



**HAL**  
open science

## Mélange local et comportement non-stationnaire du gradient d'un scalaire passif

M Gonzalez, P Paranthoën

► **To cite this version:**

M Gonzalez, P Paranthoën. Mélange local et comportement non-stationnaire du gradient d'un scalaire passif. 19ième Congrès français de Mécanique, Association Française de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-01437111

**HAL Id: hal-01437111**

**<https://hal.science/hal-01437111>**

Submitted on 24 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mélange local et comportement non-stationnaire du gradient d'un scalaire passif

M. GONZALEZ, P. PARANTHOËN

CNRS, UMR 6614/CORIA, Site universitaire du Madrillet, 76801 Saint-Etienne du Rouvray

## Résumé :

*Les propriétés de mélange de deux écoulements modèles sont analysées à travers le comportement du gradient d'un scalaire passif. Il apparaît en particulier que la qualité des conditions de mélange local s'explique bien par la réponse du gradient de scalaire au forçage instationnaire imposé à travers les variations de la persistance de l'étirement.*

## Abstract :

*The tracer gradient approach is used to investigate local stirring in two different basic flows which serve as models of mixing systems. It is especially shown that local stirring properties can be understood through the behaviour of the tracer gradient under unsteady forcing resulting from variable strain persistence.*

**Mots clefs :** mélange, gradient de traceur, forçage non-stationnaire

## 1 Introduction

Le mélange dans les fluides repose sur les phénomènes d'étirement d'éléments fluides linéiques ou surfaciques provoqués par les gradients de vitesse et sur la diffusion moléculaire. Il est admis que l'étirement facilite le mélange local en favorisant la diffusion moléculaire par l'augmentation de la surface des interfaces et le rapprochement des portions de fluides initialement séparées. Souvent, la qualité de "bon mélange" suppose une répartition uniforme de l'étirement dans l'écoulement. L'étirement des éléments fluides est d'autre part rigoureusement équivalent à l'amplification du gradient local d'un scalaire passif non-diffusif, ou traceur, transporté par l'écoulement. Le comportement de lignes ou de surfaces soumis au phénomène d'étirement et celui du gradient d'un traceur ont d'ailleurs été indifféremment utilisés dans l'étude du mélange chaotique [1, 2] ou turbulent [3, 4]. Adopter ce point de vue purement convectif revient à s'intéresser à la phase du processus de mélange pendant laquelle l'étirement produit des petites échelles du champ scalaire sans influence significative de la diffusion moléculaire ce qui se justifie d'autant mieux que le nombre de Péclet est élevé.

En général, le gradient d'un traceur subissant l'action mécanique des gradients de vitesse montre un comportement complexe. Les problèmes de mélange, en particulier, se posent le plus souvent en conditions instationnaires ce qui conduit à évaluer les propriétés de mélange d'un écoulement en fonction de la dynamique du gradient de traceur, c'est-à-dire de sa réponse à des sollicitations mécaniques ou des forçages variables. Il a récemment été mis en évidence [5, 6], au moins dans le cas bidimensionnel, que la réponse du gradient de traceur à un forçage imposé à travers les variations lagrangiennes de la persistance de l'étirement induit, selon qu'elle est adaptée ou non, des propriétés radicalement différentes en termes d'alignement et de norme. Il se pose alors deux questions : i) ces comportements du gradient d'un traceur sont-ils restreints à des conditions particulières ou bien sont-ils observés plus largement dans certaines classes d'écoulements? et ii) de quelle façon les propriétés de mélange en sont-elles affectées?

Ce travail est une étape dans laquelle ces questions sont abordées grâce à l'analyse du comportement du gradient d'un traceur dans deux écoulements bidimensionnels modèles fréquemment utilisés dans les études de mélange. Leur définition analytique permet en particulier de déduire de façon exacte le tenseur gradient de vitesse qui gouverne les propriétés mécaniques locales de l'écoulement et donc sa capacité à favoriser le mélange.

## 2 Comportement du gradient d'un scalaire passif et propriétés de mélange

Nous nous concentrons sur les mécanismes convectifs du mélange qui se traduisent par le phénomène de "réduction des échelles" ou, de façon équivalente, l'amplification du gradient local,  $G$ , d'un traceur non-diffusif. Dans le cas bidimensionnel, l'évolution de  $G$  est donnée par les équations pour l'orientation et la norme [3] :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sigma(r - \cos \zeta) \quad (1)$$

$$\frac{2}{|\mathbf{G}|} \frac{d|\mathbf{G}|}{dt} = -\sigma \sin \zeta \quad (2)$$

où  $\mathbf{G} = |\mathbf{G}|(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\zeta = 2(\theta + \Phi)$  donne l'orientation du gradient dans le repère propre local des déformations; l'angle  $\Phi$  détermine l'orientation des axes principaux par  $\tan(2\Phi) = \sigma_n/\sigma_s$  où  $\sigma_n = \partial u/\partial x - \partial v/\partial y$  et  $\sigma_s = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y$  sont, respectivement, les composantes normales et de cisaillement des déformations (et  $u$  et  $v$  les composantes de la vitesse). Le taux d'étirement est  $\sigma = (\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^{1/2}$ . Le paramètre de persistance de l'étirement mesure les effets respectifs de la rotation effective (vorticité plus rotation des axes principaux) et de l'étirement :

$$r = \frac{\omega + 2d\Phi/dt}{\sigma} \quad (3)$$

où  $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  est la vorticité. Dans les régions dominées par l'étirement (hyperboliques),  $r^2 < 1$  et le gradient de traceur tend à s'aligner avec une direction d'équilibre locale donnée par  $\zeta_{eq} = -\arccos(r)$ ; sa norme croît exponentiellement au taux  $\sigma(1 - r^2)^{1/2}/2$  en termes du temps normalisé,  $\tau = \int_0^t \sigma(t') dt'$ . Le taux maximal est atteint pour  $r = 0$ , en régime hyperbolique pur, quand l'orientation d'équilibre coïncide avec la direction de compression,  $\zeta_c = -\pi/2$ . Dans les régions dominées par la rotation (elliptiques),  $r^2 > 1$ , il n'existe pas de direction d'équilibre et la norme du gradient de traceur n'est pas amplifiée. L'équilibre entre rotation et étirement ( $r^2 = 1$ ) conduit le gradient de traceur à s'aligner avec une bissectrice des axes principaux déterminée par  $\zeta_s = 0$  ou  $\zeta_s = -\pi$  et sa norme croît linéairement en  $\tau$ . Le critère défini par le paramètre de persistance,  $r$ , est plus général que ceux qui ne tiennent pas compte de la rotation des axes principaux (comme le critère d'Okubo-Weiss) et permet une meilleure description des propriétés locales de mélange [3]. Cette analyse du comportement du gradient de traceur suppose une variation "lente" de  $r$  le long des trajectoires lagrangiennes [3]. Plus précisément, Garcia *et al.* [5, 6] ont montré qu'elle reste valide tant que le temps de réponse du gradient de scalaire, qui est de l'ordre de  $1/\sigma$ , est suffisamment court devant l'échelle de temps des variations de  $r$  qui imposent au gradient un forçage à travers son orientation comme le montre l'Eq. (1). Dans le cas contraire où le gradient ne répond pas aux variations de  $r$ , son alignement n'est pas déterminé par la valeur "locale" de  $r$  mais par sa valeur moyenne,  $\langle r \rangle$ . Un cas particulier important pour le mélange est alors celui pour lequel  $\langle r \rangle \simeq 0$ ; cela correspond en effet à un régime hyperbolique *en moyenne* dans lequel le gradient de traceur reste aligné au voisinage de la direction de compression et subit une amplification maximale. Ce comportement a été révélé dans une allée de Bénard - von Kármán [5, 6] et une question intéressante est de savoir s'il est observé dans d'autres types d'écoulements.

### 3 Comportement du gradient de traceur et mélange dans deux écoulements modèles

#### 3.1 Vortex "clignotant"

L'écoulement est produit par la rotation alternée de deux agitateurs,  $P_1$  et  $P_2$ . On suppose que le mouvement du fluide commence dès qu'un agitateur est activé et cesse dès qu'il est arrêté. Le champ de vitesse produit par un agitateur  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ), régularisé comme proposé par Kin et Sakajo [7], est :

$$u_i = -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y - q_i}{(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 + \delta^2} \quad ; \quad v_i = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x - p_i}{(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 + \delta^2} \quad (4)$$

où  $(p_i, q_i)$  définit la position de  $P_i$  et  $\Gamma_i$  est la circulation du vortex qu'il produit. Avec les conditions de l'étude de Kin et Sakajo [7],  $(p_1, q_1) = (-1/2, 0)$ ,  $(p_2, q_2) = (1/2, 0)$  et  $\Gamma_i = \pm 1$  (correspondant soit à une rotation horaire,  $\Gamma_i = -1$ , soit à une rotation antihoraire,  $\Gamma_i = 1$ ). Pendant une opération élémentaire,  $P_1$  est en rotation pendant une durée  $T$  puis est arrêté et  $P_2$  entre en rotation pendant la même durée. Une opération de mélange comprend  $N$  opérations élémentaires. La durée  $T$  est donnée par  $T = 2\pi^2(\delta^2 + 1/4)$ . L'influence du paramètre de régularisation,  $\delta$ , a été étudiée par Kin et Sakajo [7]. Dans ce travail, on choisit la valeur qu'ils ont adoptée pour la plupart de leurs calculs,  $\delta = 0.6$ . La rotation horaire de  $P_i$  est symbolisée par  $n(i)$  et la rotation antihoraire par  $p(i)$ .

A travers le comportement du gradient de traceur, on analyse les différences entre les propriétés de mélange de deux protocoles consistant en  $N$  opérations  $p(1)p(2)$  ( $P_1$  et  $P_2$  ont une rotation antihoraire) pour le premier et  $p(1)n(2)$  ( $P_1$  a une rotation antihoraire et  $P_2$  une rotation horaire) pour le deuxième. L'approche demande la connaissance de la vorticité,  $\omega$ , et des composantes des déformations,  $\sigma_n$  et  $\sigma_s$ , que l'on déduit facilement des composantes de vitesse (Eqs. (4)). Le taux de rotation des axes principaux,  $d\Phi/dt$ , se calcule aussi analytiquement à partir de  $\sigma_n$  et  $\sigma_s$ . On connaît alors analytiquement toutes les variables dynamiques permettant de résoudre les Eqs. (1) et (2) pour le gradient de traceur et en particulier le paramètre de persistance de l'étirement,  $r$ . Ce dernier prend une forme remarquable,  $r = -\Gamma_i/|\Gamma_i|$ , qui implique  $r = 1$  pour une rotation horaire de  $P_i$  et  $r = -1$  pour une rotation antihoraire. Les protocoles de mélange  $p(1)p(2)$  et  $p(1)n(2)$  se distinguent

donc par le forçage imposé sur le gradient d'un traceur à travers le paramètre de persistance : le premier correspond à un forçage stationnaire défini par  $r = -1$  et le deuxième à un forçage périodique pour lequel  $r$  prend alternativement les valeurs  $\pm 1$  avec une demi-période  $T$ .

La résolution numérique des Eqs. (1) et (2) est réalisée pour  $N = 16$ , avec un pas de temps  $\Delta t = 0.001T$ . La Fig. 1 illustre l'évolution de l'orientation du gradient d'un traceur à partir de la valeur initiale  $\zeta(0) = \pi/4$  le long de la trajectoire d'une particule fluide (intégrée en utilisant les Eqs. (4)) commençant en  $(x(0), y(0)) = (-2, -1.3 \cdot 10^{-7})$ . Dans le protocole  $p(1)p(2)$  (Fig.1a), la valeur constante du paramètre de persistance,  $r = -1$ , conduit le gradient de traceur à s'aligner progressivement avec une bissectrice des axes principaux définie par  $\zeta_s = -\pi$ . Dans le protocole  $p(1)n(2)$  (Fig.1b), le caractère alterné de la persistance,  $r = \pm 1$ , interdit au contraire au gradient de prendre l'une ou l'autre des orientations  $\zeta_s = -\pi$  ( $r = -1$ ) et  $\zeta_s = 0$  ( $r = 0$ ); le gradient de traceur reste aligné au voisinage de la direction déterminée par la valeur moyenne du paramètre de persistance, c'est-à-dire dans le cas présent,  $\langle r \rangle = 0$ , qui correspond à la direction de compression locale,  $\zeta_c = -\pi/2$ . A travers le terme en  $\sin \zeta$  de l'Eq. (2), le taux de croissance de la norme est ici affecté de façon

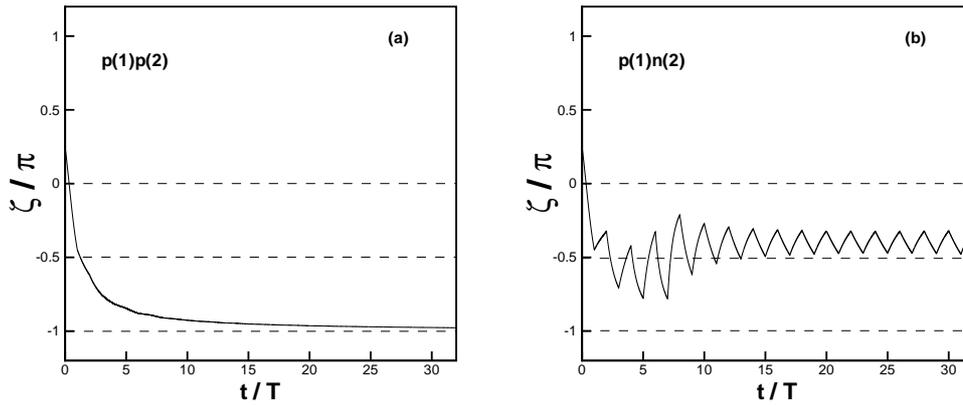


FIG. 1: Evolution de l'orientation du gradient d'un traceur le long de la trajectoire d'une particule fluide; (a) protocole  $p(1)p(2)$ ; (b) protocole  $p(1)n(2)$ .

significative par l'alignement. Même si le taux d'étirement,  $\sigma$ , subi par le gradient de traceur le long de la trajectoire lagrangienne est comparable dans les deux cas (ce qui a été vérifié), c'est l'orientation du gradient qui conditionne la croissance de la norme. Celle-ci est beaucoup plus forte dans le protocole  $p(1)n(2)$  (Fig. 2) du fait de l'alignement au voisinage de la direction de compression imposée par les variations de  $r$ .

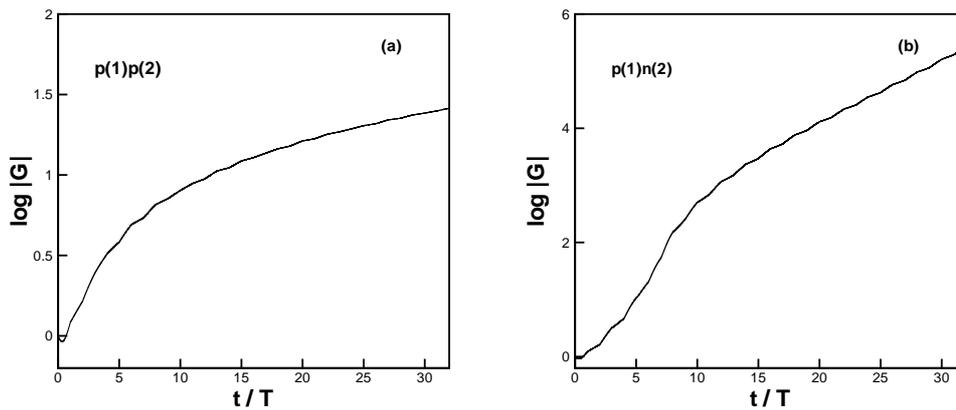


FIG. 2: Evolution de la norme gradient d'un traceur le long de la trajectoire d'une particule fluide (valeur initiale  $|G|(0) = 1$ ); (a) protocole  $p(1)p(2)$ ; (b) protocole  $p(1)n(2)$ .

Ce comportement est confirmé par les statistiques calculées sur 60501 trajectoires de particules initialement réparties sur un réseau uniforme couvrant le domaine  $(-4 \leq x \leq 4; -6 \leq y \leq 6)$  et suivies pendant le protocole de mélange. Pour chaque particule, l'orientation initiale du gradient de traceur est choisie aléatoirement dans  $[-3\pi/2, \pi/2]$  et sa norme initiale est égale à 1. La Fig. 3a montre la fonction densité de probabilité (p.d.f)

du taux d'étirement,  $\sigma$ , calculée sur l'ensemble des trajectoires. Il est clair que la plus grande partie des valeurs de  $\sigma$  (en fait, de la fréquence caractéristique de la réponse du gradient de traceur aux variations de  $r$ ) sont nettement inférieures à la fréquence,  $1/T$ , du forçage imposé par  $r$ . La réponse du gradient n'est pas adaptée au forçage et son orientation, qui est donc déterminée par la valeur moyenne de  $r$ ,  $\langle r \rangle \simeq 0$ , reste constamment proche de la direction de compression,  $\zeta_c$ , comme le montre la Fig. 3b. Le Tableau 1 montre bien le rôle de

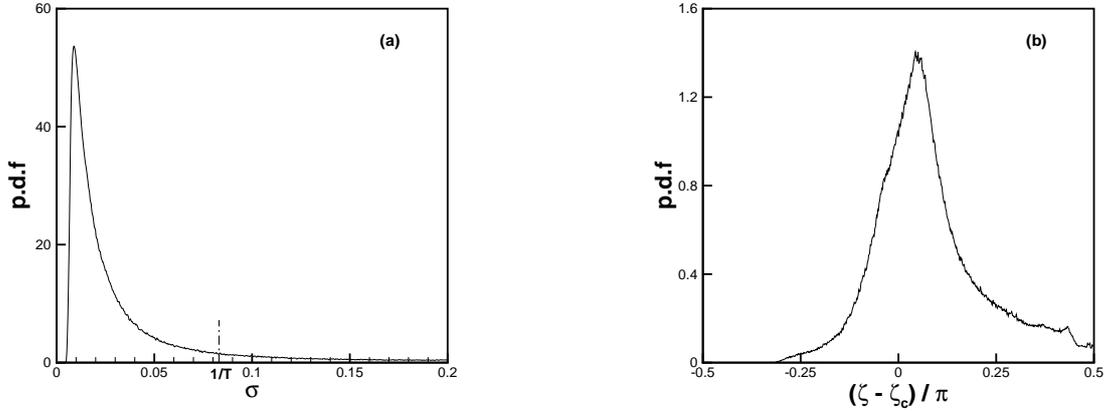


FIG. 3: (a) p.d.f du taux d'étirement et (b) p.d.f d'alignement du gradient de traceur calculées sur 60501 trajectoires; protocole  $p(1)n(2)$ .

l'alignement du gradient de traceur dans l'amplification de la norme. L'étirement moyen  $\langle \sigma^* \rangle$  (où  $\sigma^* = \sigma/\sigma_m$  avec  $\sigma_m = (\Gamma_i/4\pi\delta^2)^2$ ) est le même pour les deux protocoles. Cependant, la moyenne, en fin de protocole, du logarithme de la norme de  $\mathbf{G}$  est nettement supérieure pour le protocole  $p(1)n(2)$  ce qui suggère de meilleures propriétés de mélange. Cette différence s'explique par la statistique d'alignement du gradient de traceur; ce dernier tend bien à s'orienter plus près de la direction de compression pour  $p(1)n(2)$  ce qui entraîne, par le terme d'orientation  $\sin \zeta$ , un taux de croissance de la norme plus élevé. Il est aussi à noter que pour la même demi-période,  $T$ , le protocole  $p(1)n(2)$ , contrairement à  $p(1)p(2)$  assure des conditions chaotiques dans tout l'écoulement et donc un meilleur mélange global [7].

protocole	$\langle \sigma^* \rangle$	$\langle \log  \mathbf{G}  \rangle_{final}$	$\langle  \zeta - \zeta_c /\pi \rangle$	$\langle -\sin \zeta \rangle$
$p(1)p(2)$	0.16	0.68	0.66	0.32
$p(1)n(2)$	0.16	2.4	0.21	0.77

TAB. 1: Statistiques sur 60501 trajectoires pour les protocoles  $p(1)p(2)$  et  $p(1)n(2)$ .

### 3.2 Ecoulement sinusoïdal

On observe un comportement similaire du gradient d'un traceur dans l'écoulement sinusoïdal, également utilisé comme situation modèle de mélange [8]. On applique alternativement, avec une demi-période  $T$ , les champs de vitesse:

$$\mathbf{u}_0(x, y) = (\sin 2\pi y, 0) \quad ; \quad \mathbf{u}_1(x, y) = (0, \sin 2\pi x) \quad (5)$$

Contrairement au cas du vortex "clignotant", le taux de rotation des axes principaux est nul et le paramètre de persistance de l'étirement se réduit à  $r = \omega/\sigma$ . Le protocole impose néanmoins, dans cette situation également, un forçage périodique à travers  $r$  qui prend alternativement les valeurs -1 pour le champ de vitesse  $\mathbf{u}_0$  et 1 pour le champ de vitesse  $\mathbf{u}_1$ .

La Fig. 4 montre l'évolution de l'orientation du gradient d'un traceur le long d'une trajectoire débutant en  $(x(0), y(0)) = (0., 0.15)$ ; l'orientation initiale est  $\zeta(0) = \pi/4$ . La durée totale du protocole est  $T_{tot} = 8$ . Pour  $T = 0.1$  (Fig. 4a), la réponse du gradient n'est pas adaptée aux variations de  $r$  qui imposent alternativement les orientations d'équilibre  $-\pi$  et 0; le gradient de traceur reste alors aligné au voisinage de la direction de compression,  $\zeta_c = -\pi/2$ , correspondant à la valeur moyenne nulle de  $r$ . En revanche, le gradient répond à des variations plus lentes de  $r$  ( $T = 0.8$ ; Fig. 4b) et montre alors, même si son orientation fluctue autour de la direction de compression, une tendance à l'alignement avec les directions  $-\pi$  et 0. Comme dans le cas du vortex "clignotant", le taux de croissance de la norme du gradient, à travers l'effet de l'alignement exprimé par le terme en  $\sin \zeta$ , est favorisé par les variations "rapides" de  $r$ .

Les statistiques sur 40401 trajectoires de particules initialement placées sur un réseau régulier couvrant le domaine ( $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ ) sont reportées dans le Tableau 2. A l'origine de chaque trajectoire, l'orientation du gradient de traceur est choisie aléatoirement dans  $[-3\pi/2, \pi/2]$  et sa norme initiale est égale à 1. Au cours du calcul des trajectoires, des conditions périodiques sont imposées aux frontières du domaine. On constate, comme dans le cas du vortex "clignotant", que de meilleures propriétés de mélange local mesurées par l'amplification du gradient de traceur sont obtenues pour les variations rapides de  $r$  qui imposent au gradient de rester orienté au voisinage de la direction de compression ce qui favorise le taux de croissance de la norme.

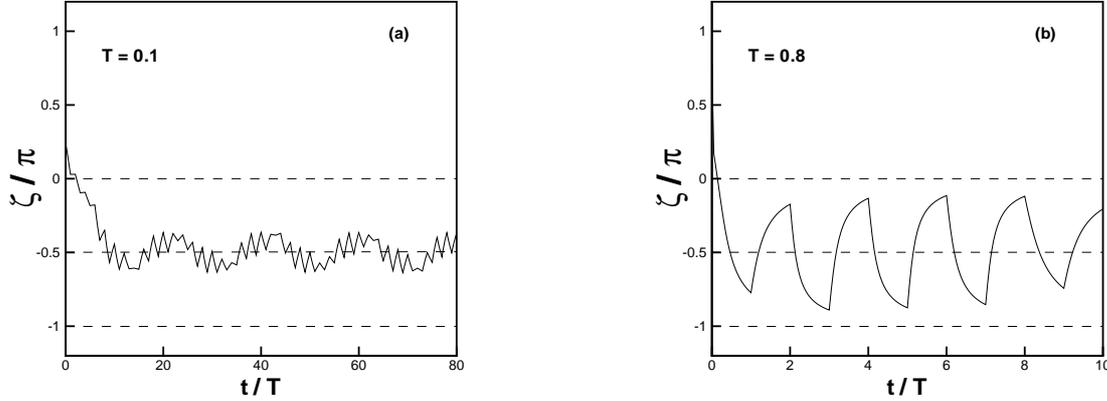


FIG. 4: Evolution de l'orientation du gradient d'un traceur le long de la trajectoire d'une particule fluide; (a)  $T = 0.1$ ; (b)  $T = 0.8$ .

$T$	$\langle \sigma^* \rangle$	$\langle \log  \mathbf{G}  \rangle_{final}$	$\langle  \zeta - \zeta_c /\pi \rangle$	$\langle -\sin \zeta \rangle$
0.1	0.64	6.4	0.17	0.92
0.4	0.64	5.5	0.35	0.81
0.8	0.64	4.5	0.48	0.68

TAB. 2: Statistiques sur 40401 trajectoires pour  $T = 0.1, 0.4$  et  $0.8$ ;  $\sigma^* = \sigma/2\pi$ .

Les conditions favorables au mélange local ne garantissent pas nécessairement de bonnes propriétés de mélange à l'échelle de tout l'écoulement. Ce fait est bien illustré par l'écoulement sinusoïdal. La Fig. 5 montre deux cartes de la grandeur  $I_\eta(x_0, y_0) = \int_0^{T_{tot}} \eta(x_0, y_0; t) dt$  calculée le long de chacune des 40401 trajectoires et tracée en fonction de l'origine  $(x_0, y_0)$  de chaque trajectoire, pour  $T = 0.1$  et  $T = 0.8$ ; la variable  $\eta = -\sigma \sin \zeta$  est le taux de croissance de la norme du gradient de scalaire (Eq. (2)). La grandeur  $I_\eta(x_0, y_0)$  est adimensionnelle et contient une information lagrangienne sur l'évolution du gradient de traceur [9]. Elle permet de constater que si une faible valeur de  $T$  (forçage "rapide") entraîne bien une amplification importante du gradient de traceur (Fig. 5a), en revanche, ce qui est connu de l'écoulement sinusoïdal [8], des conditions complètement chaotiques assurant une répartition uniforme des propriétés de mélange demandent une valeur élevée de  $T$  (Fig.5b). Il est intéressant de noter que les cartes de  $I_\eta(x_0, y_0)$  coïncident avec les sections de Poincaré pour cet écoulement [8].

## 4 Conclusion

Le comportement du gradient d'un scalaire passif a été analysé dans deux écoulements modèles couramment utilisés pour l'étude des propriétés de mélange, le vortex "clignotant" et l'écoulement sinusoïdal. Il s'avère :

- i) que les protocoles de mélange définis à partir de ces écoulements se caractérisent par un comportement particulier de la persistance de l'étirement (valeur stationnaire pour le protocole  $p(1)p(2)$  du vortex "clignotant" et variations périodiques pour le protocole  $p(1)n(2)$  et l'écoulement sinusoïdal) qui induit à son tour un forçage via l'orientation du gradient de scalaire. L'évolution du gradient de scalaire en termes d'alignement et de norme est différente selon que sa réponse est adaptée ou non au forçage; en particulier, des variations rapides de la persistance de l'étirement par rapport à la réponse du gradient entraîne ce dernier à rester aligné au voisinage d'une direction déterminée par la valeur moyenne de la persistance;

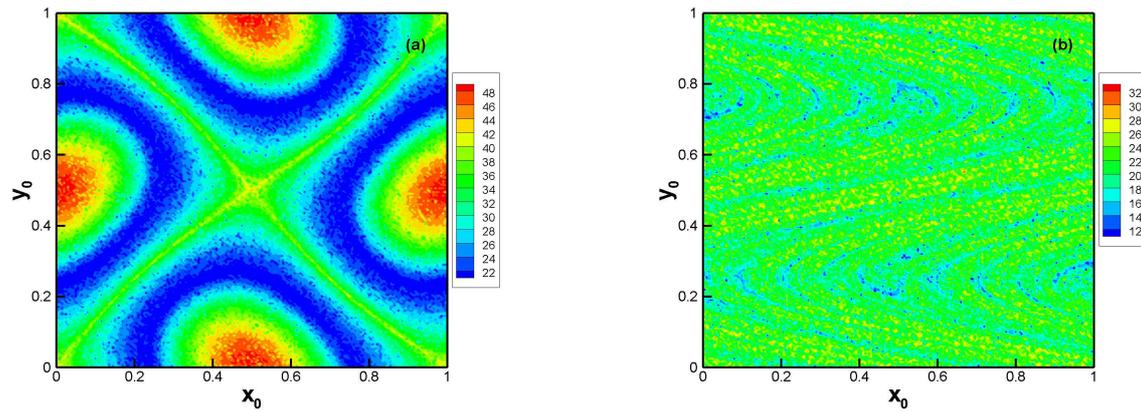


FIG. 5: Cartes de  $I_\eta(x_0, y_0)$ ; (a)  $T = 0.1$ ; (b)  $T = 0.8$ .

- ii) que les conditions de mélange local, définies par la capacité de l'écoulement à amplifier le gradient de scalaire, s'expliquent par ce comportement; l'absence de réponse du gradient aux variations de la persistance de l'étirement alliée à une valeur moyenne nulle de la persistance (régime hyperbolique *en moyenne*) crée ainsi des conditions favorables au mélange local.

Les travaux en cours examinent le cas d'écoulements plus complexes dont le forçage se traduit par des variations à la fois temporelles et spatiales de la persistance de l'étirement.

## Références

- [1] Varosi F., Antonsen T. M., Jr., and Ott E. The spectrum of fractal dimensions of passively convected scalar gradients in chaotic fluid flows. *Phys. Fluids*, 3, 1017–1028, 1991.
- [2] Finn M. D., Cox S. M., and Byrne H. M. Topological chaos in inviscid and viscous mixers. *J. Fluid Mech.*, 493, 345–361, 2003.
- [3] Lapeyre G., Klein P., and Hua B. L. Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2D turbulence? *Phys. Fluids*, 11, 3729–3737, 1999.
- [4] Goto S. and Kida S. Reynolds-number dependence of line and surface stretching in turbulence: folding effects. *J. Fluid Mech.*, 586, 59–81, 2007.
- [5] Garcia A., Gonzalez M., and Paranthoën P. On the alignment dynamics of passive scalar gradient in a two-dimensional flow. *Phys. Fluids*, 17, 117102 (1–8), 2005.
- [6] Garcia A., Gonzalez M., and Paranthoën P. Nonstationary aspects of passive scalar gradient behaviour. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 27, 433–443, 2008.
- [7] Kin E. and Sakajo T. Efficient topological chaos embedded in the blinking vortex system. *Chaos*, 15, 023111 (1–9), 2005.
- [8] Cortelezzi L., Adrover A., and Giona M. Feasibility, efficiency and transportability of short-horizon optimal mixing protocols. *J. Fluid Mech.*, 587, 199–231, 2008.
- [9] Lapeyre G., Hua B. L., and Legras B. Comment on “Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields” [*Chaos* 10, 99 (2000)]. *Chaos*, 11, 427–430, 2000.