



Formes normales de champs de vecteurs

Patrick Bernard

► To cite this version:

Patrick Bernard. Formes normales de champs de vecteurs . Gazette des Mathématiciens, 2016, 148.
hal-01435605

HAL Id: hal-01435605

<https://hal.science/hal-01435605>

Submitted on 14 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formes normales de champs de vecteurs

• P. BERNARD

Pour étudier la dynamique d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point fixe, il est naturel de chercher des coordonnées dans lesquelles ce champ a une expression aussi simple que possible. On va décrire une méthode générale pour le faire qui remonte à Lindstedt (1854–1939), Poincaré (1854–1912), Dulac (1870–1955), Birkhoff (1884–1944) et d'autres. On rappelle que tout champ de vecteurs se ramène à un champ constant dans les bonnes coordonnées au voisinage d'un point régulier (point non fixe). Du point de vue de l'étude locale, seuls les points fixes présentent donc une difficulté.

On s'intéresse aux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont définis et C^∞ dans un voisinage de 0 et nuls en 0. On note $\mathcal{X}$ cet espace de champs. On note ϕ_*X l'action usuelle du difféomorphisme local ϕ sur le champ X :

$$\phi_*X(x) = d\phi_{\phi^{-1}(x)} \cdot X(\phi^{-1}(x)),$$

c'est l'expression de X dans les nouvelles coordonnées données par ϕ . On note $\mathcal{G}$ le groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ en 0 qui fixent 0. Le groupe $\mathcal{G}$ préserve $\mathcal{X}$, c'est-à-dire que $\phi_*X \in \mathcal{X}$ si $X \in \mathcal{X}$ et $\phi \in \mathcal{G}$. Pour tout champ $X \in \mathcal{X}$, le flot φ_X^1 au temps 1 est défini au voisinage de 0, c'est un élément de $\mathcal{G}$. L'une des opérations essentielles dans ce texte est le crochet de Lie $[X, Y]$ des champs de vecteurs. Il est défini par

$$[X, Y](x) = dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x),$$

et il est caractérisé par la propriété

$$D_{[X, Y]} = D_X D_Y - D_Y D_X$$

en notant D_X l'opérateur sur les fonctions C^∞ qui à la fonction f associe la fonction $x \mapsto df_x \cdot X(x)$. Il est utile pour les applications de travailler avec des classes restreintes de champs de vecteurs. On se donne pour ceci une sous-algèbre de Lie $\mathcal{Y}_1 \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, muni du crochet de commutation), c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par crochet de commutation. On considère alors le sous-espace $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ des champs

X tels que $dX_x \in \mathcal{Y}_1$ pour tout x voisin de 0. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire qu'il est stable par crochet de Lie.

Quelques exemples classiques sont les champs de divergence nulle, les champs holomorphes sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, les champs Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^{2n}$ (les champs de la forme $X(x) = J \nabla H(x)$, où J est la matrice de la multiplication par i dans l'identification standard entre $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{C}^n$, et où H est une fonction).

On notera $[X]^k$ le développement à l'ordre k du champ $X \in \mathcal{X}$ en 0, $[X]_k$ ou X_k le terme homogène de degré k de ce développement. On note $\mathcal{Y}^k := \{[Y]^k, Y \in \mathcal{Y}\}$ et $\mathcal{Y}_k := \{[Y]_k, Y \in \mathcal{Y}\}$, ce sont les espaces de champs polynomiaux (resp. homogènes) de degré k qui appartiennent à $\mathcal{Y}$.

Dans la suite, nous dirons qu'une matrice est diagonalisable si elle est $\mathbb{C}$ -diagonalisable (le terme semi-simple est aussi employé dans la littérature). Toute matrice carrée A admet une unique décomposition de Jordan $A = A_s + A_n$, où A_s est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), A_n est nilpotente, et $A_s A_n = A_n A_s$. Si A est réelle, A_s et A_n le sont aussi (mais A_s n'est pas forcément diagonalisable dans $\mathbb{R}$). Cette décomposition est aussi appelée décomposition de Dunford.

Le but de ce texte est de discuter et de démontrer en détails le résultat suivant, dit théorème de forme normale :

Théorème. Soit $X \in \mathcal{Y}$ un champ de vecteurs de linéarisé A . Considérons une matrice B qui est, soit la partie diagonalisable de A dans sa décomposition de Jordan, soit une matrice qui a la propriété d'appartenir à $\mathcal{Y}_1$ et d'être l'adjointe de A pour un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une suite $Y_i, i \geq 2$ d'éléments de $\mathcal{Y}_i$ qui a la propriété que, pour tout $k \geq 2$, le développement de Taylor de $(\varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1)_* X - A$ à l'ordre k commute avec B .

On verra que le champ $(\varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1)_* X$ est un élément de $\mathcal{Y}$.

Comme le champ $Y_2 + \dots + Y_k$ n'a pas de terme linéaire, le linéarisé de $(\varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1)_* X$ est égal au linéarisé A de X . Un champ de linéarisé A est dit

sous forme normale si sa partie non linéaire commute avec B . Le théorème permet donc de mettre un champ de vecteurs sous forme normale à tout ordre par un changement de variables. Comme il y a plusieurs choix possibles pour la matrice B , il n'y a pas une unique notion de forme normale (mais, dans le cas où A est diagonalisable, c'est en général le choix $B = A$ qui est fait).

L'utilité de ce théorème est d'autant plus grande que la condition de commuter avec B est restrictive. Dans les meilleurs cas (voir ci-dessous), cette condition impose à la forme normale d'être linéaire ; dans les pires cas, par exemple si $A = 0$, (et donc $B = 0$), elle ne donne aucune information..

Lorsque $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des singularités de champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, ce résultat est appelé théorème de forme normale de Poincaré-Dulac. Dans ce cas, on interprète le linéarisé A comme une matrice $n \times n$ complexe (et non comme une matrice $2n \times 2n$ réelle). La matrice $n \times n$ complexe B est l'adjointe de A en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ pour un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si c'est l'adjointe de A pour un produit hermitien sur $\mathbb{C}^n$.

Lorsque $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des singularités de champs de vecteurs Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^{2n}$, ce résultat est appelé théorème de forme normale de Poincaré-Birkhoff.

Les énoncés initiaux de ces théorèmes de formes normales n'avaient pas une forme aussi similaire que ceux que nous venons de donner. Dans le cas du théorème de Poincaré-Birkhoff, par exemple, les changements de variables canoniques (ceux qui préservent la structure Hamiltonienne des champs de vecteurs) n'étaient pas cherchés initialement comme flots de champs de vecteurs Hamiltoniens, comme ci-dessus, mais à l'aide de fonctions génératrices. Ceci masquait partiellement l'analogie entre les deux énoncés. L'objectif du présent texte est justement de donner une présentation aussi unifiée que possible des différents résultats de forme normale.

C'est surtout le cas où A est diagonalisable et $B = A$ qui a été considéré au départ, ou le cas $B = A_s$. Les variantes où B est l'adjoint de A , qui sont plus précises dans le cas non diagonalisable, mais aussi moins canoniques, sont plus récentes, voir [2] et ses références.

Pour interpréter la conclusion du théorème, il faut décrire les champs qui commutent avec B . On se contente ici de mentionner les cas les plus simples où A est diagonalisable et où $B = A$.

Considérons dans un premier temps le contexte de Poincaré-Dulac, c'est-à-dire celui des champs de vecteurs holomorphes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres du linéarisé A (interprété comme un élément de $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$). Une relation de résonance est une relation de la forme

$$\lambda_i = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n$$

avec $m_i \in \mathbb{N}$ et $\sum m_i \geq 2$. S'il n'existe aucune relation de résonance entre les valeurs propres de A , alors tout champ polynomial commutant avec A est linéaire. La conclusion du théorème de forme normale dans ce cas est donc que pour tout k il existe un difféomorphisme holomorphe ϕ tel que $\phi_* X = A$ à l'ordre k .

La condition de non résonance est toutefois trop restrictive, notamment dans le contexte de Poincaré-Birkhoff. Dans ce contexte, $-\lambda$ est une valeur propre du linéarisé A dès que λ en est une. Il existe donc toujours des résonances du type $\lambda = 2\lambda + (-\lambda)$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff ne permet jamais de conjuguer un champ à son linéarisé. Décrivons les formes normales dans le cas emblématique où les valeurs propres de linéarisé A sont imaginaires pures, de la forme $\pm i\omega_j$, $1 \leq j \leq n$. Ce choix correspond à l'étude de n oscillateurs non linéaires couplés. Supposons qu'il n'y a pas d'autre résonance (de type Poincaré-Dulac) que celles qui sont inévitables, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation non triviale de la forme

$$m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n = 0$$

avec $m_j \in \mathbb{Z}$. Ces relations sont dites résonances de Poincaré-Birkhoff. On peut se ramener par un changement de variables linéaires au cas où $A = J\nabla Q$, avec $Q = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \dots + \omega_n I_n$, où $I_j = (q_j + p_j)^2/2$. Au vu de la condition de non résonance, un argument de densité montre que tout champ qui commute avec A commute en fait avec chacun des champs linéaires $A_j = J\nabla I_j$. Les champs Hamiltoniens vérifiant cette condition sont ceux de la forme $X = J\nabla H$ où $H = f(I_1, \dots, I_n)$. Ces champs ont une dynamique particulièrement simple, dite intégrable, au cours de laquelle les quantités I_j sont préservées. Dans le cas sans résonances de Poincaré-Birkhoff, le théorème de forme normale permet donc de conjuguer le champ de vecteur initial à une forme normale intégrable à un reste près d'ordre arbitrairement petit.

Pour illustrer le cas où A n'est pas diagonalisable, considérons un champ Hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$ dont le linéarisé est donné par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est associée au Hamiltonien $H(q, p) = p^2/2$, en notant (q, p) les points de $\mathbb{R}^2$. On peut alors appliquer le théorème avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un champ Hamiltonien commute avec B si et seulement si son Hamiltonien est indépendant de p . Les formes normales dans ce contexte sont donc engendrées par les hamiltoniens de la forme $H(q, p) = p^2/2 + f(q)$ où f est une fonction dont le développement d'ordre 2 en 0 est nul. Au delà de la satisfaction de retrouver la forme d'un Hamiltonien classique (énergie cinétique plus énergie potentielle), cette forme normale n'est pas d'une grande utilité dynamique car les systèmes Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^2$ ont une structure assez simple pour être étudiés directement. Toutefois, il y a des variantes de cet exemple pour lesquelles la forme normale donne des informations décisives, comme la singularité dite $0^2 i\omega$, voir [2].

L'énoncé général du théorème de forme normale soulève une autre question naturelle. Peut-on trouver un difféomorphisme $\phi \in \mathcal{G}$ tel que $\phi_* X$ commute avec B dans un voisinage de 0? Cette question donne lieu à de nombreux développements classiques et récents. La réponse est négative en général, ce qui traduit le fait que les propriétés dynamiques particulières des champs sous forme normale (par exemple l'intégrabilité) ne sont pas toujours satisfaites par le champ de vecteurs initial. Une des erreurs célèbres de Poincaré est d'avoir dans un premier temps négligé ce fait, voire [4]. Il existe malgré tout des cas où une telle conjugaison ϕ existe. Les méthodes algébriques que nous allons exposer pour démontrer le théorème de forme normale ne suffisent toutefois pas pour obtenir de telles conclusions. Une approche naturelle consiste à étudier la convergence de la série $Y_2 + Y_3 + \dots$, ou celle de la série $\sum [\varphi_{Y_2 + \dots + Y_k}^1]_k$.

Le livre [1], chapitre 5, est une bonne introduction à ces sujets, on peut aussi citer [3, 2].

Ce texte a profité de la relecture attentive et des suggestions profitables de Thomas Dedieu. Il a aussi profité des lumières en matière de formes

normales de Gérard Iooss et Éric Lombardi, de qui l'auteur tient l'essentiel de ses connaissances en la matière.

1. Contexte formel

Il est souvent pratique d'identifier un champ de vecteurs X à la dérivation $f \mapsto df \cdot X$ qu'il engendre sur l'espace des fonctions C^∞ . Quand on ne s'intéresse qu'au développement de Taylor à l'ordre k de champs nuls en 0, on peut considérer une action sur l'espace de dimension finie

$$E^k = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$$

des polynômes de degré au plus k sans terme constant à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^n$, où E_i est l'espace des polynômes homogènes de degré i . Tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}$ engendre un endomorphisme de E^k , noté X ou $X_\diamond$, donné par $X_\diamond P = [dP \cdot X]^k$, en notant $[f]^k$ le développement de Taylor à l'ordre k de f à l'origine. On fait aussi agir sur E^k les difféomorphismes locaux fixant l'origine en définissant $\phi_\diamond P = [P \circ \phi]^k$. Pour tenter de limiter les confusions, on notera $\diamond$ la composition dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. On remarque que $(\phi \circ \psi)_\diamond = \psi_\diamond \phi_\diamond$ si $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ (le groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ fixant l'origine).

Le développement à l'ordre k d'un champ de vecteurs ou d'un difféomorphisme est déterminé par son action sur E^k . En effet, pour $\ell \in E_1$, on a $X_\diamond \ell = [\ell \circ X]^k = \ell \circ [X]^k$ pour tout $X \in \mathcal{X}$, et $\phi_\diamond \ell = [\ell \circ \phi]^k = \ell \circ [\phi]^k$ pour tout $\phi \in \mathcal{G}$.

On constate que

$$(\phi_* X)_\diamond = \phi^{-1}_\diamond X_\diamond \phi_\diamond$$

c'est-à-dire que l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$ à l'ordre k s'identifie à une action par conjugaison. Le crochet de Lie s'identifie, sans surprise, au crochet de commutation :

$$[X, Y]_\diamond = X_\diamond Y_\diamond - Y_\diamond X_\diamond.$$

Prendre le flot est une exponentielle :

$$(\varphi_X^1)_\diamond = \exp(X_\diamond).$$

Pour le démontrer, on constate que $\partial_t(P \circ \varphi_X^t) = (X \cdot P) \circ \varphi_X^t$ pour tout $P \in E^k$, c'est-à-dire que $\partial_t(\varphi_X^t)_\diamond = \varphi_X^t_\diamond X_\diamond$ dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. C'est l'équation qui définit $\exp(tX_\diamond)$. On rappelle finalement la relation

$$\text{Ad}_{\exp L} = \exp(\text{ad}_L)$$

pour tout $L \in \mathfrak{gl}(E^k)$, en notant $\text{Ad}_V \in \text{GL}(\mathfrak{gl}(E^k))$ la conjugaison $M \mapsto V^{-1} \diamond M \diamond V$ pour tout $V \in \text{GL}(E^k)$ et en notant $\text{ad}_L \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E^k))$ l'opérateur

$M \mapsto L \diamond M - M \diamond L$. Pour le démontrer, il suffit de vérifier que $\partial_t(\text{Ad}_{\exp tL}) = \text{ad}_X \diamond \text{Ad}_{\exp tL}$ (composition dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E^k))$).

On dit qu'un endomorphisme de E^k augmente les degrés de d s'il envoie chacun des sous-espaces $E_i \oplus \dots \oplus E_k \subset E^k$ sur $E_{i+d} \oplus \dots \oplus E_k$ (ce dernier sous-espace étant réduit à 0 lorsque $i + d > k$). Tout endomorphisme qui augmente les degrés de k est nul. L'endomorphisme $X \diamond$ associé à un champ homogène de degré $d + 1$ augmente les degrés de d .

2. Démonstration du théorème de forme normale

On prouve le théorème de forme normale par récurrence sur $k \geq 2$. On fixe une matrice B comme dans l'énoncé et on dit qu'un champ de vecteurs est sous forme normale à l'ordre k si sa partie non linéaire commute avec B à l'ordre k . On suppose qu'il existe un champ de vecteurs $Z = Y_2 + \dots + Y_{k-1} \in \mathcal{Y}$, polynomial de degré $k - 1$, tel que $(\varphi_Z^1)_* X$ est sous forme normale à l'ordre $k - 1$ (dans le cas $k = 2$, on prend $Z = 0$). On montre alors l'existence d'un champ homogène $Y_k \in \mathcal{Y}_k$ tel que $(\varphi_{Z+Y_k}^1)_* X$ est sous forme normale à l'ordre k . En représentant les objets par des opérateurs sur E^k , on a

$$(\varphi_Z^1)_* X = \text{Ad}_{\exp Z}(X) = \exp(\text{ad}_Z)(X).$$

Comme l'opérateur ad_Z préserve le sous-espace $\mathcal{Y}^k \subset \mathfrak{gl}(E^k)$, il en est de même de $\exp \text{ad}_Z$, donc $\text{Ad}_{\exp Z}(X) \in \mathcal{Y}^k$. On a donc (toujours dans $\mathfrak{gl}(E^k)$)

$$(\varphi_Z^1)_* X = \text{Ad}_{\exp Z}(X) = A + N + R_k$$

où N est un champ polynomial sans terme linéaire de degré $k - 1$ qui commute avec B et $R_k \in \mathcal{Y}_k$ est homogène de degré k . Pour tout $Y_k \in \mathcal{Y}_k$, on a $Z \diamond Y_k = Y_k \diamond Z = 0$ (car ces endomorphismes de E^k augmentent le degré de k), donc $\exp(Z + Y_k) = \exp Z \diamond \exp Y_k$ dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. On a les équations

$$\begin{aligned} & \exp(-Z - Y_k) \diamond X \diamond \exp(Z + Y_k) \\ &= \exp(-Y_k) \diamond (A + N + R_k) \diamond \exp(Y_k) \\ &= A + N + R_k + A \diamond Y_k - Y_k \diamond A. \end{aligned}$$

Le champ $(\varphi_{Z+Y_k}^1)_* X$ est sous forme normale à l'ordre k si et seulement si

$$\text{ad}_B(R_k + \text{ad}_A(Y_k)) = 0.$$

La proposition ci-dessous implique que $\text{ad}_B \circ \text{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$, et donc que cette équation a une solution Y_k . Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Proposition. L'espace $\mathcal{Y}_k \cap \ker \text{ad}_B$ des éléments de $\mathcal{Y}_k$ qui commutent avec B est un complémentaire de $\text{ad}_A(\mathcal{Y}_k)$ dans $\mathcal{Y}_k$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{Y}_k = (\mathcal{Y}_k \cap \ker \text{ad}_B) + \text{ad}_A(\mathcal{Y}_k).$$

3. Opérateur de commutation

Le but est maintenant de démontrer la proposition utilisée ci-dessus dans la preuve du théorème de forme normale. On se place dans le cadre général d'un espace vectoriel réel E de dimension finie, on note $\mathfrak{gl}(E)$ l'espace des endomorphismes de E et $\text{GL}(E)$ le groupe des isomorphismes. Pour tout $V \in \mathfrak{gl}(E)$ on considère l'opérateur $\text{ad}_V \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E))$ défini par

$$\text{ad}_V(M) := VM - MV = [V, M].$$

On vérifie que $\text{ad}_{[V, W]} = [\text{ad}_V, \text{ad}_W]$. On s'intéresse au cas où $E = E^k$ et $V = A \diamond$. L'opérateur ad_V est alors appelé opérateur homologique.

Étant donné un produit scalaire sur E , on munit $\mathfrak{gl}(E)$ du produit scalaire $\text{tr}(NM^t)$, où M^t est l'adjoint de M relativement au produit scalaire de E . Ce produit scalaire est aussi caractérisé par la propriété suivante : pour toute base orthonormée (e_i) de E , en notant (l_i) la base duale, les éléments $e_i \otimes l_j$ (c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{gl}(E)$ représentés dans la base (e_i) par une matrice ayant tous ses coefficients égaux à zéro sauf un, qui est égal à 1) constituent une base orthonormée de $\mathfrak{gl}(E)$.

Propriété. Si W est l'adjoint de V , alors ad_W est l'adjoint de ad_V . Le noyau de ad_W est donc un supplémentaire de l'image de ad_V .

$$\begin{aligned} \text{tr}((VN - NV)M^t) &= \text{tr}(VNM^t - NVM^t) \\ &= \text{tr}(NM^tV - NVM^t) = \text{tr}(N(WM)^t - N(MW)^t) \\ &= \text{tr}(N(\text{ad}_W M)^t). \end{aligned}$$

$\square$

Un endomorphisme est dit normal s'il commute avec son adjoint. Tout endomorphisme normal est $\mathbb{C}$ -diagonalisable, et a le même noyau que son adjoint. Dans le cadre réel, tout opérateur normal peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice diagonale par blocs 1×1 ou 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Propriété. Si V est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), alors il existe un produit scalaire sur E (donc sur $\mathfrak{gl}(E)$) pour lequel ad_V est normal. En notant W l'adjoint de V , on a donc $\ker \text{ad}_W = \ker \text{ad}_V$.

Si V est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), il existe une base réelle dans laquelle V est représentée par une matrice diagonale par blocs 1×1 ou 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. En considérant le produit scalaire sur E pour lequel cette base est orthonormée, on voit que V commute avec son adjoint W . On a alors $[\text{ad}_V, \text{ad}_W] = \text{ad}_{[V, W]} = 0$, donc ad_V est normal. L'endomorphisme ad_V est donc $\mathbb{C}$ -diagonalisable, et il a le même noyau que son adjoint ad_W . $\square$

Plus généralement, on peut considérer la décomposition de Jordan $V = V_s + V_n$ de V .

Propriété. La décomposition de Jordan de ad_V est $\text{ad}_V = \text{ad}_{V_s} + \text{ad}_{V_n}$.

On a vu que ad_{V_s} est $\mathbb{C}$ -diagonalisable. On a $[\text{ad}_{V_s}, \text{ad}_{V_n}] = \text{ad}_{[V_s, V_n]} = 0$, donc il suffit de vérifier que ad_{V_n} est nilpotent. Pour tout $M \in \mathfrak{gl}(E)$, on voit que $\text{ad}_{V_n}^l(M)$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $V_n^i M V_n^j$ avec $i + j = l$. En choisissant k tel que $V_n^k = 0$, ces termes sont tous nuls si $l \geq 2k$, donc $\text{ad}_{V_n}^{2k} = 0$. $\square$

Propriété. Il existe un produit scalaire de E pour lequel l'adjoint W de V a la propriété suivante : tout endomorphisme qui commute avec W commute avec V_s .

La décomposition de Jordan de l'adjoint W de V est $W = W_s + W_n$ où W_s est l'adjoint de V_s et W_n celui de V_n . Il existe un produit scalaire pour lequel W_s commute avec V_s , ce qui implique que ad_{W_s} et ad_{V_s} ont le même noyau. Comme $\text{ad}_W = \text{ad}_{W_s} + \text{ad}_{W_n}$ est la décomposition de Jordan de ad_W , on a $\ker \text{ad}_W \subset \ker \text{ad}_{W_s} = \ker \text{ad}_{V_s}$. $\square$

La proposition à démontrer est une variante des résultats ci-dessus dans le cas où $E = E^k$, où $V = A \diamond$ et où on s'intéresse à la restriction de ad_V au sous-espace invariant $\mathcal{Y}_k \subset \mathfrak{gl}(E^k)$.

Lemme. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(E)$ un sous-espace invariant par ad_V .

Si $W \in \mathfrak{gl}(E)$ est l'adjoint de V pour un produit scalaire de E tel que $\text{ad}_W(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g} \cap \ker \text{ad}_W$ est un supplémentaire de $\text{ad}_V(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$.

Si $W = V_s$ est la partie diagonalisable de V , alors $\mathfrak{g} \cap \ker \text{ad}_W$ est transverse à $\text{ad}_V(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire que $\text{ad}_V(\mathfrak{g}) + (\mathfrak{g} \cap \ker \text{ad}_W) = \mathfrak{g}$).

On munit $\mathfrak{gl}(E)$ du produit scalaire défini plus

haut, et $\mathfrak{g}$ de sa restriction. Comme

$$\langle \text{ad}_V M, N \rangle = \langle M, \text{ad}_W N \rangle,$$

la restriction $\text{ad}_{W|_{\mathfrak{g}}}$ est l'adjointe de la restriction $\text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}}$, donc $\ker \text{ad}_{W|_{\mathfrak{g}}}$ est un supplémentaire de l'image de $\text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}}$ dans $\mathfrak{g}$. Ceci démontre le premier point.

Concernant le second point, on rappelle d'abord que tout sous-espace invariant par ad_V (en particulier $\mathfrak{g}$) est invariant par ses parties diagonalisables et nilpotentes ad_{V_s} et ad_{V_n} . La réduction de Jordan de la restriction $\text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}}$ est donc $\text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}} = \text{ad}_{V_s|_{\mathfrak{g}}} + \text{ad}_{V_n|_{\mathfrak{g}}}$.

On considère un produit scalaire sur E tel que V_s , et donc ad_{V_s} , sont normales, et donc tel que $\ker \text{ad}_{W_s} = \ker \text{ad}_{V_s}$, où W_s est l'adjoint de V_s . Admettons pour l'instant que $\mathfrak{g}$ est invariant par ad_{W_s} . Il découle alors du premier cas que $\mathfrak{g} \cap \ker \text{ad}_{W_s} = \mathfrak{g} \cap \ker \text{ad}_{V_s}$ est un supplémentaire de $\text{ad}_{V_s}(\mathfrak{g})$ donc qu'il est transverse à $\text{ad}_V(\mathfrak{g})$ (on a en effet $\text{im } \text{ad}_{V_s|_{\mathfrak{g}}} \subset \text{im } \text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}}$ car $\text{ad}_{V_s|_{\mathfrak{g}}}$ est la partie diagonalisable de $\text{ad}_{V|_{\mathfrak{g}}}$).

Il reste à montrer que tout espace invariant par ad_{V_s} (donc $\mathfrak{g}$) est invariant par ad_{W_s} si ad_{V_s} est normale. Il suffit pour ceci de remarquer que ad_{W_s} est un polynôme de ad_{V_s} . Soient μ_i , $1 \leq i \leq r$ les valeurs propres réelles de ad_{V_s} (listées sans multiplicité) et $(\lambda_i, \bar{\lambda}_i)$, $1 \leq i \leq s$ les paires de valeurs propres complexes non réelles de ad_{V_s} . Par interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme complexe P de degré $r + 2s - 1$ tel que $P(\mu_i) = \mu_i$, $P(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$, et $P(\bar{\lambda}_i) = \lambda_i$, et ce polynôme est réel. En posant $\lambda_i = a_i + ib_i$, ($i^2 = -1$) on constate que le polynôme P envoie chaque bloc $\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$ sur son transposé

$\begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$, et donc que $P(\text{ad}_{V_s}) = \text{ad}_{W_s}$. $\square$

Il reste à vérifier qu'on peut appliquer le lemme ci-dessus avec $W = B \diamond$.

Lemme. Étant donné un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire sur E^k tel que, pour tout $A \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, $B \diamond$ est l'adjoint de $A \diamond$ (où B est l'adjoint de A).

Si $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan de A , alors $A \diamond = (A_s) \diamond + (A_n) \diamond$ est la décomposition de Jordan de $A \diamond$.

Les opérateurs $A \diamond$ et $B \diamond$ préservent chacun des termes de la décomposition

$$E^k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

en composantes homogènes. Pour construire un

produit scalaire sur E^k tel que $(A \diamond)^* = B \diamond$, il suffit donc de le faire sur chacun des termes E_i . On a $E_1 = (\mathbb{R}^n)^*$, et la restriction de $A \diamond$ à E_1 est l'adjointe de A , $A \diamond \ell = \ell \circ A$. On utilise le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (celui pour lequel B est l'adjointe de A) pour identifier $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$, et au moyen de cette identification, pour munir E_1 d'un produit scalaire. Notons ℓ_x la forme linéaire $\langle x, \cdot \rangle$. On a alors $A \diamond \ell_x = \ell_x \circ A = \ell_{Bx}$, et donc

$$\langle A \diamond \ell_x, \ell_y \rangle = \langle \ell_{Bx}, \ell_y \rangle = \langle Bx, y \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle B \diamond \ell_y, \ell_x \rangle,$$

c'est-à-dire que $(A \diamond)^* = B \diamond$.

L'espace E_i s'identifie à l'espace des formes i -linéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$, et donc à un sous-espace de l'espace $\otimes^i E_1$ des formes i -linéaires sur $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme $A \diamond$ sur E_i se prolonge en un endomorphisme D_A de $\otimes^i E_1$ par

$$D_A : m(x_1, \dots, x_i) \mapsto m(Ax_1, x_2, \dots, x_i) \\ + m(x_1, Ax_2, \dots, x_i) + \dots + m(x_1, \dots, Ax_i),$$

qui est aussi caractérisé par la propriété

$$D_A(\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_i) = \ell_1 \otimes A \otimes \ell_2 \otimes \dots \otimes \ell_i + \dots + \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_i \otimes A.$$

On associe naturellement au produit scalaire sur E_1 l'unique produit scalaire sur $\otimes^i E_1$ tel que

$$(\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_i, \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_i) = (\ell_1, \ell_1) \dots (\ell_i, \ell_i).$$

On constate alors que $(D_A)^* = D_B$. Comme les restrictions $A \diamond$ et $B \diamond$ à E_i sont égales aux restrictions de D_A et D_B à $E_i \subset \otimes^i E_1$, on a donc bien $(A \diamond)^* = B \diamond$ dans E_i pour le produit scalaire induit. Ce produit scalaire est présenté d'une façon différente dans [2], p. 97.

Si $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan de A , alors $[A_s \diamond, A_n \diamond] = 0$ puisque $[A_s, A_n] = 0$. Il faut donc vérifier que $A_s \diamond$ est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) et $A_n \diamond$ nilpotente. Comme plus haut, on peut choisir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel A_s commute avec son adjoint B_s . Alors $A_s \diamond$ commute avec $B_s \diamond$, qui est son adjoint pour le produit scalaire donné par la première partie du lemme. L'endomorphisme $A_s \diamond$ est normal, donc diagonalisable.

Pour montrer que $A_n \diamond$ est nilpotent, on considère un monôme $P(x) = m(x, \dots, x)$ de degré j , où m est une forme j -linéaire symétrique. On a

$$(A_n \diamond)^r P(x) = \sum m(A_n^i x, A_n^i x, \dots, A_n^i x),$$

où la somme est prise sur tous les multi-indices $(i_1, \dots, i_j) \in \mathbb{N}^j$ vérifiant $i_1 + \dots + i_j = r$. Comme $(A_n)^n = 0$, on voit que $(A_n \diamond)^r P = 0$ pour $r > j(n-1)$, et donc que $(D_{A_n}^k)^r = 0$ pour $r > k(n-1)$. $\square$

4. Familles de singularités de champs de vecteurs

L'une des applications des formes normales est l'étude des bifurcations, c'est-à-dire des familles de champs de vecteurs X_λ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$ (qui peut être $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou même un espace de Banach). On cherche dans ce contexte à réduire les champs X_λ à des formes normales par des difféomorphismes qui dépendent régulièrement de λ . On suppose que chacun des champs X_λ est nul en 0.

On fixe k , et on suppose que l'application $\lambda \mapsto [X_\lambda]^k$ à valeurs dans l'espace de dimension finie $\mathcal{Y}^k$ est C^r , $r \geq 0$. On note $A \in \mathcal{Y}_1$ le linéarisé de X_0 en 0, on choisit une matrice B comme dans le théorème de forme normale. On a alors :

Théorème. *Il existe un champ de vecteurs $Y_\lambda^k \in \mathcal{Y}^k$ qui dépend de λ de manière C^r , tel que Y_0 n'a pas de terme linéaire, et tel que $(\varphi_{Y_\lambda^k}^1)_* X_\lambda - A$ commute avec B à l'ordre k pour tout λ proche de 0.*

Comme dans le cas sans paramètre, on fait la preuve par récurrence sur k . Une fois que le champ Y_λ^{k-1} est construit, $k \geq 2$, on obtient comme plus haut l'équation suivante pour le terme homogène Y_λ de degré k :

$$\text{ad}_B(R_\lambda) + \text{ad}_B \circ \text{ad}_{a_\lambda}(Y_\lambda) = 0,$$

où R_λ est le terme homogène de degré k de $(\varphi_{Y_\lambda^{k-1}}^1)_* X_\lambda$, et où a_λ est son terme linéaire. L'hypothèse de récurrence implique que a_λ et R_λ sont C^r . Le choix de B implique que $\text{ad}_B \circ \text{ad}_A : \mathcal{Y}_k \rightarrow \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ est surjective. On choisit un supplémentaire K de son noyau de sorte que $\text{ad}_B \circ \text{ad}_A : K \rightarrow \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ est un isomorphisme. Il en est donc de même de $\text{ad}_B \circ \text{ad}_{a_\lambda} : K \rightarrow \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ lorsque λ est assez petit. On note $\theta_\lambda : \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k) \rightarrow K$ l'isomorphisme inverse, il est C^k en λ . On pose alors $Y_\lambda = -\theta_\lambda \circ \text{ad}_B(R_\lambda)$, qui est C^r et résout l'équation ci-dessus.

L'initialisation $k = 1$ demande un traitement spécifique. Notons A_λ le linéarisé de X_λ . On veut montrer l'existence d'une famille C^r de matrices $L_\lambda \in \mathcal{Y}_1$, $L_0 = 0$, telle que

$$(\exp -L_\lambda)A_\lambda(\exp L_\lambda) - A$$

commute avec B pour tout λ proche de 0. Soit K un supplémentaire du noyau de $\text{ad}_B \circ \text{ad}_A$ dans $\mathcal{Y}_1$. On

considère l'application

$$\begin{aligned} F : K \times \Lambda \ni (L, \lambda) \\ \mapsto \text{ad}_B((\exp(-L)A_\lambda(\exp L) - A) \in \text{ad}_B(\mathcal{Y}_1). \end{aligned}$$

On a $\partial_L F(0,0) = \text{ad}_B \circ \text{ad}_A$, qui est un isomorphisme car $\ker \text{ad}_B$ est transverse à $\text{ad}_A(\mathcal{Y}_1)$ dans $\mathcal{Y}_1$. On applique le théorème des fonctions implicites pour trouver $L_\lambda \in K$ résolvant l'équation $F(L_\lambda, \lambda) = 0$. $\square$

5. Cas réversible

On considère ici une symétrie linéaire σ , c'est-à-dire un élément $\sigma \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\sigma^2 = I$. Le champ de vecteurs X est dit réversible si $\sigma_* X = -X$, il est dit symétrique si $\sigma_* X = X$. L'espace des champs symétriques est une sous-algèbre de Lie, mais pas l'espace des champs réversibles. Comme la propriété de réversibilité est naturelle dans de nombreux exemples issus de la physique, on se demande si la forme normale d'un système réversible est réversible. On remarque que $(\varphi_Y^1)_* X$ est réversible si X est réversible et Y symétrique.

Théorème. *Dans le contexte du théorème de forme normale, supposons donnée une symétrie linéaire σ qui préserve $\mathcal{Y}$ (c'est-à-dire que $\sigma_* X \in \mathcal{Y}$ pour tout $X \in \mathcal{Y}$). Si X , et donc son linéarisé A sont réversibles, et si B est réversible (c'est le cas de la partie diagonalisable de A), alors les champs $Y_i \in \mathcal{Y}_i$ peuvent être choisis symétriques. La forme normale $(\varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1)_* X$ est alors réversible.*

On prouve ce théorème comme en l'absence de symétrie, par récurrence sur k . L'équation qui doit être résolue par le terme homogène Y_k de degré k est

$$\text{ad}_B(R_k) + \text{ad}_B \circ \text{ad}_A(Y_k) = 0,$$

où $R_k \in \mathcal{Y}_k$ est réversible. Notons $\mathcal{Y}_k^+$ le sous-espace des éléments symétriques de $\mathcal{Y}_k$ et $\mathcal{Y}_k^-$ le sous-espace des éléments réversibles. En notant S la symétrie linéaire de $\mathcal{Y}_k$ donnée par $Y \mapsto \sigma_* Y$, c'est-à-dire $S = \text{Ad}_\sigma$, on a $\mathcal{Y}_k^- = \ker(S+I)$ et $\mathcal{Y}_k^+ = \ker(S-I)$, donc

$$\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_k^+ \oplus \mathcal{Y}_k^-.$$

Comme A et B sont réversibles, $\text{ad}_B(\mathcal{Y}_k^-) \subset \mathcal{Y}_k^+$ et $\text{ad}_B(\mathcal{Y}_k^+) \subset \mathcal{Y}_k^-$, et pareillement pour ad_A . En conséquence, en rappelant que $\text{ad}_B \circ \text{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$, on obtient,

$$\begin{aligned} \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k^-) &= \mathcal{Y}_k^+ \cap \text{ad}_B(\mathcal{Y}_k) \\ &= \mathcal{Y}_k^+ \cap \text{ad}_B \circ \text{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \text{ad}_B \circ \text{ad}_A(\mathcal{Y}_k^+). \end{aligned}$$

L'équation en Y_k a donc une solution dans $\mathcal{Y}_k^+$, ce qui termine la preuve.

Vérifions maintenant que la partie diagonalisable A_s est réversible si A l'est. La décomposition de Jordan de $\text{Ad}_\sigma(A)$ est $\text{Ad}_\sigma(A) = \text{Ad}_\sigma(A_s) + \text{Ad}_\sigma(A_n)$. Dans le cas réversible, l'unicité de la décomposition de Jordan de $\text{Ad}_\sigma(A) = -A$ montre que $\text{Ad}_\sigma(A_s) = -A_s$. $\square$

6. Groupe de difféomorphismes associé à $\mathcal{Y}$

Dans les quelques exemples d'espaces $\mathcal{Y}_1$ que nous avons rencontrés, il existe un sous-groupe $\mathcal{H}_1 \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ qui est une sous-variété dont $\mathcal{Y}_1$ est l'espace tangent au point I . On peut prendre, respectivement, le groupe des isomorphismes de déterminant égal à 1, le groupe des isomorphismes complexes, le groupe des isomorphismes symplectiques.

Si $\mathcal{Y}_1$ est une sous-algèbre de Lie quelconque de $\text{gl}(\mathbb{R}^n)$, il n'existe pas forcément un tel sous-groupe, mais il existe toujours un sous-groupe $\mathcal{H}_1$ ayant la propriété suivante (on peut prendre le sous-groupe engendré par $\exp(\mathcal{Y}_1)$) :

Soit $A(t)$ une courbe C^1 définie sur un intervalle, à valeurs dans $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$, et qui prend une valeur dans $\mathcal{H}_1$. Elle est contenue dans $\mathcal{H}_1$ si et seulement si $\dot{A}(t)A^{-1}(t) \in \mathcal{Y}_1$ pour tout t .

On supposera dans la suite qu'est donné un tel $\mathcal{H}_1$. On note $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ constitué des difféomorphismes ϕ vérifiant $d\phi_x \in \mathcal{H}_1$ pour tout x voisin de 0.

Propriété. *Le champ $X \in \mathcal{X}$ appartient à $\mathcal{Y}$ si et seulement si son flot φ_X^t est un élément de $\mathcal{H}$ pour tout t . Le groupe $\mathcal{H}$ préserve donc $\mathcal{Y}$.*

Étant donnée une solution $x(t)$ de l'équation $\dot{x} = X \circ x$, le linéarisé $A(t) = d(\varphi_X^t)_{x(t)}$, satisfait à l'équation $\dot{A}(t) = dX_{x(t)}A(t)$, c'est-à-dire $\dot{A}(t)A^{-1}(t) = dX_{x(t)}$. Au vu de la propriété satisfaite par $\mathcal{H}_1$, on a $A(t) \in \mathcal{H}_1$ pour tout t si et seulement si $dX_{x(t)} \in \mathcal{Y}_1$ pour tout t , ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Si X est un champ dont les flots appartiennent à $\mathcal{H}$, il en est de même de $\phi_* X$ pour $\phi \in \mathcal{H}$, puisque le flot de $\phi_* X$ est $\phi \circ \varphi_X^t \circ \phi^{-1}$. $\square$

Un difféomorphisme, même proche de l'identité, n'est en général pas un flot, mais il l'est à tout ordre fini :

Proposition. *Soit $\phi \in \mathcal{H}$ un difféomorphisme dont*

le linéarisé est l'identité. Il existe alors une unique suite $Y_k \in \mathcal{Y}_k$, $k \geq 2$ telle que, pour tout $k \geq 2$, ϕ coïncide à l'ordre k avec le flot du champ $Y_2 + \dots + Y_k$.

On fait la preuve par récurrence sur k . On considère un difféomorphisme $\phi \in \mathcal{H}$ dont le linéarisé est l'identité. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs $Z \in \mathcal{Y}^{k-1}$ sans terme linéaire tel que $\phi = \varphi_Z^1$ à l'ordre $k-1$, et on montre l'existence d'un champ homogène $Y_k \in \mathcal{Y}_k$ tel que $\varphi_{Z+Y_k}^1$ coïncide avec ϕ à l'ordre k . Notons $R_k := [\varphi_Z^{-1} \circ \phi]_k$, de sorte que $\varphi_Z^{-1} \circ \phi = I + R_k$ à l'ordre k . En représentant les objets par des opérateurs sur E^k , on doit donc résoudre l'équation

$$\exp(Z + Y_k) = (\exp Z)(I + R_k).$$

Comme Z et Y_k commutent dans $\mathfrak{gl}(E^k)$, cette équation se réécrit $\exp(Y_k) = I + R_k$. Comme $\exp(Y_k) = I + Y_k$, la seule solution possible est $Y_k = R_k$. Il nous reste à vérifier que l'on a bien $R_k \in \mathcal{Y}_k$.

Le difféomorphisme $\varphi_Z^{-1} \circ \phi$ appartient à $\mathcal{H}$, il en est donc de même, pour $s > 0$, du difféomorphisme $\psi_s := (s^{-1}I) \circ \varphi_Z^{-1} \circ \phi \circ (sI) = I + s^{k-1}R_k + \dots$. Pour tout x , la différentielle

$$d(\psi_s)_x = I + s^{k-1}d(R_k)_x + O(s^k)$$

est donc un élément de $\mathcal{H}_1$. En fixant x , la courbe

$$s \mapsto d(\psi_{s^{1/k-1}})_x = I + sd(R_k)_x + O(s^{k/k-1})$$

est à valeurs dans le groupe $\mathcal{H}_1$. Sa différentielle en $s = 0$ est donc un élément de l'espace tangent $\mathcal{Y}_1$, c'est-à-dire que $d(R_k)_x \in \mathcal{Y}_1$ pour tout x , et donc que $R_k \in \mathcal{Y}$. $\square$

Le complément ci-dessous découle aussi de la preuve et sera utile.

Complément. Soit $B \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\phi \in \mathcal{H}$ qui commute avec B à l'ordre k et vérifie $d\phi_0 = I$. Alors dans la propriété ci-dessus les champs $Y_2, \dots, Y_k$ commutent avec B .

On remarque que le développement de Taylor $[\phi]^k$ d'un élément de $\mathcal{H}$ n'est pas forcément lui-même un élément de $\mathcal{H}$.

7. Formes normales de difféomorphismes

Le théorème de forme normale a une variante pour les difféomorphismes.

Théorème 1. Soit $\phi \in \mathcal{H}$, de linéarisé $A \in \mathcal{H}_1$. Soit B une matrice égale soit à la partie diagonalisable

de A soit à une matrice qui est l'adjointe de A pour un produit scalaire et qui appartient à $\mathcal{H}_1$. Il existe alors une suite $Y_k \in \mathcal{Y}_k$, $k \geq 2$ telle que, pour tout $k \geq 2$, le difféomorphisme

$$A^{-1} \circ \varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^{-1} \circ \phi \circ \varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1$$

commute avec B à l'ordre k .

La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème de forme normale des champs de vecteurs. On fait une récurrence sur k . On suppose que $Y_2, \dots, Y_{k-1}$ ont été construits, et on note φ_{k-1} le difféomorphisme $\varphi_{Y_2+\dots+Y_{k-1}}^1$. Au vu du complément de la section précédente, il existe un champ $Z + Z_k \in \mathcal{Y}^{k-1} \oplus \mathcal{Y}_k$ sans terme linéaire, qui commute avec B à l'ordre $k-1$ (c'est-à-dire que Z commute avec B), tel que

$$A^{-1} \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \phi \circ \varphi_{k-1}^1 = \varphi_{Z+Z_k}^1$$

à l'ordre k . En termes d'opérateurs sur E^k , ceci se réécrit

$$\begin{aligned} \exp(Y_2 + \dots + Y_{k-1}) \diamond \phi \diamond \exp(-Y_2 - \dots - Y_{k-1}) \diamond A^{-1} \\ = \exp(Z) \diamond (I + Z_k). \end{aligned}$$

Le difféomorphisme $A^{-1} \circ \varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^{-1} \circ \phi \circ \varphi_{Y_2+\dots+Y_k}^1$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \exp(Y_k) \diamond \exp(Y_2 + \dots + Y_{k-1}) \\ \diamond \phi \diamond \exp(-Y_2 - \dots - Y_{k-1}) \diamond \exp(-Y_k) \diamond A^{-1} \\ = (I + Y_k) \diamond \exp Z \diamond (I + Z_k) \diamond A \diamond (I - Y_k) \diamond A^{-1} \\ = \exp Z + Z_k + Y_k - A \diamond Y_k \diamond A^{-1}. \end{aligned}$$

On a utilisé dans ce calcul que Z n'a pas de terme linéaire, et donc que la partie linéaire de $\exp Z$ est l'identité. Comme $\exp Z$ commute avec B , notre difféomorphisme commute avec B si et seulement si

$$Z_k - (\text{Ad}_A - I)(Y_k) \in \ker(\text{Ad}_B - I)$$

où Ad_A est l'opérateur $M \mapsto A \diamond M \diamond A^{-1}$ sur $\mathfrak{gl}(E^k)$. On conclut la preuve grâce à la proposition ci-dessous :

Proposition 1. L'espace $\mathcal{Y}_k \cap \ker(\text{Ad}_B - I)$ des éléments de $\mathcal{Y}_k$ qui commutent avec B est un complémentaire de $(\text{Ad}_A - I)(\mathcal{Y}^k)$ dans $\mathcal{Y}^k$.

La démonstration est similaire à celle de la proposition analogue pour ad_A . Il faut remplacer dans cette démonstration la décomposition de Jordan additive que nous avons utilisée jusque là par la décomposition de Jordan multiplicative. Toute matrice $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ admet une unique décomposition

$A = A_s A_u$, avec A_s diagonalisable, A_u unipotente (c'est-à-dire que $A_u - I$ est nilpotente) et $[A_s, A_u] = 0$. Cette décomposition est $A = A_s(I - A_s^{-1} A_n)$, où $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan additive de

A . En particulier, la partie diagonalisable de la décomposition multiplicative d'un élément inversible est égale à la partie diagonalisable de sa décomposition additive.

Références

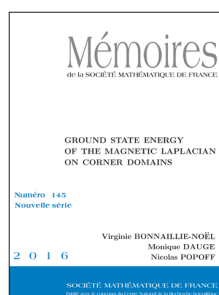
- [1] V. I. ARNOLD. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, 1980.
- [2] M. HARAGUS et G. LOOSS. *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems*. Springer, 2010.
- [3] J. MURDOCK. *Normal forms and unfoldings for local dynamical systems*. Springer, 2006.
- [4] J. C. Yoccoz. « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré ». *Gazette des mathématiciens*, n° 107 (2006).



Patrick BERNARD

Patrick Bernard est professeur à l'École normale supérieure et à l'université Paris-Dauphine. Il est spécialiste de dynamique hamiltonienne.

Mémoires - Nouveautés 2016



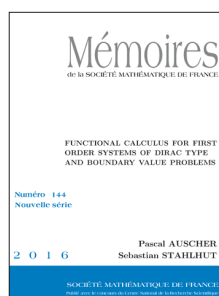
Vol. 145

Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains

V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, N. POPOFF

ISBN 978-2-85629-830-5
2016 - 138 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 35 € - Members: 24 €

Corner domains are part of a general class defined by recursion over the dimension. When this dimension is 2, corner domains are curvilinear polygons. In dimension 3, they include curved polyhedra and various sorts of cones. Neumann boundary conditions complete the magnetic Laplacian, which induces boundary effects at every geometrical level (regular, singular at edges, pointwise at corners). The authors prove asymptotic formulas with remainders for the first eigenvalue in semi-classical regime without any 'a priori' assumption of the level that will contribute to the minimal energy. Novel tools are introduced, such as a metric on singular chains and a dichotomy determining the choice between sitting or sliding quasimodes.



Vol. 144

Functional calculus for first order systems of Dirac type and boundary value problems

P. AUSCHER, S. STAHLHUT

ISBN 978-2-85629-829-9
2016 - 164 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 40 € - Members: 28 €

It was shown recently that solutions of boundary value problems for some second order elliptic equations (or systems) in divergence form with measurable coefficients can be constructed from solutions of generalised Cauchy-Riemann systems, in the spirit of what can be done for the Laplace equation. This involves a first order bisectorial operator of Dirac type on the boundary whose bounded holomorphic functional calculus on L^2 is proved by techniques from the solution of the Kato problem, and the system can henceforth be solved by a semigroup for L^2 data in a spectral space. This memoir investigates the properties of this semigroup and, more generally, of the functional calculus on other spaces: L^p for p near 2 and adapted Hardy spaces otherwise. This yields non-tangential maximal functions estimates and Lusin area estimates for solutions of the boundary value problems.

Disponibles sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris

