



HAL
open science

Switching Lévy Process

Christiane Coccozza-Thivent

► **To cite this version:**

| Christiane Coccozza-Thivent. Switching Lévy Process. 2017. hal-01436597

HAL Id: hal-01436597

<https://hal.science/hal-01436597>

Preprint submitted on 16 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Processus de Lévy avec changements de rythmes

Christiane COCOZZA-THIVENT

anciennement membre du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
UMR CNRS 8050
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

adresse électronique : cocozza.christiane@orange.fr

Abstract

This paper introduces Switching Processes, called SP. Their constructions are inspired by the PDMP's ones (PDMP stands for Piecewise Deterministic Markov Process). A Markov process, called the intrinsic process, replaces the PDMP's flow. Jumps are added; they occur randomly as their locations; their distributions depend on the process's trajectory between them. When the intrinsic process is a Levy process, thanks to its Lévy-Itô decomposition as a semi-martingale, we obtain the expected Kolmogorov equations for the SP. The results are extended to Itô-Lévy processes, in particular to diffusion processes.

Résumé

Dans cet article, nous introduisons les processus avec changements de rythmes. Leur construction est inspirée par celle des PDMP (Piecewise Deterministic Markov Process). Ces processus, notés SP pour Switching Processes, sont construits à partir d'un processus dit intrinsèque qui remplace le flot déterministe de la construction des PDMP. Des sauts sont ajoutés à ce processus intrinsèque. Ils se produisent à des instants aléatoires, les lois de ces instants et leurs localisations dépendent de la trajectoire du processus entre ceux-ci. Lorsque le processus intrinsèque est un processus de Lévy, son écriture comme semi-martingale (décomposition de Lévy-Itô) nous permet d'obtenir les équations de Kolmogorov auxquelles on s'attend pour le SP. Les résultats s'étendent aux processus d'Itô-Lévy et en particulier aux diffusions.

1 Construction des processus avec changements de rythmes

Soit $\zeta = (\zeta(t))_{t \geq 0}$ un processus càd-làg, appelé processus intrinsèque, que nous supposons à valeurs dans \mathbb{R}^d pour simplifier. Notons $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R}^d muni de la tribu borélienne. Les changements de rythmes consistent à lui ajouter des sauts selon un taux et un lieu de saut qui dépendent de l'état du processus. Le taux est caractérisé par une fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ et le lieu du saut par une

probabilité de transition $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que presque sûrement quelle que soit la loi initiale de ζ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_0^\varepsilon \lambda(\zeta(v)) dv < +\infty$ (propriété que doit vérifier un taux de hasard). Pour simplifier on suppose également que presque sûrement quelle que soit la loi initiale de ζ on a $\int_0^{+\infty} \lambda(\zeta(v)) dv = +\infty$, ce qui entraîne que pour M défini ci-dessous par (1) on a $M(\zeta; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) = 1$.

La terminologie "changements de rythmes" (switching en anglais) provient de certaines applications. Le modèle que nous allons présenter permet par exemple de modéliser des phénomènes dans lesquels les paramètres changent à certains instants aléatoires. Dans ce cas le processus ζ est en fait une famille de processus $(\zeta_i)_{i \in I}$ et après un saut l'évolution du phénomène qui était décrite par le processus ζ_i devient régie par le processus ζ_j , j étant choisi selon une probabilité Q qui dépend de i et de l'état du processus à l'instant du saut ; des exemples sont donnés dans le chapitre 8 de [4]. Mais, comme indiqué ci-dessus, pour simplifier nous supposons ici que ζ est à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Dans [3], J. Bect s'intéresse aux processus de Markov diffusifs par morceaux, cela correspond au cas où le processus intrinsèque est une diffusion. De nombreux exemples d'applications sont donnés dans son introduction.

Posons

$$M(\zeta; dx, dv) = \lambda(\zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} Q(\zeta(v); dx) dv. \quad (1)$$

Définition 1 *Un processus à changements de rythmes (Switching Process ou SP) associé à ζ et M d'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui peut être construit de la manière suivante :*

1. soit $\zeta^{(1)}$ un processus dont la loi est la loi de ζ sachant $\zeta(0) = x_0$,
2. la loi de (Y_1, T_1) sachant $\zeta^{(1)}$ est $M(\zeta^{(1)}; dx, dv)$,
3. pour $t < T_1$, $X_t = \zeta^{(1)}(t)$ et $X_{T_1} = Y_1$,

on suppose construits $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n$ ($n \geq 1$),

4. soit $\zeta^{(n+1)}$ un processus dont la loi sachant $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n$ est la loi de ζ sachant $\zeta(0) = Y_n$,
 5. la loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ sachant $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n+1)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n$ est $M(\zeta^{(n+1)}; dz, dv)$,
 6. si $T_n \leq t < T_{n+1}$, $X_t = \zeta^{(n+1)}(t - T_n)$, et $X_{T_{n+1}} = Y_{n+1}$.
- On pose $T_0 = 0, Y_0 = x_0$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$, ce qui est le cas sous l'hypothèse λ bornée que nous ferons ultérieurement.

2 Approche semi-régénérative

On définit le noyau de renouvellement N sur \mathbb{R}^d par

$$N(x, dy, dv) = \mathbb{E}(M(\zeta; dy, dv) / \zeta(0) = x), \quad (2)$$

au sens où

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \varphi(y, v) N(x, dy, dv) = \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \varphi(y, v) M(\zeta; dy, dv) / \zeta(0) = x \right)$$

pour toute fonction φ mesurable positive définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Le processus $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ est un processus de renouvellement markovien de noyau de renouvellement N et la loi de (Y_1, T_1) sachant $X_0 = x_0$ est $N(x_0, \cdot, \cdot)$. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus semi-régénératif associé au processus de renouvellement markovien $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$.

Nous définissons (Z_t, A_t) par $Z_t = Y_n$ et $A_t = t - T_n$ sur $T_n \leq t < T_{n+1}$ ($n \geq 0$). Nous appelons $(Z_t, A_t)_{t \geq 0}$ le CSMP (Completed Semi-Markov Process) sous-jacent au SP $(X_t)_{t \geq 0}$.

Proposition 2 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un SP associé à ζ et M donné par (1), $(Z_t, A_t)_{t \geq 0}$ son CSMP sous-jacent et $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ le processus de renouvellement markovien associé. On pose $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$.

Soit g une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et $t > 0$. Alors :

$$\mathbb{E}(g(t, X_t) / T_{N_t}, Z_t, A_t) = \psi(T_{N_t}, Z_t, A_t) \quad p.s.$$

avec

$$\psi(s, z, v) = \frac{\mathbb{E}\left(g(s + v, \zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} / \zeta(0) = z\right)}{\mathbb{E}\left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} / \zeta(0) = z\right)}.$$

En particulier :

$$\mathbb{E}(g(t, X_t)) = \mathbb{E}(\psi(T_{N_t}, Z_t, A_t)).$$

Démonstration : Posons $\bar{F}_z(v) = \mathbb{P}(T_1 > v / \zeta(0) = z) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} / \zeta(0) = z\right)$.

Soit ψ_0 une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi_0(T_{N_t}, Z_t, A_t) g(t, X_t)) &= \tag{3} \\ \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left(1_{\{T_n \leq t\}} \psi_0(T_n, Y_n, t - T_n) \mathbb{E}(g(t, \zeta^{(n+1)}(t - T_n)) 1_{\{T_{n+1} - T_n > t - T_n\}} / Y_n, T_n)\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(g(t, \zeta^{(n+1)}(t - T_n)) 1_{\{T_{n+1} - T_n > t - T_n\}} / Y_n, T_n) \\ &= \mathbb{E}\left(g(t - T_n + T_n, \zeta^{(n+1)}(t - T_n)) M(\zeta^{(n+1)}, \mathbb{R}^d \times]t - T_n, +\infty[) / Y_n, T_n\right) \\ &= \psi(T_n, Y_n, t - T_n) \bar{F}_{Y_n}(t - T_n) = \psi(T_n, Y_n, t - T_n) \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n > t - T_n / Y_n, T_n) \end{aligned}$$

En reportant dans (3), nous obtenons $\mathbb{E}(\psi_0(T_{N_t}, Z_t, A_t) g(t, X_t)) = \mathbb{E}(\psi_0(T_{N_t}, Z_t, A_t) \psi(T_{N_t}, Z_t, A_t))$. ■

On peut appliquer au SP $(X_t)_{t \geq 0}$ les résultats sur la convergence des processus semi-régénératifs. Notamment, dans le cas non-arithmétique et sous des conditions précisées par exemple dans [1] ou [2], on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X_t)) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} g(\zeta(v)) dv / \zeta(0) = z\right) m(dz)}{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(T_1 / \zeta(0) = z) m(dz)} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+} g(\zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} dv / \zeta(0) = z\right) m(dz)}{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} dv / \zeta(0) = z\right) m(dz)} \end{aligned}$$

où m est la loi stationnaire de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n \geq 1}$.

3 Cas d'un processus intrinsèque markovien

Théorème 3 *Un processus à changement de rythmes associé à un processus de Markov ζ et à M donné par (1) est un processus de Markov.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème suivant démontré dans [4].

Théorème 4 *On suppose que :*

- i. *le processus ζ est un processus de Markov.*
- ii. *pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et toute fonction mesurable positive φ définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \varphi(z, v) 1_{\{v > s\}} M(\zeta; dz, dv) \\ = & M(\zeta; \mathbb{R}^d \times]s, +\infty[) \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \varphi(z, v + s) M(\zeta(s + \cdot); dz, dv), \end{aligned} \quad (4)$$

- iii. *pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $M(\zeta; \mathbb{R}^d \times [0, s])$ est mesurable pour la tribu engendrée par les variables aléatoires $\zeta(v)$, $v \leq s$.*

Alors le SP $(X_t)_{t \geq 0}$ associé à ζ et M est un processus de Markov.

4 Cas d'un processus intrinsèque semi-martingale

Théorème 5 *Nous supposons que*

$$M(\zeta; dz, dv) = \lambda(\zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dx} Q(\zeta(v); dz) dv$$

et que λ est borné.

Soit $(\mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \mathcal{A}_0)$ un opérateur sur les fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+ \times F$, bornées sur $[0, t] \times F$ pour tout $t > 0$. Nous supposons que pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$:

- 1. *le processus $t \rightarrow g(t, \zeta(t))$ est une semi-martingale de la forme*

$$g(t, \zeta(t)) = g(0, \zeta(0)) + \int_0^t \mathcal{A}_0 g(v, \zeta(v)) dv + M_t^g$$

où M_t^g est une martingale,

- 2. *la fonction $\mathcal{A}_0 g$ est bornée sur $[0, t] \times F$ pour tout $t > 0$.*

Soit Ψ un SP associé à ζ et M et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Posons :

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 g(v, z) = \mathcal{A}_0 g(v, z) + \lambda(z) \int_F (g(v, z_1) - g(v, z)) Q(z; dz_1),$$

On suppose que pour tout $s > 0$, $\tau_{sg} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ et $\mathcal{A}_0 \tau_{sg} = \tau_s \mathcal{A}_0 g$. Alors :

$$\mathbb{E}(g(t, \Psi_t)) = \mathbb{E}(g(0, \Psi_0)) + \int_0^t \mathbb{E}(\tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, \Psi_s)) ds.$$

Démonstration : Nous allons nous appuyer sur la proposition 2 dont nous reprenons les notations. Nous posons $\mathbb{E}_z(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot / \zeta(0) = z)$.

Remarquons que ζ étant càd-làg, $\{v : \zeta(v_-) \neq \zeta(v)\}$ est dénombrable donc pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons $f(v, \zeta(v_-)) dv = f(v, \zeta(v)) dv$.

Soit g une fonction bornée appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. La formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t \lambda(\zeta(w)) dw} g(t, \zeta(t)) &= g(0, \zeta(0)) + \int_0^t e^{-\int_0^s \lambda(\zeta(w)) dw} \mathcal{A}_1 g(s, \zeta(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-\int_0^s \lambda(\zeta(w)) dw} dM_s^g \end{aligned}$$

avec $\mathcal{A}_1 g(s, x) = \mathcal{A}_0 g(s, x) - \lambda(x) g(s, x)$, d'où

$$\mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^t \lambda(\zeta(w)) dw} g(t, \zeta(t)) \right) - g(0, z) = \mathbb{E}_z \left(\int_0^t e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} \mathcal{A}_1 g(v, \zeta(v)) dv \right). \quad (5)$$

Soit N le noyau du processus de renouvellement markovien $(Y_n, T_n)_{n \geq 0}$. Nous écrivons $N(x, dy, dv) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) dF_x(v) \beta(x, v; dy)$ où dF_x est la loi de T_1 sachant $X_0 = x$ et $\beta(x, v; dy)$ la loi de Y_1 sachant $T_1 = v$ et $X_0 = x$. D'après (2) nous avons :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) dF_x(v) = \int_{\mathbb{R}^d} N(x, dy, dv) = \mathbb{E}_x(\lambda(\zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw}) dv,$$

donc $dF_x(v)$ peut s'écrire $dF_x(v) = \ell(x, v) e^{-\int_0^v \ell(x, w) dw} dv$ et

$$\ell(z, v) = \frac{\mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} \lambda(\zeta(v)) \right)}{\mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} \right)} \leq \|\lambda\|_\infty. \quad (6)$$

Il s'ensuit que $\mathbb{E}(N_t) < +\infty$ (voir par exemple [4] corollaire 5.9).

Remarquons que $\bar{F}_z(v) = \mathbb{E}_z(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw}) \geq e^{-\|\lambda\|_\infty v}$. Posons

$$\psi(s, z, v) = \mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} g(s+v, \zeta(v)) \right) / \bar{F}_z(v).$$

La fonction ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times [0, t]$ et compte-tenu de (5) appliqué à $\tau_s g$, la fonction $v \rightarrow \psi(s, z, v) = \mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} g(s+v, \zeta(v)) \right) / \bar{F}_z(v)$ est absolument continue. Notons $\partial_3 \psi$ "sa" densité, elle est bornée sur $[0, A] \times \mathbb{R}^d \times [0, B]$ pour tous $A > 0, B > 0$.

Posons :

$$\tilde{L}\psi(s, z, v) = \partial_3 \psi(s, z, v) + \int_{\mathbb{R}^d} (\psi(s+v, z_1, 0) - \psi(s, z, v)) \ell(z, v) \beta(z, v; dz_1).$$

Le corollaire 5.21 de [4] donne :

$$\mathbb{E}(\psi(T_{N_t}, Z_t, A_t)) = \mathbb{E}(\psi(0, Z_0, 0)) + \mathbb{E} \left(\int_0^t \tilde{L}\psi(T_{N_s}, Z_s, A_s) ds \right). \quad (7)$$

La proposition 2 entraîne $\mathbb{E}(\psi(T_{N_t}, Z_t, A_t)) = \mathbb{E}(g(t, X_t))$.

Intéressons nous maintenant au deuxième membre de (7). Pour $(s, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, la fonction $v \rightarrow \bar{F}_z(v) \tilde{L}\psi(s, z, v)$ est intégrable sur $[0, t]$. Une intégration par parties, la relation $d\bar{F}_z(v) = -\bar{F}_z(v) \ell(z, v) dv$, l'hypothèse $\mathcal{A}_0 \tau_s g = \tau_s \mathcal{A}_0 g$ et la formule (5) appliquée à $\tau_s g$ entraînent :

$$\int_0^t \bar{F}_z(v) \tilde{L}\psi(s, z, v) dv = \int_0^t \mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} \tilde{\mathcal{A}}_0 g(s+v, \zeta(v)) \right) dv.$$

Posons $\psi_1(s, z, v) = \mathbb{E}_z \left(e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dw} \tilde{\mathcal{A}}_0 g(s+v, \zeta(v)) \right) / \bar{F}_z(v)$. Pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t \bar{F}_z(v) \tilde{L}\psi(s, z, v) dv = \int_0^t \bar{F}_z(v) \psi_1(s, z, v) dv$ et par conséquent, pour tout $(s, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $\int_0^t \tilde{L}\psi(s, z, v) dv = \int_0^t \psi_1(s, z, v) dv$. Donc pour $T_n \leq t < T_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{L}\psi(T_{N_s}, Z_s, A_s) ds &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{T_{k+1}-T_k} \tilde{L}\psi(T_k, Y_k, v) dv + \int_0^{t-T_n} \tilde{L}\psi(T_n, Y_n, v) dv \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{T_{k+1}-T_k} \psi_1(T_k, Y_k, v) dv + \int_0^{t-T_n} \psi_1(T_n, Y_n, v) dv \\ &= \int_0^t \psi_1(T_{N_s}, Z_s, A_s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la proposition 2 nous obtenons $\mathbb{E} \left(\int_0^t \tilde{L}\psi(T_{N_s}, Z_s, A_s) \right) ds = \int_0^t \mathbb{E}(\tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, X_{s-})) ds$, d'où le résultat. ■

Corollaire 6 *Nous supposons que*

$$M(\zeta; dz, dv) = \lambda(\zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(\zeta(w)) dx} Q(\zeta(v); dz) dv$$

et que λ est borné.

Soit $(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ un opérateur sur les fonctions bornées à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}^d . Nous supposons que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

1. le processus $t \rightarrow f(\zeta(t))$ est une semi-martingale de la forme

$$f(\zeta(t)) = f(\zeta(0)) + \int_0^t \mathcal{A}f(\zeta(v)) dv + M_t^f$$

où M_t^f est une martingale,

2. la fonction $\mathcal{A}f$ est bornée sur \mathbb{R}^d .

Soit Ψ un SP associé à ζ et M et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Posons :

$$\tilde{\mathcal{A}}f(z) = \mathcal{A}f(z) + \lambda(z) \int_{\mathbb{R}^d} (f(z_1) - f(z)) Q(z; dz_1).$$

Alors :

$$\mathbb{E}(f(\Psi_t)) = \mathbb{E}(f(\Psi_0)) + \int_0^t \mathbb{E}(\tilde{\mathcal{A}}f(\Psi_s)) ds.$$

Le résultat suivant est une application du théorème 5 lorsque le processus intrinsèque ζ est un processus de Lévy.

Corollaire 7 *Soit ζ un processus de Lévy d -dimensionnel de mesure de sauts J et de triplet (μ, \mathcal{C}, ν) , c'est-à-dire*

$$\zeta(t) = \mu t + \sqrt{\mathcal{C}} W_t + \int_0^t \int_{\{x: \|x\| \geq 1\}} x J(ds, dx) + \int_0^t \int_{\{x: \|x\| < 1\}} x \tilde{J}(ds, dx)$$

où W est un brownien standard de dimension d indépendant de J , \mathcal{C} une matrice de corrélation et $\tilde{J}(ds, dx) = J(ds, dx) - \nu(dx) ds$.

Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ l'ensemble des fonctions $g = g(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bornées de classe $C^{1,2}$, c'est-à-dire continûment différentiable par rapport à la variable temporelle t et 2

fois continûment différentiable par rapport à la variable spatiale x , et dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont bornées sur $[0, t] \times \mathbb{R}^d$. Pour $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, posons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 g(s, x) &= \frac{\partial g}{\partial s}(s, x) + \sum_{i=1}^d \mu_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathcal{C}_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(s, x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(s, x + y) - g(s, x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) y_i 1_{\{\|y\| < 1\}} \right) \nu(dy). \\ \tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, x) &= \mathcal{A}_0 g(s, x) + \lambda(x) \int_{\mathbb{R}^d} (g(s, y) - g(s, x)) Q(x; dy). \end{aligned}$$

Soit X un SP associé à ζ et M donné par (1). On suppose que λ est borné. Alors pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$:

$$\mathbb{E}(g(t, X_t)) = \mathbb{E}(g(0, X_0)) + \int_0^t \mathbb{E}(\tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, X_s)) ds.$$

Démonstration : La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} g(t, \zeta(t)) &= g(0, 0) + \int_0^t \mathcal{A}_0 g(s, \zeta(s)) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, \zeta(s-)) \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_s^j \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(s, \zeta(s-) + y) - g(s, \zeta(s-)) \right) \tilde{J}(ds, dy). \end{aligned} \quad (8)$$

D'une part les $\partial g / \partial x_i$ étant bornés, les $\int_0^t (\partial g / \partial x_i)(s, \zeta(s-)) dW_s^j$ sont des martingales. D'autre part la formule de Taylor entraîne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^t |g(s, \zeta(s-) + y) - g(s, \zeta(s-))|^2 \nu(dy) ds \right) &\leq 4 \|g\|^2 t \nu(\{y : \|y\| \geq 1\}) \\ &\quad + C_t t \int_{\{y: \|y\| < 1\}} \|y\|^2 \nu(dy) < +\infty \end{aligned}$$

où C_t est une constante qui dépend de $\sup_{1 \leq i \leq d} \sup_{s \leq t, x \in \mathbb{R}^d} |\frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x)|$. Par conséquent $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(s, \zeta(s-) + y) - g(s, \zeta(s-)) \right) \tilde{J}(ds, dy)$ est une martingale.

On montre de même que $\mathcal{A}_0 g$ est bornée sur $[0, t] \times \mathbb{R}_+$. ■

En posant $g(s, x) = u(t - s, x)$ on obtient la formule de Feynman-Kac.

Corollaire 8 (formule de Feynman-Kac) Soit ζ un processus de Lévy d -dimensionnel de triplet (μ, \mathcal{C}, ν) . Soit X un SP associé à ζ et M donné par (1). On suppose que λ est borné. Soit $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée de classe $C^{1,2}$ dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont bornées sur $[0, t] \times \mathbb{R}^d$ pour tout t . On suppose que u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) + \lambda(x) \int_{\mathbb{R}^d} (u(t, y) - u(t, x)) Q(x; dy), \quad u(0, x) = h(x),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(t, x) &= \sum_{i=1}^d \mu_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathcal{C}_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(t, x + y) - u(t, x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) y_i 1_{\{\|y\| < 1\}} \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

alors $u(t, x) = \mathbb{E}_x(h(X_t))$ pour tout t .

5 Cas des processus non homogènes en temps

Lorsque ζ est solution d'une équation différentielle stochastique non homogène ou plus généralement un processus d'Itô-Lévy non homogène en temps, on sent bien que le SP X n'est pas défini correctement après un saut T_n ($n \geq 1$) car il repart comme si celui-ci était l'instant initial. D'ailleurs on ne peut appliquer le théorème 5 car la condition $\mathcal{A}_0 \tau_s g = \tau_s \mathcal{A}_0 g$ n'est pas satisfaite. C'est pourquoi nous allons reprendre la définition du SP X dans ce cas et, quitte à être inhomogène, nous allons autoriser la fonction λ et le noyau Q à dépendre du temps.

Soit λ une fonction positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et Q est une probabilité de transition de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Posons :

$$M(\zeta; dz, dv) = \lambda(v, \zeta(v)) e^{-\int_0^v \lambda(w, \zeta(w)) dw} Q(v, \zeta(v); dz) dv.$$

On construit le SP inhomogène X de la manière suivante. Notons $\zeta^{s,x} = (\zeta^{s,x}(t))_{t \geq 0}$ un processus dont la loi est celle de $\zeta(s + \cdot)$ sachant $\zeta(s) = x$. Supposons avoir construit $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n$. Soit $\zeta^{(n+1)}$ un processus dont la loi sachant $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n = z, T_n = s$ est la loi de $\zeta^{s,z}$. La loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ sachant $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n+1)}, Y_1, T_1, \dots, Y_n = z, T_n = s$ est $M(\zeta^{(n+1)}; dz, dv)$. Pour $T_n \leq t < T_{n+1}$ on pose $X_t = \zeta^{(n+1)}(t - T_n)$ et $X_{T_{n+1}} = Y_{n+1}$.

Si $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, posons $\tilde{M}(\xi; ds_1, dz, dv) = M(\xi^{(2)}; dz, dv) \delta_{\xi^{(1)}(v)}(ds_1)$. Soit $\tilde{\zeta}$ un processus dont la loi sachant $\tilde{\zeta}(0) = (s, x)$ est celle du processus $t \rightarrow (s + t, \zeta^{s,x}(t))$. Le processus $\tilde{X} = (t, X_t)_{t \geq 0}$ est un SP associé à $\tilde{\zeta}$ et \tilde{M} vérifiant $\tilde{X}^{(1)} = 0$.

Dans le cas d'un SP inhomogène, $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ n'est pas un processus de renouvellement markovien. Par contre le processus $(\tilde{Y}_n, T_n)_{n \geq 1}$, avec $\tilde{Y}_n = (T_n, Y_n)$, est un processus de renouvellement markovien de noyau

$$\tilde{N}(s, x; ds_1, dx_1, dv) = \mathbb{E}(M(\zeta^{s,x}; dx_1, dv)) \delta_{s+dv}(ds_1).$$

En appliquant le corollaire 6 au SP associé à $\tilde{\zeta}$ et \tilde{M} on obtient la proposition suivante.

Proposition 9 *On se place dans le cadre de la construction et des notations de ce paragraphe. On suppose que la fonction λ est bornée.*

Soit $(\mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \mathcal{A}_0)$ un opérateur sur les fonctions bornées à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}^d . Nous supposons que pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$:

1. *le processus $t \rightarrow g(t, \zeta(t))$ est une semi-martingale de la forme*

$$g(t, \zeta(t)) = g(0, \zeta(0)) + \int_0^t \mathcal{A}_0 g(v, \zeta(v)) dv + M_t^g$$

où M_t^g est une martingale,

2. *la fonction $\mathcal{A}_0 g$ est bornée sur \mathbb{R}^d .*

Alors :

$$\mathbb{E}(g(t, X_t)) = \mathbb{E}(g(0, X_0)) + \int_0^t \mathbb{E}(\tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, X_s)) ds$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 g(s, x) = \mathcal{A}_0 g(s, x) + \lambda(s, x) \int_{\mathbb{R}^d} (g(s, z) - g(s, x)) Q(s, x; dz).$$

Exemple. Lorsque les processus intrinsèques sont des processus d'Itô-Lévy qui s'écrivent

$$d\zeta(t) = b(t, \zeta(t_-)) dt + \sigma(t, \zeta(t_-)) dW_t + \int a(t, \zeta(t_-), y) \tilde{J}(dt, dy)$$

lorsque $d = 1$ (on laisse le lecteur généraliser au cas d quelconque), on a (voir [5]) :

$$\begin{aligned} g(t, \zeta(t)) &= g(0, \zeta(0)) + \int_0^t \mathcal{A}_0 g(s, \zeta(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \zeta(s_-)) \frac{\partial g}{\partial x}(s, \zeta(s_-)) dW_s \\ &\quad + \int_0^t \int (g(s, \zeta(s_-) + a(s, \zeta(s_-), y)) - f(s, \zeta(s_-))) \tilde{J}(ds, dy) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 g(s, x) &= \frac{\partial g}{\partial s}(s, x) + b(s, x) \frac{\partial g}{\partial x}(s, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(s, x) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(g(s, x + a(s, x, y)) - g(s, x) - a(s, x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(s, x) \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

Références

- [1] ALSMEYER G. On the Markov Renewal Theorem, *Stoch. Proc. Appl.*, 50, 37-56, 1994.
une version corrigée en 1998 sur <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer/Publikationen/>
- [2] ALSMEYER G. The Markov Renewal Theorem and Related Results, *Markov Proc. Rel. Fields*, 3, 103-127, 1997.
- [3] BECT J., *Processus de Markov diffusifs par morceaux : outils analytiques et numériques*, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale "Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes", Université Paris-Sud, 2007.
- [4] C. COCOZZA-THIVENT *Renouvellement markovien et PDMP*, online at : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01418366>
- [5] PASCUCCI A., *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer-Verlag, 2011.