



## Точная управляемость в банаховом пространстве

V.I. Korobov, Rabah Rabah

### ► To cite this version:

V.I. Korobov, Rabah Rabah. Точная управляемость в банаховом пространстве . Differential Equations, 1979, 15 (12), pp.2142-2150. <hal-01438981>

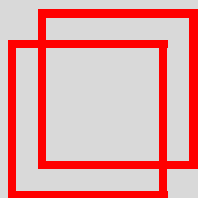
**HAL Id: hal-01438981**

**<https://hal.science/hal-01438981>**

Submitted on 18 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

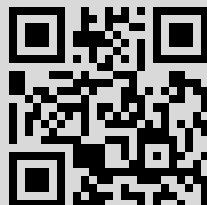
В. И. Коробов, Р. Рабах, Точная управляемость в банаховом пространстве, *Дифференц. уравнения*, 1979, том 15, номер 12, 2142–2150

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 78.194.36.8

30 июля 2016 г., 15:39:10



УДК 517.934

В. И. КОРОБОВ, Р. РАБАХ

## ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

где  $x \in X$ ,  $u \in U$ ;  $X$ ,  $U$  — банаховы пространства;  $B(t) \in \mathcal{L}(U, X)$ ,  $A(t) \in \mathcal{L}(X)$  при всех  $t \geq 0$ ;  $\mathcal{L}(E, F)$  — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $E$  в  $F$ ,  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ , кроме того, предполагается, что семейства операторов  $A(t)$  и  $B(t)$  таковы, что задача Коши для уравнения (1) имеет единственное решение, если управление  $u = u(t)$  представляет собой интегрируемую по Бохнеру вектор-функцию на конечном интервале, т. е. если  $u(\cdot) \in L_1([0, T], U)$ ,  $T > 0$  (здесь и далее  $u(\cdot)$  — управление, рассматриваемое как элемент функционального пространства).

Уравнение (1) называется точно управляемым, если для любого  $x_0 \in X$  существует интегрируемая по Бохнеру функция  $u(t)$  такая, что решение  $x(t)$  уравнения (1) с начальным условием  $x(0) = x_0$  и управлением  $u = u(t)$  удовлетворяет условию  $x(T) = 0$  при некотором  $T > 0$ .

Далее покажем, что время  $T$  попадания в нуль можно считать одинаковым для всех  $x_0 \in X$ .

Известно, что решение уравнения (1) с начальным условием  $x(0) = x_0$  имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) \left( x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right), \quad (2)$$

где  $\Phi(t)$  — решение однородного операторного уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi \quad (3)$$

с начальным условием  $\Phi(0) = I$ ,  $I$  — единичный оператор в пространстве  $X$ .

Положим  $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$ . Очевидно, точная управляемость уравнения (1) эквивалентна тому, что множество

$$Q = \left\{ x : x = \int_0^T \Psi(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, u(\cdot) \in L_1([0, T], U) \right\}$$

совпадает со всем пространством  $X$ . Если  $Q$  всюду плотно в  $X$ , то уравнение (1) называется  $\varepsilon$ -управляемым.

Рассмотрим также автономное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (4)$$

В этом случае  $\Phi(t) = \exp(At)$ . Вопрос о точной управляемости в бесконечномерном пространстве рассматривался впервые в работе [1] для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu,$$

где  $b \in X$ ,  $X$  — гильбертово пространство,  $u$  — скалярное управление. В [2, 3] рассматривался вопрос об  $\varepsilon$ -управляемости линейных уравнений.

Если пространства  $X$  и  $U$  конечномерны, то понятия точной управляемости и  $\varepsilon$ -управляемости совпадают. Необходимым и достаточным условием точной управляемости конечномерной системы служит хорошо известный критерий Калмана [4], который можно записать в следующей форме:

$$\text{Sp} \{BU, ABU, \dots, A^{n-1}BU\} = X,$$

где  $n$  — размерность пространства  $X$ ,  $A^iBU$  — области значений операторов  $A^iB$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ),  $\text{Sp} \{\dots\}$  — их линейная оболочка.

Аналог этого критерия для  $\varepsilon$ -управляемости в бесконечномерном пространстве получен в работах [2, 5], для уравнения (4) он формулируется таким образом:

$$\text{cl Sp} \{BU, ABU, A^2BU, \dots\} = X,$$

где  $\text{cl Sp} \{BU, ABU, \dots\}$  — замыкание линейной оболочки областей значений  $A^iBU$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ . Другие критерии содержатся в [5—7]. Существен тот факт, что уравнение (4) не может быть точно управляемым, если оператор  $B$  является вполне непрерывным [5—8]. В случае, когда  $X$  и  $U$  — гильбертовы пространства, известен критерий точной управляемости, который формулируется [9] так: оператор

$$K = \int_0^T \exp(-A\tau) B B^* \exp(-A^*\tau) d\tau,$$

действующий из  $X$  в  $X$ , должен быть обратимым.

Нами получен критерий точной управляемости, являющийся обобщением критерия Калмана. Предварительно докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть оператор-функция  $B(t)$  ограничена почти всюду. Тогда если уравнение (1) точно управляемо за свободное время, то оно точно управляемо и за фиксированное время.

**Доказательство.** Введем оператор  $S^T$ :

$$S^T u(\cdot) = \int_0^T \Psi(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

При каждом  $T$  оператор  $S^T$  действует из  $L_1([0, T], U)$  в  $X$ . Легко видеть, что он линеен и ограничен (ограниченность следует из равномерной непрерывности оператор-функции  $\Psi(t)$  и ограниченности почти всюду оператор-функции  $B(t)$ ). Точная управляемость за свободное время означает, что

$$\bigcup_{T>0} S^T L_1 = X, \quad (5)$$

где  $S^T L_1$  — область значений оператора  $S^T$ .

Известно, что в (5) можно ограничиться счетным объединением, так как  $S^T L_1 \subset S^{T_0} L_1$ , если  $T \leq T_0$ . Другими словами, соотношение (5) можно представить в виде

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{T_n} L_1 = X,$$

где  $0 < T_1 < T_2 < \dots$ . Так как пространство  $X$  банахово, то существует  $i \geq 1$  такое, что  $S^{T_i} L_1$  — множество второй категории (по теореме Бэра). Это в свою очередь влечет за собой соотношение  $S^{T_i} L_1 = X$  (по теореме об открытом отображении [10, с. 58]), а это означает, что уравнение (1) точно управляемо за время  $T_i$  и, следовательно, за любое время  $T \geq T_i$ , полагая управление  $u(t) = 0$  при  $t > T_i$ . Теорема доказана.

Критерий точной управляемости уравнения (4) дает следующая

**Теорема 2.** Для точной управляемости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $k \geq 0$

$$\text{Sp} \{BU, ABU, \dots, A^k BU\} = X. \quad (6)$$

**Необходимость.** Пусть уравнение (4) точно управляемо. Тогда существует  $T > 0$  такое, что оператор  $S^T$ , определенный в доказательстве теоремы 1, отображает  $L_1([0, T], U)$  на все  $X$ . Отсюда следует [11] существование  $\alpha > 0$  такого, что все операторы  $Q \in \mathcal{L}(L_1([0, T], U), X)$ , удовлетворяющие условию  $\|S^T - Q\| < \alpha$ , отображают  $L_1([0, T], U)$  на все  $X$ .

Рассмотрим операторы  $S_k^T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , определенные соотношениями

$$S_k^T u(\cdot) = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{n!} A^n B \int_0^T \tau^n u(\tau) d\tau,$$

при  $u(\cdot) \in L_1([0, T], U)$ . Очевидно, что  $S_k^T$  — линейные ограниченные операторы.

Рассмотрим  $\|S^T - S_k^T\|$ :

$$\begin{aligned} \|(S^T - S_k^T)u(\cdot)\| &= \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A^n B \int_0^T \tau^n u(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|A\|^n \|B\| T^n / n! \int_0^T \|u(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $\int_0^T \|u(\tau)\| d\tau = \|u(\cdot)\|$ , то

$$\|S^T - S_k^T\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|A\|^n \|B\| T^n / n!.$$

Взяв  $k$  достаточно большим, получим  $\|S^T - S_k^T\| < \alpha$ . Итак,  $S_k^T$  осуществляет отображение пространства  $L_1([0, T], U)$  на все пространство  $X$ .

Пусть  $u_n = (-1)^n / n! \int_0^T \tau^n u(\tau) d\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, k$ , тогда для любого  $x \in X$  существуют  $u_0, u_1, \dots, u_k$  такие, что  $x = \sum_{n=0}^k A^n B u_n$ , а это означает, что  $\text{Sp} \{BU, ABU, \dots, A^k BU\} = X$ . Необходимость доказана.

Достаточность. Введем пространство  $Y$ , элементы которого

$$y = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \text{ где } k \text{ — минимальное число такое, что выполнено усло-}$$

вие (6),  $u_i \in U$  при  $i=0, 1, 2, \dots, k$ , т. е.  $Y$  — произведение  $(k+1)$  пространств  $U$ . Операции сложения и умножения на скаляр вводятся естественным образом. Норму в  $Y$  введем таким образом:  $\|y\| = \sum_{i=0}^k \|u_i\|$ , тогда пространство  $Y$  с введенной нормой является банаховым.

Пусть  $C$  — линейный ограниченный оператор, определенный равенством  $Cy = \sum_{n=0}^k A^n B u_n$ . Из условия теоремы следует, что он отображает пространство  $Y$  на все  $X$ .

Далее доказательство проводится по методике, предложенной в [12]. Управление  $u(t)$ , переводящее точку  $x_0$  в 0, ищем в классе кусочно-постоянных функций, для этого отрезок  $[0, T]$  ( $T$  определяется далее) разобьем на  $(k+1)$  равных частей  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k$ . Через  $\theta$  обозначим  $\theta = T/(k+1)$ . В качестве управления возьмем функцию  $u(t) = u_i$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k$ , тогда

$$S^T u(\cdot) = \int_0^T \exp(-A\tau) B u(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / n! A^n B \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tau^n u_i d\tau.$$

Учитывая, что  $t_i = i\theta$ , получим

$$\begin{aligned} S^T u(\cdot) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A^n B \sum_{i=0}^k \int_{i\theta}^{(i+1)\theta} \tau^n u_i d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n B \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^n}{(n+1)!} [(i+1)^{n+1} - i^{n+1}] \theta^{n+1} u_i = \\ &= \sum_{n=0}^k A^n B \sum_{i=0}^k (-1)^n \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \theta^{n+1} u_i + \\ &+ \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n B \sum_{i=0}^k (-1)^n \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \theta^{n+1} u_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим

$$v_n = \sum_{i=0}^k (-1)^n \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \theta^{n+1} u_i; \quad n=0, 1, \dots, k, \quad (8)$$

и введем векторы  $y = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ ,  $y, z$  — элементы простран-

ства  $Y$ . Соотношения (8) определяют оператор  $D$ , отображающий  $Y$  в себя,  $z = Dy$ , который записывается в виде

$$D = \begin{pmatrix} \theta I & \theta I & \dots & \theta I \\ -\frac{1}{2!} \theta^2 I & (-1) \frac{2^2 - 1}{2!} \theta^2 I & \dots & (-1) \frac{(k+1)^2 - k^2}{2!} \theta^2 I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^k \theta^{k+1} I}{(k+1)!} & (-1)^k \frac{2^{k+1} - 1}{(k+1)!} \theta^{k+1} I & \dots & (-1)^k \frac{(k+1)^{k+1} - k^{k+1}}{(k+1)!} \theta^{k+1} I \end{pmatrix},$$

где  $I$  — единичный оператор в пространстве  $U$ . Покажем, что оператор  $D$  линейный и ограниченный, более того, он имеет ограниченный обратный. Действительно, матрица

$$[D] = \begin{pmatrix} \theta & \theta & \dots & \theta \\ -\frac{1}{2!} \theta^2 & (-1) \frac{2^2 - 1}{2!} \theta^2 & \dots & (-1) \frac{(k+1)^2 - k^2}{2!} \theta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^k \theta^{k+1}}{(k+1)!} & (-1)^k \frac{2^{k+1} - 1}{(k+1)!} \theta^{k+1} & \dots & (-1)^k \frac{(k+1)^{k+1} - k^{k+1}}{(k+1)!} \theta^{k+1} \end{pmatrix},$$

определяемая оператором  $D$ , неособая. Рассмотрим оператор из  $\mathcal{L}(Y)$ , имеющий следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_{00}I & a_{01}I & \dots & a_{0k}I \\ a_{10}I & a_{11}I & \dots & a_{1k}I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k0}I & a_{k1}I & \dots & a_{kk}I \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots, k$ ) — элементы матрицы, обратной  $[D]$ . Легко видеть, что этот оператор — обратный  $D$  оператор.

Введем линейный ограниченный оператор  $R$

$$Ry = \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n B \sum_{i=0}^k (-1)^n \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \theta^{n+1} u_i,$$

который действует из  $Y$  в  $X$ . Тогда соотношение (7) запишется в виде

$$S^T u(\cdot) = CDy + Ry = Cz + RD^{-1}z. \quad (9)$$

Заметим, что операторы  $R$  и  $D^{-1}$  зависят от  $\theta$ , в то время как оператор  $C$  не зависит от  $\theta$ .

Рассмотрим оператор  $F = C + RD^{-1}$  и покажем, что при достаточно малом  $\theta$  он отображает  $Y$  на все  $X$ . Доказательство основано на том, что норму  $\|RD^{-1}\|$  можно сделать сколь угодно малой за счет выбора  $\theta$ . Так как  $\|RD^{-1}\| \leq \|R\| \|D^{-1}\|$ , то, оценив  $\|R\|$  и  $\|D^{-1}\|$ , получим соответствующую оценку для  $\|RD^{-1}\|$ .

Оценим сначала  $\|R\|$ . Для произвольного  $y \in Y$  имеем

$$\|Ry\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|A\|^n \|B\| \theta^{n+1} \sum_{i=0}^k \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \|u_i\|.$$

Возьмем  $\theta \leq \frac{1}{2\|A\|}$ , тогда  $\sum_{n=k+1}^{\infty} \|A\|^n \theta^{n+1} = \|A\|^{k+1} \theta^{k+2} \frac{1}{1-\|A\|\theta}$ , причем  $\frac{1}{1-\|A\|\theta} \leq 2$ . Обозначим  $N_1 = \max_{\substack{0 \leq i \leq k \\ n \geq k+1}} \left( \frac{(i+1)^{n+1} - i^{n+1}}{(n+1)!} \right)$ , получим

$$\|Ry\| \leq 2\|B\|N_1\|A\|^{k+1}\theta^{k+2} \sum_{i=0}^k \|u_i\|.$$

Таким образом, если  $\theta \leq \frac{1}{2\|A\|}$ , то для  $\|R\|$  справедлива оценка

$$\|R\| \leq 2\|B\|N_1\|A\|^{k+1}\theta^{k+2}. \quad (10)$$

Произведем теперь оценку для  $\|D^{-1}\|$ . Нетрудно видеть, что  $\|D^{-1}\| = \max_{0 \leq i \leq k} \sum_{j=0}^k |a_{ij}|$ . Так как  $a_{ij}$  — элементы матрицы, обратной  $[D]$ , то  $a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}}{d}$ , где  $M_{ij}$  — миноры  $k$ -го порядка, а  $d$  — определитель матрицы  $[D]$ . Нас интересует зависимость  $\|D^{-1}\|$  от  $\theta$ . Легко видеть, что

$$d = N_2 \prod_{l=1}^{k+1} \theta^l, \quad M_{ij} = N_{ij} \theta^{-(i+1)} \prod_{l=1}^{k+1} \theta^l, \quad i, j = 0, 1, \dots, k,$$

где  $N_2, N_{ij}$  — некоторые константы. Если предположить, что  $\theta \leq 1$ , и через  $N_3$  обозначить  $\max_{0 \leq i, j \leq k} |N_{ij}|$ , то получим  $|M_{ij}| \leq N_3 \theta^{-(k+1)} \prod_{l=1}^{k+1} \theta^l$  при всех  $i, j = 0, 1, \dots, k$ , следовательно,

$$\|D^{-1}\| \leq (k+1) \max_{0 \leq i, j \leq k} |a_{ij}| \leq (k+1) \frac{N_3}{|N_2|} \theta^{-(k+1)}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$\|RD^{-1}\| \leq 2(k+1) \frac{N_1 N_3}{|N_2|} \|B\| \|A\|^{k+1} \theta, \quad (12)$$

при  $\theta \leq \min \left( 1, \frac{1}{2\|A\|} \right)$ , а это означает, что  $\|RD^{-1}\|$  можно сделать сколь угодно малой за счет выбора  $\theta = \frac{T}{k+1}$ .

Так как  $RD^{-1} = F - C$  и  $C$  отображает  $Y$  на все  $X$ , то при достаточно малом  $\theta_0$   $F$  также будет отображать пространство  $Y$  на все пространство  $X$  для всех  $\theta < \theta_0$ . Другими словами, для любого  $x_0 \in X$  существует  $z_0 \in Y$  такой, что  $x_0 = Fz_0$ .

Пусть  $y_0 = \begin{pmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ \vdots \\ u_k^0 \end{pmatrix}$  определен из равенства  $y_0 = D^{-1}z_0$ , тогда, если

взять в качестве управления функцию  $u^0(t) = u_i^0$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , из соотношения (9) получим  $S^T u^0(\cdot) = x_0$ .  $T = (k+1)\theta$ ,  $\theta < \theta_0$ , а это означает, что уравнение (4) точно управляемо. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что если уравнение (4) точно управляемо за какое-либо время  $T_0$ , то оно точно

управляемо и за любое время  $T \leq T_0$  и, следовательно, за любое другое время  $T > 0$ . Действительно, если  $T > T_0$ , то управление, переводящее точку  $x_0$  в нуль за время  $T_0$ , можно доопределить нулем при  $t > T_0$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В качестве допустимых управлений в определении точной управляемости рассмотрены  $u(\cdot) \in L_1([0, T], U)$ , на самом деле, как это видно из доказательства теоремы 2, можно ограничиться кусочно-постоянными управлениями. Этот класс управлений входит в пространство существенно ограниченных функций со значениями в  $U$ :  $L_\infty([0, T], U)$ . Минимальное число переключений равно  $k$ , где  $k$  — наименьшее число, для которого выполнено (6).

Из теоремы 2 можно получить критерий точной управляемости, доказанный в [13] с предположением, что  $U$  — рефлексивное пространство. Здесь это не предполагается.

**Т е о р е м а 3.** *Уравнение (4) точно управляемо тогда и только тогда, когда соотношения*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^* A^{*i} f_n = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

*влекут за собой  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .*

Заметим сначала, что если оператор  $Q \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ , где  $X_1$  и  $X_2$  — банаховы пространства, отображает  $X_1$  на все  $X_2$ , то [10] существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $f \in X_2^*$  имеет место

$$\|Q^* f\| \geq \delta \|f\|. \quad (13)$$

Отсюда следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^* f_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ . Для доказательства теоремы применим этот факт к операторам  $C_k \in \mathcal{L}(Y_k, X)$ , где  $Y_k$  есть прямое произведение  $(k+1)$  пространств  $U$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$C_k y_k = \sum_{n=0}^k A^n B u_n, \quad y_k = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in Y_k.$$

Норма в  $Y_k$  будет, как и в  $Y$ ,  $\|y_k\| = \sum_{n=0}^k \|u_n\|$ .

Пусть  $f \in X^*$ . Рассмотрим  $C_k^* f \in Y_k^*$ . Известно [14], что  $y_k^* \in Y_k^*$  имеет вид  $y_k^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_k^*)$ , где  $u_i^* \in U^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , и норма в  $Y_k^*$  будет

$$\|y_k^*\| = \max_{0 \leq i \leq k} \|u_i^*\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|C_k^* f\| = \max_{0 \leq i \leq k} \|B^* A^{*i} f\|. \quad (14)$$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 3.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть уравнение (4) точно управляемо. Тогда существует  $k_0$  такое, что при каждом  $k \geq k_0$  оператор  $C_k$  отображает  $Y_k$  на все  $X$ . Пусть последовательность  $\{f_n\} \subset X^*$  такова, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^* A^{*i} f_n = 0$  для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ , тогда из (14) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_k^* f_n = 0$ . Отсюда (при  $k \geq k_0$ ) в силу (13) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ . Необходимость доказана.

**Достаточность.** От противного. Пусть выполнено условие теоремы, но тем не менее уравнение (4) не является точно управляемым. Тогда для всех  $k=0, 1, 2, \dots$  оператор  $C_k$  не отображает  $Y_k$  на все  $X$ . Другими словами, для каждого  $k=0, 1, 2, \dots$  существует последовательность  $\{f_n^k\}_{n=1}^\infty \subset X^*$  такая, что  $\|f_n^k\|=1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_k^* f_n^k = 0$ . Отсюда получим, что

$$\max_{0 \leq i \leq k} \|B^* A^* i f_n^k\| \leq 1/k \text{ при } n \geq n_k. \quad (15)$$

Рассмотрим последовательность  $\{f_{n_k}^k\}_{k=1}^\infty$ . Имеем  $\|f_{n_k}^k\|=1$  для всех  $k=1, 2, \dots$  и в силу (15)  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^* A^* i f_{n_k}^k = 0$  при каждом  $i=0, 1, 2, \dots$ , а это противоречит условию теоремы, так как  $\{f_{n_k}^k\}$  не сходится к нулю. Теорема доказана.

Рассмотрим неавтономное уравнение (1). Пусть  $A(t)$  и  $B(t)$  — аналитические оператор-функции на  $[0, T]$ . Введем операторы  $L_k(t)$

$$L_0(t) = B(t),$$

$$L_k(t) = -A(t)L_{k-1}(t) + \frac{d^k}{dt^k} L_{k-1}(t),$$

$k=1, 2, \dots$ ;  $t \in [0, T]$ . Тогда нетрудно показать, что

$$-\frac{d^k}{dt^k} \Psi(t)B(t) = \Psi(t)L_k(t), \quad t \in [0, T].$$

Из аналитичности  $A(t)$  и  $B(t)$  следует аналитичность оператор-функции  $\Psi(t)B(t)$ . Имеем для всех  $t \in [0, T]$

$$\Psi(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(t_0)L_k(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad (16)$$

где  $t_0$  — произвольная точка из  $[0, T]$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 4.** Пусть  $A(t)$  и  $B(t)$  аналитичны на  $[0, T]$ . Для того чтобы уравнение (1) было точно управляемым, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $k \geq 0$

$$\text{Sp} \{L_0(t_0)U, L_1(t_0)U, \dots, L_k(t_0)U\} = X.$$

**Теорема 5.** Пусть  $A(t)$  и  $B(t)$  аналитичны на  $[0, T]$ . Для того чтобы уравнение (1) было точно управляемым, необходимо и достаточно, чтобы из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_k^*(t_0)f_n = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

следовало  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

Они доказываются так же, как и теоремы 2 и 3.

### Литература

1. Шолохович Ф. А. Дифференц. уравнения, 3, № 3, 1967.
2. Куржанский А. Б. Дифференц. уравнения, 5, № 9, 1969.
3. Fattorini H. O. Journal of Diff. Equat., 3, pp. 391—402, 1967.

4. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S. Contrib. to Diff. Equations, 1, № 2, pp. 190—213, 1963.
5. Triggiani R. SIAM J. on Control, 13, № 2, 462—491, 1975.
6. Бейко И. В., Копец М. М. Укр. мат. журн., № 1, 1976.
7. Якубович В. А. Сиб. мат. журн., 16, № 5, 1975.
8. Куперман Л. М., Репин Ю. М. ДАН СССР, 200, № 4, 1971.
9. Megan M., Hiris V. Glasnik Matematički, N 10, 161—167, 1975.
10. Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., Наука, 1968.
12. Коробов В. И. ЖВМ и МФ, 10, № 4, 1970.
13. Рабах Р. Вестник Харьк. ун-та, сер. прикл. мат. и мех., вып. 43, 1978.
14. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М., Наука, 1972.

*Поступила в редакцию*  
*16 мая 1977 г.*

*Харьковский государственный университет*  
*им. А. М. Горького*