étreinte du monde sensible pour fonder une science qui est montrée comme un idéal de rigueur. Est-ce le cas ?

D'une part, les définitions précédentes, de type ontologique (elles visent à dire, par exemple, la nature de la droite), ne prennent sens que par référence au monde sensible. Nous traiterons plus loin en détail du problème de la définition d'une ligne droite.

Ouvrons une petite parenthèse à propos du problème de la définition en général. Pascal ([Pa]) pose très clairement dans *De l'esprit géométrique* le problème : la définition d'un mot emploie d'autres mots ; ainsi, pour ne pas tomber dans une régression à l'infini ou dans un cercle vicieux, est-il nécessaire d'introduire des termes primitifs, qui ne sont pas définis. Pour Pascal, la solution au problème réside dans la « lumière naturelle » : l'usage des termes primitifs est commun à tous les hommes car la « nature leur a donné pareille idée ». Cependant, cette faculté de l'esprit ne donne pas accès à la nature des choses : ce n'est que le rapport entre un terme et sa désignation qui est commun à tous les hommes. On en retiendra que la définition des êtres géométriques ne peut se passer de la référence au réel (à moins de faire de la géométrie une science purement formelle, comme le fera Hilbert).

D'autre part, les démonstrations d'Euclide elles-mêmes ne sont pas exemptes d'appel à l'intuition : par exemple, Euclide ne justifie pas que les deux cercles se coupent dans sa démonstration de la proposition 1 (voir document 3 de l'annexe). Le système d'axiomes d'Euclide s'avère incomplet pour éviter un tel appel à l'intuition : comme le fait remarquer Poincaré, les axiomes qu'Euclide n'énonce pas se rattachent essentiellement à l'idée de déplacement (Euclide justifie l'égalité de deux triangles en les déplaçant de façon à ce qu'ils se superposent).

Pour bien voir que la géométrie est longtemps restée engagée dans le sensible sans en prendre conscience, examinons brièvement les *Eléments de géométrie* de Legendre ([Le]) dont voici un extrait de la 15<sup>ème</sup> édition, parue en 1849 :

- ▲ Tout corps occupe, dans l'espace indéfini, un lieu déterminé qu'on appelle volume.
- ▲ La surface d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.
- ▲ Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé ligne.
- ▲ Un point est le lieu où deux lignes se coupent.
- ▲ On conçoit les volumes, les surfaces, les lignes, indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.
- ▲ On donne le nom de figures aux volumes, aux surfaces et aux lignes.
- ▲ La géométrie a pour objet la mesure de l'étendue des figures et l'étude de leurs propriétés.

Les quatre premières définitions donnent corps aux notions primordiales (sans les définir davantage que ne le fait Euclide mais en inversant l'ordre) et les suivantes postulent que ces notions conservent un sens en dehors de leur support physique.

Voici un théorème :

« Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut élever qu'une. »

La démonstration que donne Legendre (voir document 4 de l'annexe) est une simple description, à peine idéalisée, d'une expérience physiquement réalisable. Cela montre bien que la géométrie en tant que science abstraite n'est pas encore pleinement constituée. Elle le sera avec Hilbert.

#### **d) La géométrie de Hilbert, une science formelle détachée de ses références au réel**

L'axiomatique de Hilbert (1898, voir document 5 de l'annexe) offre un système complet<sup>2</sup> d'axiomes et témoigne de l'évolution de l'écriture des axiomatiques depuis les *Eléments* d'Euclide. Elle est parue après l'avènement des géométries non euclidiennes qui ne sont pas étrangères à cette évolution.

Voici les principales différences, comparativement aux traités antérieurs (Euclide, Legendre, etc.) :

- Dès le départ, les objets sont regardés comme des objets de la pensée (« nous pensons trois systèmes de choses ») vidés de leur contenu ontologique (conception dite nominaliste). Selon une boutade célèbre de Hilbert, « On doit toujours pouvoir dire, à la place de points, droites et plans, tables, chaises et chopes de bière ». Cela permet en effet de nous prévenir contre un appel à l'intuition spatiale demeuré implicite. Les objets sont ainsi désignés par des symboles.
- Ce n'est pas sur les objets eux-mêmes, mais sur les *relations* entre objets que Hilbert porte son attention : avec Hilbert, les mathématiques deviennent une science relationnelle. Hilbert définit ainsi les relations d'appartenance, d'ordre, de congruence, de parallélisme et de continuité par des axiomes qui posent les propriétés caractérisant ces relations. Ce procédé permet de faire abstraction de la nature particulière des objets (c'est la solution de Hilbert au problème de la définition évoqué plus haut avec Pascal). Les axiomes sont obtenus par l'analyse de l'intuition sensible, en relation avec un objectif de nature logique : obtenir un système *complet* d'axiomes, ce qui permettra de discuter le rôle et la portée de ces derniers, par exemple de l'axiome des parallèles.

L'axiomatique de Hilbert se constitue donc à partir du contenu classique de la géométrie par un travail d'abstraction : il s'agit de mettre en évidence le système formel qui structure la géométrie classique, en s'affranchissant de toute référence au monde sensible. A la différence d'Euclide, Hilbert utilise donc également le mot abstraire dans son second sens : « faire abstraction de » au sens de « se détacher de ». L'axiomatique de Hilbert s'oppose en cela à l'axiomatique classique, qui ne réalise pas une séparation aussi nette entre le logique et l'intuitif et ne porte donc pas la même exigence de rigueur.

Avec Hilbert, la vérité des axiomes n'est plus fondée sur leur adéquation avec le réel, que l'on vérifierait par intuition (donc en mettant en avant leur évidence), mais sur le principe de cohérence interne : un système d'axiomes valide est un système non-contradictoire, donc qui ne peut admettre comme conséquence à la fois un énoncé et son contraire.

#### **e) Géométrie et mathématiques contemporaines**

L'aboutissement est une vision très abstraite de la géométrie, comme en témoignent les écrits de Félix Klein ([K]) décrivant le programme d'Erlangen en 1872 :

*Comme généralisation de la géométrie se pose ainsi la question générale que voici :*

*« Etant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en déduire les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. »*

2 Comme nous l'avons vu au paragraphe c), l'axiomatique d'Euclide est incomplète au sens où la proposition 1 d'Euclide (voir document 3 en annexe), par exemple, ne peut être démontrée à partir des axiomes d'Euclide (la démonstration d'Euclide fait appel à l'intuition de la figure). Ces considérations conduiront les logiciens à définir la *complétude* d'un système axiomatique comme la propriété que *toute* proposition que l'on peut formuler dans la théorie est soit démontrable soit réfutable (i.e. sa négation est démontrable) à partir des axiomes. Malheureusement, les théorèmes d'incomplétude de Gödel montreront que la géométrie, comme l'arithmétique, possède des propositions indécidables. Nous disons donc que le système d'axiomes de Hilbert est complet au sens où toutes les propositions d'Euclide sont rigoureusement démontrables à partir des axiomes de Hilbert, bien qu'il demeure incomplet au sens de la logique moderne.

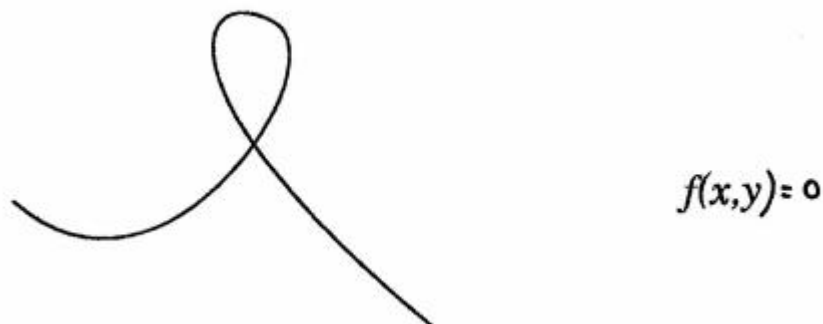
En d'autres termes, la géométrie est « l'étude des invariants pour l'action d'un groupe sur un ensemble ». Ce point de vue actuel, très formel et général, est caractéristique de la pensée mathématique contemporaine structuraliste qui résulte de l'impact des structures algébriques modernes (groupes, anneaux, corps, etc.) sur l'ensemble du corpus des mathématiques. Ces structures ont d'ailleurs émergé grâce aux axiomatiques qui, comme celles de Hilbert, visent à dégager la structure logique en se focalisant sur les relations entre objets indépendamment de leur nature, permettant ainsi des rapprochements entre des domaines des mathématiques éloignés en apparence.

La préface de G. Th. Guibault à l'ouvrage *Symétrie et mathématiques modernes* de H. Weyl ([W]), paru en 1952, illustre bien le nouveau paradigme <sup>3</sup>:

*Peut-être comprendrez-vous comment il est permis, aux mathématiciens d'aujourd'hui, de proclamer le déclin de la « géométrie ». Il n'y a plus de géométrie, comme le savait déjà Descartes. L'objet d'une technique mathématique n'est défini que par les relations qui y figurent. Dès le début du siècle dernier, on s'aperçut qu'il convenait d'instaurer une classification rationnelle des propositions géométriques. Poussée à des exigences extrêmes, cette classification aujourd'hui dite « structurale », établit un primat incontesté de l'algèbre, qui est à la mathématique entière ce que la mathématique est aux autres sciences. Sous cette impitoyable clarté, la géométrie classique se fane brusquement et perd son éclat.*

*Aux lecteurs de ce livre je dirai donc finalement : ce ne sont pas les images qui comptent ici, c'est ce qu'il y a « derrière », c'est leur signification – qui est ALGEBRIQUE.*

En voici une illustration contemporaine :



à gauche, une courbe pour Zariski (1899-1986) ; à droite, ce qu'est une courbe pour Chevalley (1909-1984). Ces deux mathématiciens célèbres ont ainsi adopté et véhiculé des épistémologies de la géométrie assez différentes, bien que travaillant tous les deux dans le domaine de la géométrie algébrique.

## f) L'exemple de la définition de la ligne droite

Les traités mathématiques laissent entrevoir de nombreuses définitions de la ligne droite, ce qui illustre bien l'évolution de la géométrie à travers les âges. On distingue ainsi :

▲ des définitions empiristes comme celle de Hadamard : « elle peut être considérée comme

<sup>3</sup> Cette préface est caractéristique de l'épistémologie structuraliste. Signalons cependant qu'elle donne une interprétation erronée de la pensée de Weyl, lequel s'est rattaché au courant intuitionniste (par opposition au formalisme de Hilbert) initié par Brouwer.

engendrée par un point qui se déplace sur elle » (en référence au principe d'inertie). Hadamard donne l'exemple du fil tendu : « la ligne droite est la plus simple des lignes dont le fil tendu nous donne l'image » ;

^ des définitions ontologiques : « une longueur sans largeur qui est également placée entre ses points » (Euclide) ; « ce qui est déterminé par la donnée de deux points est l'extensum le plus simple passant par eux, que nous appellerons droite » (Leibniz) ; « le plus court chemin entre deux points » (Legendre) ;

^ des définitions nominalistes : chez Hilbert, points, droites et plans sont des termes primitifs qui n'ont pas à être définis ;

^ des définitions équationnelles (une courbe d'équation  $ax+by+c=0$ ), des définitions issues de l'algèbre linéaire (un espace affine de dimension 1).

Les dernières définitions témoignent d'une réduction de la géométrie à l'analytique. Or du point de vue logique, il s'agit de deux domaines équivalents, toutes les opérations arithmétiques pouvant être interprétées à partir des axiomes de la géométrie euclidienne. Bien que le débat du XIX<sup>ème</sup> siècle entre géomètres analytiques (les tenants de Descartes) et synthétiques (les tenants d'Euclide) soit dépassé, le choix d'une axiomatique de la géométrie reste délicat. Il dépend des objectifs que l'on poursuit (par exemple, de la classe de problèmes que l'on veut résoudre). Le choix d'une entrée par l'algèbre linéaire, du moins pour les mathématiques enseignées à l'Université, est motivé par le fait qu'il permet rapidement d'offrir un panorama de l'ensemble des géométries (affine, projective, non-euclidiennes, etc.) sous une présentation unifiée. Le prix à payer est une distance accrue avec les notions intuitives : quel est le rapport entre un espace affine de dimension 1 et un trait dessiné à la règle sur une feuille de papier ou au tableau noir ? Ce lien s'élucide à la lumière des différentes abstractions et réécritures conceptuelles opérées par les mathématiciens, dont nous avons essayé de rendre compte ci-dessus.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) écrit dans l'Encyclopédie :

*La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de géométrie.*

Il fait référence à la remise en question du cinquième postulat d'Euclide, qui conduisit à de nombreuses démonstrations erronées de ce dernier. D'Alembert pensait qu'il en était ainsi par manque d'une définition correcte de la droite. Nous allons maintenant raconter cette histoire qui vit l'avènement de nouvelles géométries : les géométries non-euclidiennes.

## **2. L'histoire des géométries non-euclidiennes**

Désignant désormais les géométries non-euclidiennes par l'abréviation GNE, nous distinguons, à la suite des historiens, trois phases :

- la préhistoire des GNE, mettant en scène Euclide (-III<sup>o</sup>), les commentateurs grecs des *Elements*, dont Proclus (V<sup>o</sup>), puis les commentateurs arabes tels que Al-Khayyam (1045-1130) ;
- une période transitoire de mise en œuvre de démarches non-euclidiennes non reconnues en tant que telles par leurs auteurs, qui apparaissent donc comme des précurseurs : ce sont, entre autres, les travaux de Wallis (1616-1703), Saccheri (1677-1733), Lambert (1728-1777), Clairaut (1713-1763), Legendre (1752-1833) ;
- enfin, l'histoire des GNE écrite par leurs pères fondateurs : Gauss (1777-1855), Lobatchevsky (1793-1856), Bolyai (1802-1860) et Riemann (1826-1866).

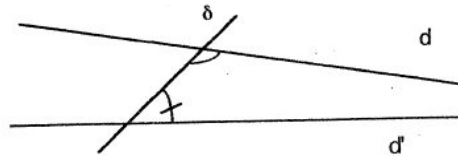


## a) La préhistoire des GNE

Les GNE ont émergé d'un questionnement logique sur les axiomes de la géométrie, autour de la remise en question du cinquième postulat d'Euclide.

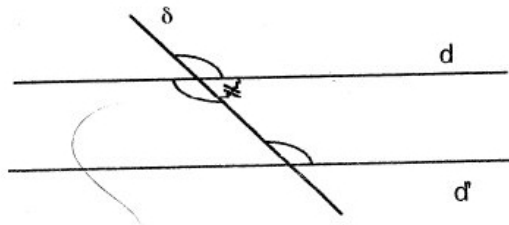
Rappelons ce dernier :

*Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*



De ce postulat résulte la proposition suivante des *Eléments* (essentiellement sa contraposée<sup>4</sup>) :  
*Proposition N°29*

*Une droite tombant sur 2 droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux.*



d'où l'on déduit ensuite les propriétés des parallélogrammes.

Citons deux autres propositions :

*Proposition N°30*

*Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

*Proposition N°31*

*Par un point donné, construire une ligne parallèle à une droite donnée.*

On rappelle que deux droites parallèles sont par définition « deux droites qui, prolongées indéfiniment, ne se coupent pas ». La proposition 30 est une conséquence du cinquième postulat, la proposition 31 se démontre sans celui-ci.

Ainsi par un point extérieur à une droite passe une parallèle et une seule à cette droite. De ce fait, le cinquième postulat est également appelé « postulat des parallèles ». De nos jours, on mentionne souvent l'axiome de Playfair :

*Par un point extérieur à une droite passe au plus une parallèle à cette droite.*

L'ensemble des axiomes d'Euclide est logiquement équivalent à l'ensemble des axiomes obtenu en

4 La contraposée d'une proposition « A implique B » (par exemple, « s'il pleut, alors la route est mouillée ») est la proposition « non B implique non A » (sur notre exemple, « si la route n'est pas mouillée, alors il ne pleut pas »). En logique classique, une proposition et sa contraposée sont logiquement équivalentes : elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses, la vérité de l'une implique la vérité de l'autre.

remplaçant le cinquième postulat<sup>5</sup> par l'axiome de Playfair.

La proposition 27 ci-dessous se démontre sans le cinquième postulat. La proposition 29 énoncée plus haut (l'une des conséquences les plus importantes pour la géométrie euclidienne) en est la réciproque.

*Proposition N°27*

*Si une droite tombant sur deux droites fait des angles alternes égaux entre eux, ces 2 droites seront parallèles.*

En fait, tous les énoncés jusqu'à la proposition 29 se démontrent sans ce postulat. Ce fait et la remarque précédente conduisirent les géomètres à se demander **si ce postulat ne pouvait pas être démontré à partir des autres axiomes.**

Mais pourquoi cette présentation du traité d'Euclide dans cet ordre ? Portait-on déjà un certain discrédit au sujet de cet axiome ?

Proclus<sup>6</sup> (V°), un commentateur grec d'Euclide, indique que le propre des axiomes (les notions communes d'Euclide) et postulats est de « ne demander ni démonstration ni assurance géométrique mais d'être acceptés comme tels et de devenir les principes des choses qui viennent à leur suite ». <sup>7</sup> De plus, « les postulats sont telles choses faciles à procurer, fertiles en expédients, sur l'admission desquels l'esprit n'est pas en peine et qui n'a besoin ni d'artifice ni d'expédient ». Il réfute alors son statut au cinquième postulat d'Euclide en montrant d'une part qu'il est démontrable, d'autre part qu'**il ne peut être admis sur la base de l'évidence :**

*Le fait que des lignes droites se rencontrent finalement lorsqu'elles s'inclinent de plus en plus l'une sur l'autre dans leur prolongement est probable et non inéluctable, à moins qu'un raisonnement ne démontre que le fait est vrai pour les lignes droites. En effet, certaines lignes, indéfiniment inclinées l'une sur l'autre, sont asymptotes ; dès lors, ce qui est possible pour ces dernières ne l'est-il pas aussi pour les lignes droites ?*

En fait, Proclus admet dans sa démonstration un résultat équivalent au cinquième postulat (le fait que la distance entre deux parallèles est bornée). Le cinquième postulat n'est donc pas démontré.

Pendant 20 siècles, l'on observera de multiples tentatives de démonstration :

^ à partir des axiomes (les notions communes et les postulats d'Euclide) et des théorèmes de la « géométrie absolue », définie comme l'étude des conséquences logiques de l'axiomatique d'Euclide privée du cinquième postulat ;

5 Au cours de l'histoire des GNE, on trouvera d'ailleurs d'autres axiomes produisant des systèmes axiomatiques logiquement équivalents (donc ayant les mêmes conséquences logiques, engendrant les mêmes théorèmes, car les axiomes de chacun des systèmes peuvent être démontrés à partir des axiomes de l'autre système) :

- Etant donnée une figure, il existe une figure semblable de taille arbitraire (Wallis).
- Il existe deux triangles inégaux ayant les mêmes angles (Saccheri).
- Si dans un quadrilatère trois angles sont des angles droits, alors le quatrième aussi est un angle droit (Clairaut).
- Etant donnés trois points non alignés, il existe un cercle passant par ces 3 points (Legendre, Bolyai).
- On peut construire un triangle ayant une aire donnée, arbitrairement grande (Gauss).

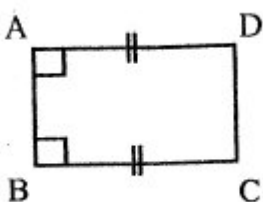
Ces derniers nous renseignent sur la signification du cinquième postulat : il renvoie à une propriété de l'espace, celle de permettre certaines transformations des figures, notamment leur réduction et leur agrandissement.

6 Voir *Les commentaires sur le premier livre des Elements d'Euclide*, traduit du grec par Paul Ver Eecke. Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

7 Il reprend ainsi les conceptions d'Aristote : les axiomes et postulats (ou hypothèses chez Aristote) sont des principes, ils sont donc premiers. Chez Euclide, la situation semble un peu différente : les postulats sont admis sans consensus comme des principes indémontrables *ou non démontrés*, contrairement aux notions communes qui sont strictement indémontrables.

▲ en partant de la négation du cinquième postulat et en cherchant une contradiction.

C'est cette dernière stratégie qu'adoptèrent certains commentateurs arabes des *Elements*, à qui l'on doit également la mise en évidence du lien entre le cinquième postulat et la somme des angles d'un quadrilatère. Voici donc la figure utilisée par Khayyam (1045-1130) :



où il s'agit de montrer que les angles en C et D, qui sont égaux, sont deux angles droits. Cette figure sera reprise plus tard par Saccheri, un précurseur des GNE.

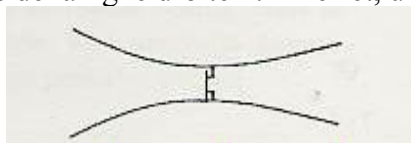
Pour conclure, c'est donc bien au nom d'une certaine conception de l'axiome (évidence de l'accord avec les faits<sup>8</sup>) et dans le cadre d'une investigation d'ordre logique (mise en forme des axiomes de la géométrie) que le questionnement à propos du cinquième postulat a émergé et que l'investigation de géométries non euclidiennes a commencé. Si le cinquième postulat n'est pas admis comme principe, il n'est cependant pas envisagé qu'admettre sa négation puisse aboutir à autre chose qu'une contradiction.

## b) Les précurseurs

Parmi les commentateurs européens, Wallis (1616-1703) montre que le cinquième postulat découle du principe de similitude suivant : « pour une figure quelconque, il en existe toujours une autre de grandeur quelconque qui lui soit semblable », principe qui sera jugé par Laplace au XVIII<sup>ème</sup> siècle plus clair que celui d'Euclide. Saccheri (1677-1733) montrera même qu'il suffit de supposer : « il existe deux triangles inégaux ayant les mêmes angles ».

Les historiens considèrent que Wallis et Saccheri sont des précurseurs des GNE : ils arrivent à des énoncés non euclidiens, mais ne les admettent pas comme tels.

Détaillons le cas de Saccheri : ce dernier reprend la figure de Khayyam et publie « Euclide lavé de toute tache ». Il introduit sous forme d'hypothèses la disjonction de cas : soit les angles en C et en D sont égaux à l'angle droit, soit ils sont plus petits (hypothèse de l'angle aigu), soit plus grands (hypothèse de l'angle obtus). Sous chacune de ces hypothèses, il montre qu'il en est de même de tout quadrilatère. Il exclut ensuite l'hypothèse de l'angle obtus en utilisant le caractère infini d'une droite. Sous l'hypothèse de l'angle aigu, il montre que deux droites sont soit sécantes, soit ont une perpendiculaire commune (et alors elles divergent des deux côtés à partir de cette perpendiculaire), soit sont asymptotes. Mais il conclut en affirmant : « l'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car cela répugne à la nature de la ligne droite ». En effet, une figure du type



s'oppose radicalement à l'intuition.

Lambert (1728-1777), un autre précurseur, montre que sous l'hypothèse de l'angle aigu non

<sup>8</sup> Avec la définition actuelle d'un axiome, il suffit que son introduction ne provoque pas de contradiction pour qu'il puisse être accepté en tant que tel.

seulement la somme des angles d'un triangle est inférieure à  $180^\circ$ , mais la différence à  $180^\circ$  est proportionnelle à l'aire du triangle. Il note la ressemblance de la géométrie plane avec la géométrie sphérique sous l'hypothèse de l'angle obtus, et avec la géométrie d'une sphère imaginaire (de rayon  $iR$ ) dans le cas de l'angle aigu.

Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, beaucoup de mathématiciens s'essaient encore à démontrer le cinquième postulat, parmi lesquels Legendre (1752-1833), qui en donna plusieurs démonstrations. Cependant ces dernières utilisent toutes implicitement des hypothèses équivalentes au postulat, parmi lesquelles : « par tout point pris à l'intérieur d'un angle, il passe toujours une droite coupant les deux côtés de l'angle ».

### c) L'histoire des GNE

Nous arrivons maintenant aux pères des GNE : Gauss, Lobatchevsky, Bolyai et Riemann. De nos jours, la géométrie sphérique est également appelée géométrie de Riemann et la géométrie hyperbolique géométrie de Lobatchevsky.

Le tableau suivant<sup>9</sup> résume différentes propriétés de ces géométries, propriétés qui les distinguent de la géométrie d'Euclide. Ce sont les énoncés non euclidiens obtenus par les précurseurs :

	Euclide	Lobatchevski	Riemann	
Deux droites distinctes se rencontrent en	au plus un	au plus un	un (simplement elliptique) deux (doublement elliptiques)	point points
Étant donné une droite $D$ et un point $P$ n'appartenant pas à $D$ , il existe	une droite et une seule	au moins deux droites	aucune droite	passant par $P$ parallèle à $D$
Une droite	est	est	n'est pas	séparée en deux par un point
Des droites parallèles	sont équidistantes	ne sont jamais équidistantes	n'existent pas	
Si une droite rencontre l'une de deux droites parallèles, elle	doit	peut ou ne peut pas	_____	rencontrer l'autre
L'hypothèse de Saccheri valable est	l'angle droit	l'angle aigu	l'angle obtus	
Deux droites distinctes perpendiculaires à une même droite	sont parallèles	sont parallèles	se rencontrent	
La somme des angles d'un triangle est	égal à	strictement inférieure à	strictement supérieure à	180 degrés
L'aire d'un triangle est	indépendante	proportionnelle au défaut	proportionnelle à l'excès	de la somme de ses angles
Deux triangles avec des angles correspondants égaux sont	semblables	congrus	congrus	

9 extrait de l'ouvrage de Davis et Hersh, l'Univers mathématique, Bordas, 1985, p. 211.

Bolyai (1802-1860) et Lobatchevski (1793-1856) ont continué indépendamment le développement de la géométrie absolue (*i.e.* la géométrie n'utilisant que les notions communes et les quatre premiers postulats d'Euclide).

La citation suivante du père de Bolyai est restée célèbre :

*Pour l'amour de Dieu, renonces-y s'il te plaît. Ne le crains pas moins que les passions sensuelles parce que lui aussi te prend tout ton temps et te prive de la santé, de la paix de l'esprit et de la joie de vivre.*

Le fils répondra :

*J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui... j'ai tiré du néant un nouvel univers.*

Lobatchevski établit des formules reliant les angles d'un triangle et la mesure des côtés en fonction d'un paramètre appelé angle de parallélisme. Pour lui, « les équations précédentes constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire ». Il écrit dans un article intitulé « Géométrie imaginaire » : « c'est en rebroussant pour ainsi dire chemin et en parlant des équations fondamentales que je tâcherai d'introduire leur adoption dans la géométrie et de mettre hors de doute qu'elles puissent jamais mener à une absurdité, sous quelque rapport que ce soit ».

C'est donc hors de la géométrie classique qui est en partie figée par l'habitude (la pratique de la géométrie d'Euclide a en quelque sorte naturalisé ses résultats) et grâce au recul permis par le calcul (les énoncés non euclidiens s'opposent à l'intuition que nous avons du monde sensible) qu'il propose de trouver des éléments permettant de produire l'intégration des GNE au corpus de la géométrie.

Gauss (1777-1855) écrit au père de Bolyai : « si on pouvait montrer qu'il existe un triangle d'aire aussi grande que l'on veut, alors je pourrais prouver la géométrie toute entière de façon absolument rigoureuse. La plupart des géomètres accepteraient certainement cela comme un axiome ; moi, pas ; car il serait fort possible que, si éloignés qu'on eut choisi les sommets du triangle, la surface restât tout de même inférieure à une certaine limite ». Il entreprend des mesures géodésiques pour étayer ses craintes et obtient également des « théorèmes non euclidiens », mais ne diffuse pas ses travaux (pour ne pas affronter les « cris des béotiens »).

Cette citation montre **la faiblesse du concept d'axiome bâti sur la notion d'évidence** qui est subjective. Gauss se situe encore au niveau d'une géométrie expérimentale, il n'a pas tout transposé sur le plan de la logique. Il écrit : « Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace, ce qui aujourd'hui nous est inaccessible. Ainsi la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique ».

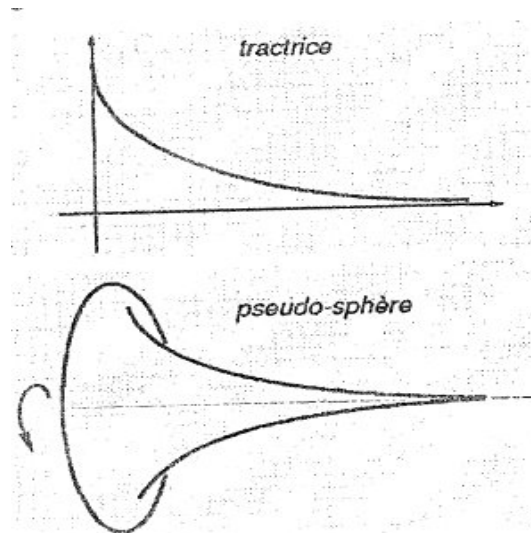
Alors que la géométrie d'Euclide est la géométrie des figures, la quête d'une démonstration du cinquième postulat attire l'attention sur l'espace qui contient ces figures. Cependant, les conceptions dominantes à cette époque sont telles qu'il ne peut exister qu'une seule géométrie : la géométrie euclidienne, de sorte que les géométries imaginaires n'attirent pas l'attention qu'elles méritent. Ce n'est qu'avec les travaux de Riemann, qui bouleverse la notion d'espace, et de Klein, qui classe les géométries, que les GNE acquièrent une importance dans les théories mathématiques.

Riemann (1826-1866) considère des variétés (de dimension  $n$  quelconque) définies par des équations en les paramètres  $(x_1, \dots, x_n)$ . Il fait appel à la géométrie différentielle<sup>10</sup> pour définir les

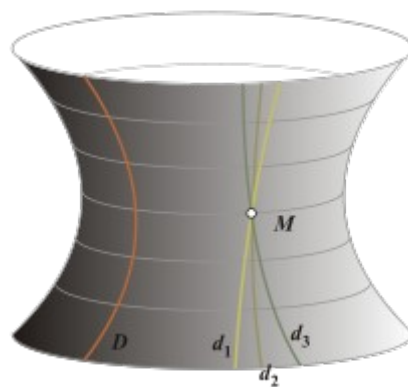
<sup>10</sup> Il définit localement une *métrique* par l'élément différentiel  $ds^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{i,j} dx_i dx_j$  (le cas euclidien

longueurs, les angles et la *courbure*<sup>11</sup> de la variété.

Or l'espace peut lui-même être vu comme une variété. Riemann s'intéresse en particulier aux variétés dans lesquelles les « figures peuvent se mouvoir sans subir d'extension » : il en est en effet ainsi dans la géométrie euclidienne et dans les GNE. Ce sont les variétés à courbure constante. Dans le cas des surfaces (dimension 2), on démontre que les surfaces de courbure nulle peuvent être appliquées sur un plan (par une transformation sans déformation des longueurs), les surfaces de courbure constante  $K > 0$  sur une sphère de rayon  $1/\sqrt{K}$ . Le cas de la courbure négative, qui est nécessaire pour obtenir des réalisations de la géométrie de l'angle aigü de Bolyai et Lobatchevski, a été traité par Beltrami en 1868 : on a recours à la pseudo-sphère, surface de révolution engendrée par une tractrice.



En définitive, on a réalisé les GNE sur des surfaces de l'espace euclidien, quitte à remplacer « ligne droite » par *géodésique*<sup>12</sup>, qui est d'ailleurs la définition de Legendre d'une ligne droite. Par exemple, les droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  ci-dessous sont toutes les trois parallèles à la droite  $D$  :



correspond à  $\sum_{1 \leq i \leq n} dx_i^2$ .

- 11 Intuitivement, « courbe » s'oppose à « droit ». La courbure d'un objet géométrique est une mesure quantitative du caractère « plus ou moins courbé » de cet objet, en chacun de ses points. Le prototype est le cercle : c'est un objet de courbure constante positive, alors que la droite est de courbure constante nulle.
- 12 Une géodésique joignant deux points  $A$  et  $B$  d'une surface donnée est une courbe réalisant, sur la surface, le plus court chemin entre ces deux points. La géodésique est donc la notion qui généralise, sur une surface quelconque, la notion de ligne droite. Les géodésiques du plan euclidien sont les lignes droites. Sur une sphère, les géodésiques sont les « grands cercles » de centre le centre de la sphère et passant par  $A$  et  $B$ .

Il s'agit également de faire la distinction entre *infini* et *illimité* comme le fait remarquer Riemann : « la propriété de l'espace d'être illimité possède une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité<sup>13</sup> de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence ; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu et qu'ainsi l'on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive si petite qu'elle fut ». Or Euclide impose aux droites d'être infinies (« prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite (*i.e.* un segment) donnée »<sup>14</sup>), ce qui élimine la géométrie de l'angle obtus sur la sphère. La remarque de Riemann légitime la géométrie de l'angle obtus, appelée de nos jours (par habitude) géométrie de Riemann, quitte à demander que les droites soient seulement illimitées.

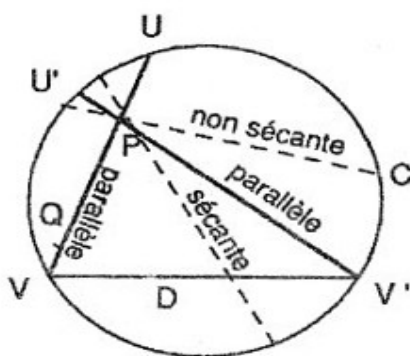
Contemporaine aux GNE, une autre géométrie prend son essor : la géométrie projective. Issue des traités de perspective des peintres et architectes de la Renaissance, inventée par Desargues au XVII<sup>ème</sup> siècle mais éclipsée par l'efficacité de la géométrie analytique de Descartes, elle connaît ses heures de gloire au XIX<sup>ème</sup> siècle. Elle ne pose pas les mêmes problèmes que les GNE, car son propos n'est pas la description de l'espace mais une représentation conventionnelle de celui-ci.

Les transformations projectives sont celles qui préservent l'alignement. De plus, des droites parallèles sont des droites concourantes à l'infini. Les géométries projectives devraient donc apporter quelques éclairages sur la question des parallèles. Or aucun rapport avec les GNE n'est établi avant Klein (en 1871).

Klein s'appuie sur les résultats de Cayley qui est parvenu à définir une métrique sur des espaces projectifs, à l'aide du birapport et après l'introduction d'une conique<sup>15</sup> non dégénérée appelée « l'absolu du plan ». Quand l'absolu est une conique réelle (donc n'ayant pas de point à l'infini), *i.e.* une ellipse, l'ensemble des points situés à l'intérieur de la conique possède les propriétés géométriques du plan de Lobatchevsky, que Klein appelle géométrie hyperbolique.

En prenant pour absolu un cercle, on obtient le modèle dit de « Klein-Beltrami » :

**Le modèle de Klein-Beltrami du plan hyperbolique.**



Dans ce plan, la *distance* entre les points P et Q de la corde UV est définie par le logarithme du birapport des 4 points P, Q, U, V :

$$\ln \left\{ \frac{PU}{PV} : \frac{QU}{QV} \right\}.$$

13 Entendre ici le fait de n'être pas borné (*i.e.* ne pouvoir être inclus dans un volume fini).

14 Toute mesure de la droite est donc infinie.

15 Les coniques du plan sont de trois types : les ellipses (dont le cercle), les hyperboles et les paraboles.

Le lecteur pourra consulter la ressource satellite *Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens* pour plus de détails.

Grâce aux modèles, les GNE deviennent concrètes et acquièrent le même statut logique que la géométrie euclidienne : si cette dernière est non contradictoire, il en est de même des GNE, car ces dernières peuvent être réalisées dans des modèles définis à partir de la géométrie euclidienne. De plus, l'existence des GNE montre que :

**le cinquième postulat n'est pas démontrable à partir des autres axiomes.**

En effet, ces géométries vérifient tous les axiomes de la géométrie d'Euclide, sauf le cinquième postulat qui n'est pas vérifié. Si le cinquième postulat était une conséquence des quatre premiers, alors il devrait être vérifié également. Comme ce n'est pas le cas pour les GNE (alors que cela l'est pour la géométrie euclidienne), le cinquième postulat est en fait logiquement indépendant des quatre premiers axiomes.

En 1900, la cohérence logique<sup>16</sup> de la géométrie euclidienne est ramené par Hilbert à celle de l'arithmétique<sup>17</sup>. Nous avons vu que Hilbert a proposé une nouvelle axiomatisation de la géométrie (euclidienne et non-euclidienne) dans laquelle les définitions perdent tout sens ontologique. L'axiomatique formelle de Hilbert constitue un système complet d'axiomes (l'axiomatique d'Euclide, incomplète, nécessitait encore des appels à l'intuition sensible) et un cadre rigoureux pour discuter la portée de chaque axiome. Tout est transposé au niveau de la logique : discuter quelle géométrie décrit le réel ne relève pas du travail du mathématicien.

Cependant, la question des rapports des GNE avec le réel se retrouve posée lors d'un renouveau de la mathématisation de la physique vers 1920. Alors que les GNE étaient qualifiées de « géométries imaginaires » lors de leur élaboration, elles fournissent finalement le formalisme mathématique approprié pour décrire l'espace dans le cadre de la théorie de la relativité d'Einstein. Pour plus d'informations, le lecteur pourra consulter la ressource satellite *Concept de géométrie non euclidienne en Physique : la relativité générale et la cosmologie*.

En guise de conclusion et de synthèse épistémologique de ce processus de constitution des GNE dans l'histoire, nous pouvons noter, à la suite de Friedelmeyer ([F]), les différences suivantes par rapport à la géométrie euclidienne :

<b>Géométrie euclidienne</b>	<b>Géométries non-euclidiennes</b>
Les axiomes sont le terme final du développement historique.	Ce sont les axiomes qui sont au départ du développement historique.
Les théorèmes se sont constitués avant leur organisation logique, par l'expérience, l'observation, en accord avec l'intuition sensible.	Le commencement historique coïncide avec le début de la logique. Les théorèmes sont issus du développement logique, en rupture avec l'intuition.
La géométrie est un abstrait par rapport à l'intuitif.	La géométrie devient un concret par rapport au logique, au moyen des modèles.

16 On rappelle qu'un système d'axiomes est dit cohérent (ou non-contradictoire) si aucune proposition ne peut être à la fois démontrée et réfutée.

17 Hélas, Gödel démontrera plus tard que l'arithmétique ne suffit pas à démontrer sa propre cohérence. En définitive, la cohérence logique de la géométrie, comme celle de l'ensemble de l'édifice mathématique, repose actuellement sur la théorie des ensembles dont la cohérence est indémontrable. La recherche d'un meilleur fondement mathématique occupe toujours de nos jours un bon nombre de mathématiciens et de logiciens.



## BIBLIOGRAPHIE

- [B] J. Boniface, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Paris : Vrin, 2004.
- [C] J.-L. Chabert, *Les géométries non euclidiennes*, Repères-IREM n°1, octobre 1990, pp. 79-91.
- [G] F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques : de la géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionnisme*, Blanchard, 1926.
- [G2] F. Gonseth, *La méthode axiomatique*, Bulletin de la SMF, tome 67, 1939 ; voir [http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF\\_1939\\_67\\_/BSMF\\_1939\\_67\\_S43\\_0/BSMF\\_1939\\_67\\_S43\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF_1939_67_/BSMF_1939_67_S43_0/BSMF_1939_67_S43_0.pdf)
- [Ca] J. Cavailles, *Méthode axiomatique et formalisme : essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris, Hermann, 1938.
- [Bl] R. Blanché, *L'axiomatique*, Collection Quadrige N°116, PUF, 2009.
- [B] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques : La Mathématique, ou les Mathématiques ?*, dans François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Collection Histoire de la Pensée, Hermann, 1998 [1948].
- [I] D. Gaud, J. Guichard, J.-P. Sicre, J. Souville, *Sur les géométries non euclidiennes : Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math*, IREM de Poitiers, 1995.
- [F] J.-P. Friedelmeyer, *La géométrie : histoire et épistémologie*, diaporama commenté sur le site de Culture math, voir [http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/index.htm#friedel](http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/index.htm#friedel)
- [Pe] J.-P. Petit, *Le géométricon*, collection Les Aventures d'Anselme Lanturlu, Belin, 1985.

### Références historiques citées :

- [Eu] Euclide, *les Eléments*, traduction F. Peyrard, Paris : éd. Blanchard, 1993 (1<sup>re</sup> éd. 1804). Disponible à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q>
- [Le] M.-L. Legendre, *Eléments de géométrie*, 15<sup>ème</sup> édition, 1849. Disponible à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z>
- [Pa] B. Pascal, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, 1658. Disponible à l'adresse [http://fr.wikisource.org/wiki/De\\_l'Esprit\\_g%C3%A9om%C3%A9trique\\_et\\_de\\_l'Esprit\\_de\\_persuader](http://fr.wikisource.org/wiki/De_l'Esprit_g%C3%A9om%C3%A9trique_et_de_l'Esprit_de_persuader)
- [H] D. Hilbert, *les fondements de la géométrie*, édition critique préparée par P. Rossier, Paris : Dunod, 1971. Voir également <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996866.r=Hilbert%2C+David.langFR>
- [K] F. Klein, *Le programme d'Erlangen*, Collection Discours de la Méthode, Gauthiers-Villard,

1974.

[P] H. Poincaré, *Les géométries non euclidiennes*, dans *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1968.

[W] H. Weyl, *Symétrie et mathématiques modernes*, Flammarion, 1964.

## Annexe : textes et documents

Document 1 : extrait de *la République* de Platon

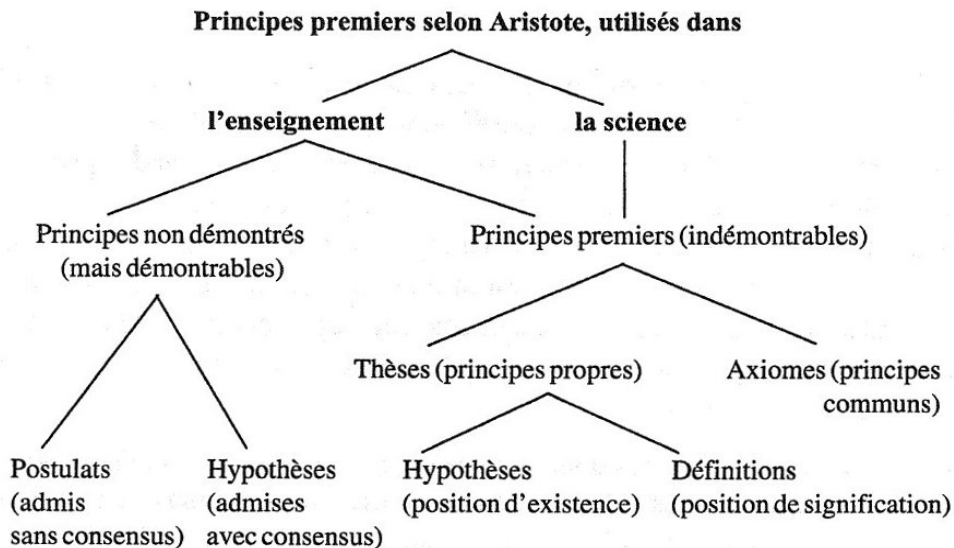
Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et d'autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche: qu'ils les traitent comme choses connues, et que, quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits; qu'enfin, partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquences à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher.

Oui, dit-il, cela, je le sais.

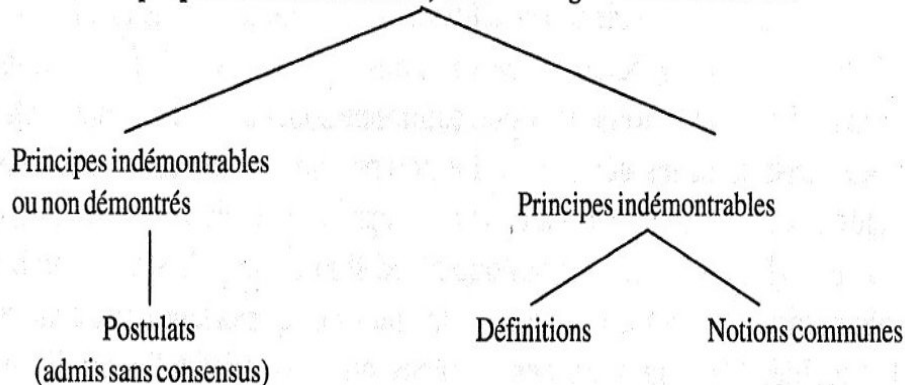
Par conséquent, tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'était aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée.

C'est vrai, dit-il.

Document 2 : comparaison des principes premiers, entre Aristote et Euclide, d'après [B]



**Principes premiers selon Euclide, dans l'enseignement et la science**



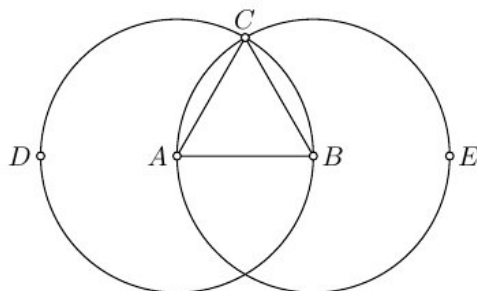
PROPOSITION 1

(Énoncé) Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

(Exposition) Soit  $AB$  une droite donnée et finie.

(Détermination) Il faut construire sur la droite finie  $AB$  un triangle équilatéral.

(Construction) Du centre  $A$  et de l'intervalle  $AB$ , décrivons la circonférence  $BCD$  (Demande 3). Et, de plus, du centre  $B$  et de l'intervalle  $BA$ , décrivons la circonférence  $ACE$ . Et du point  $C$ , où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points  $A$  et  $B$  les droites  $CA$  et  $CB$  (Demande 1).



(Démonstration) Car, puisque le point  $A$  est le centre du cercle  $BCD$ , la droite  $AC$  est égale à la droite  $AB$  (Définition 15). De plus, puisque le point  $B$  est le centre du cercle  $ACE$ , la droite  $BC$  est égale à la droite  $BA$ . Mais on a démontré que la droite  $CA$  était égale à la droite  $AB$ , donc chacune des droites  $CA$  et  $CB$  est égale à la droite  $AB$ . Or les grandeurs qui sont égales à une même grandeur sont égales entre elles (Notion commune 1). Donc la droite  $CA$  est égale à la droite  $CB$ . Donc les trois droites  $CA$ ,  $AB$  et  $BC$  sont égales entre elles.

(Conclusion) Donc le triangle  $ABC$  est équilatéral (Définition 24), et il est construit sur la droite donnée et finie  $AB$ . Ce qu'il fallait faire.

Document 4 : démonstration donnée par Legendre ([Le]) en 1849 de l'existence et de l'unicité de la perpendiculaire à une droite issue d'un point donné de cette droite.

En effet, supposons qu'une droite  $AM$  d'abord couchée sur  $AC$ , tourne autour du point  $A$  : elle formera deux angles adjacents,  $MAC$ ,  $MAB$ , dont l'un  $MAC$ , d'abord très petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre,  $MAB$ , d'abord plus grand que  $MAC$ , ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

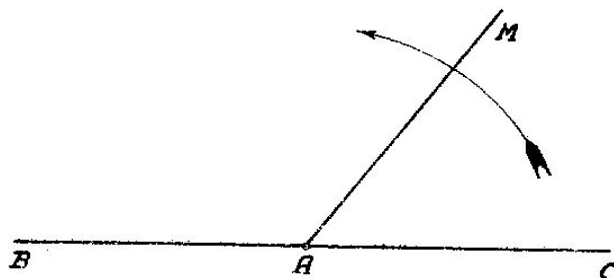


Fig. 1.

L'angle  $MAC$ , d'abord plus petit que  $MAB$ , deviendra donc plus grand que cet angle ; par conséquent il y aura une position  $AM$  de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Document 5 : l'axiomatique de la géométrie donnée par Hilbert ([H]) en 1898

## LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE,

PAR M. D. HILBERT.

*Festschrift* publiée à l'occasion des fêtes pour l'inauguration du monument de Gauss-Weber à Göttingen. — Publiée par les soins du Comité des fêtes. Leipzig, Teubner, 1899.

Traduit par L. LAUGEL.

« Toute science humaine commence par les intuitions, de là passe aux notions et finit par les idées. »

KANT, *Critique de la raison pure*  
(*Théorie élémentaire*, Partie II,  
Section II).

### INTRODUCTION.

La Géométrie, de même que l'Arithmétique, n'exige, pour sa construction logique, qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples. Ces principes fondamentaux sont dits les AXIOMES de la Géométrie. L'exposition de ces axiomes et leur examen approfondi est un problème qui, depuis Euclide, a fait l'objet de nombreux Mémoires remarquables de la Science mathématique (\*). Ce problème revient à l'analyse logique de notre intuition de l'espace.

La recherche qui suit est un nouvel essai dont le but est d'établir

la Géométrie sur un système SIMPLE et COMPLET d'AXIOMES INDÉPENDANTS et de déduire de ceux-ci les principaux théorèmes géométriques, de telle sorte que le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée des conclusions que l'on tire des axiomes individuels soient mis en pleine lumière autant qu'il est possible.

---

## CHAPITRE I.

### LES CINQ GROUPES D'AXIOMES.

---

#### § 1.

##### Les éléments de la Géométrie et les cinq groupes d'axiomes.

*Convention.* — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par A, B, C, ...; les êtres du DEUXIÈME système, nous le nommerons *droites* et nous les désignerons par *a, b, c, ...*; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire*; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane*; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace*.

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU »; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie*.

Les axiomes de la Géométrie se partagent en cinq groupes; chacun de ces groupes, pris individuellement, exprime certaines vérités fondamentales de même catégorie qui dérivent de notre intuition. Nous désignerons ces groupes comme il suit :

- I, 1-7. Axiomes d'*association*.
- II, 1-5. Axiomes de *distribution*.
- III. Axiome des *parallèles* (*Postulat d'Euclide*).
- IV, 1-6. Axiomes de *congruence*.
- V. Axiome de la *continuité* (*Axiome d'Archimède*).