Éligibilité de contraintes pour la résolution de réseaux de contraintes qualitatives temporelles et spatiales

Jean-François Condotta, Gérard Ligozat, Mahmoud Saade

▶ **To cite this version:**

Jean-François Condotta, Gérard Ligozat, Mahmoud Saade. Éligibilité de contraintes pour la résolution de réseaux de contraintes qualitatives temporelles et spatiales. Atelier RTE 2007, plateforme AFIA, Jul 2007, Grenoble, France. pp.29-40. hal-01434018

HAL Id: hal-01434018
https://hal.science/hal-01434018

Submitted on 13 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Éligibilité de contraintes pour la résolution de réseaux de contraintes qualitatives temporelles et spatiales

Jean-François Condotta[1], Gérard Ligozat[2] et Mahmoud Saade[1]

[1] CRIL-CNRS, Université d'Artois, 62307 Lens Cedex, France
[2] LIMSI-CNRS, Université de Paris-Sud, 91403 Orsay, France
{condotta, saade}@cril.univ-artois.fr,ligozat@limsi.fr

Résumé : Dans cet article, nous considérons le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives pour le temps et l'espace. La méthode la plus efficace pour résoudre ce problème consiste à utiliser un algorithme de recherche mettant en œuvre d'une part la méthode de fermeture par faible composition comme propagation locale de contraintes et d'autre part une décomposition des contraintes en relations appartenant à une classe traitable. Nous proposons une extension de cet algorithme basée sur la notion d'éligibilité de contraintes. Nous étudions cet algorithme de manière théorique et de manière expérimentale.

1 Introduction

De nombreux formalismes qualitatifs ont été développés ces vingt dernières années pour représenter les configurations temporelles ou spatiales et pour raisonner sur ces dernières. La représentation et le raisonnement sur les informations temporelles et spatiales est une tâche importante de nombreuses applications telles que les systèmes d'informations géographiques (GIS), la compréhension du langage naturel, la navigation de robots, la planification temporelle et spatiale. Le raisonnement temporel et spatial qualitatif a pour but de décrire des relations non numériques entre les entités temporelles ou spatiales. Habituellement un calcul qualitatif [1, 16, 9, 15, 6] utilise des éléments particuliers (sous-ensembles d'un espace topologique, points de la droite des rationnels, intervalles de la droite des rationnels) pour représenter les entités spatiales ou temporelles du système, et se focalise sur un nombre limité de relations entre ces éléments (telles que des relations topologiques entre les régions ou des relations de précédence entre les points). Chacune de ces relations représente une situation temporelle ou spatiale particulière. Par exemple, considérons le formalisme temporel d'Allen bien connu appelé algèbre des intervalles [1]. Il utilise des intervalles de la droite des rationnels pour représenter les entités temporelles. Treize relations de base entre ces intervalles sont utilisées pour modéliser les différentes situations qualitatives possibles entre les entités temporelles. Par exemple, la relation de base *overlaps* peut être utilisée pour représenter la situation où une première activité débute avant une deuxième activité et se termine pendant que la deuxième se déroule encore.

Les informations temporelles ou spatiales concernant la situation d'un ensemble particulier d'entités peuvent être représentées en utilisant des réseaux de contraintes particuliers appelés réseaux de contraintes qualitatives (qualitative constraint networks en anglais, RCQ en abrégé). Chaque contrainte d'un RCQ représente un ensemble de configurations qualitatives acceptables entre les entités temporelles ou spatiales et est définie par un ensemble de relations de base. Le problème de la cohérence pour les RCQ consiste à déterminer si un réseau donné possède des solutions satisfaisant ces contraintes. Pour résoudre ce problème, des méthodes basées sur des algorithmes de propagation locale de contraintes ont été définies [13], en particulier des méthodes de fermeture par faible composition, méthodes similaires à celles utilisées pour obtenir la propriété de chemin-cohérence dans le cadre des CSP [12, 11]. Les algorithmes les plus performants utilisent également une décomposition des contraintes en relations appartenant à une classe traitable comme l'ensemble des relations préconvexes dans le cadre du formalisme d'Allen. Chaque contrainte est découpée en relations d'une classe de relations pour laquelle la méthode de fermeture par faible composition est complète. Elle est successivement instanciée par une de ces relations jusqu'à ce qu'une solution soit trouvée ou que toute solution partielle explorée conduise à un échec. Le facteur de branchement lors de la recherche est diminué grâce au découpage des contraines.
Dans cet article nous étendons cet algorithme en introduisant une notion d'éligibilité de contraintes. L'amélioration proposée consiste à détecter au plus tôt les contraintes qui n'auront pas à être considérées lors de la recherche, à savoir celles définies à un moment donné par une relation appartenant à l'ensemble de relations utilisé pour le découpage des contraintes.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous faisons des rappels sur les formalismes qualitatifs. La section 3 est dévolue à la définition et à l'étude théorique de notre algrithme appelé $cohérenceE$. La section 4 est consacrée aux résultats expérimentaux obtenus en utilisant cet algorithme. Nous concluons dans la section 5.

2 Rappels sur les formalismes qualitatifs pour le temps et l'espace

Dans la suite, nous supposons donné un formalisme qualitatif pour le temps ou l'espace défini sur un ensemble fini B de relations de base sur un domaine D. Pour des raisons de lisibilité, nous supposons que l'arité de ces relations est 2. Nous faisons également l'hypothèse que les relations de base constituent une partition de $\mathsf{D} \times \mathsf{D}$, c'est-à-dire que tout couple d'éléments de D appartient à exactement une relation de B. De plus, nous supposons que B contient la relation identité sur D, dénoté par Id dans la suite. À titre d'illustration, considèrons le formalisme d'Allen : l'algèbre des intervalles AI. AI est basée sur 13 relations binaires définis sur un ensemble d'intervalles, celui de la droite des nombres rationnels par exemple. Chacune de ces relations correspond à un ordre partculier des 4 bornes de deux intervalles.
Les informations temporelles ou spatiales sur la configuration d'un ensemble d'entités peuvent être représentées à l'aide d'un réseau de contraintes dit réseau de contraintes qualitatives (RCQ en abrégé). Ces réseaux permettent de représenter des informations

incomplètes. En effet, la contrainte entre deux variables (correspondant à deux entités) est définie par un sous-ensemble de l'ensemble des relations de base, l'ensemble des relations de base qui sont compatibles avec les informations disponibles.
Formellement, un réseau de contraintes qualitatives (un RCQ en abrégé) $\mathcal{N}$ est un couple (V, C) où V est un ensemble fini de n variables $v_0, \ldots, v_{n-1}$ (avec n entier positif) et C est une application qui, à chaque couple (v_i, v_j) de variables de V associe un sous-ensemble $C(v_i, v_j)$ de l'ensemble des relations de base : $C(v_i, v_j) \subseteq \mathsf{B}$. Nous dénoterons par A l'ensemble 2^{B} de tous les ensembles de B. Pour $r \in \mathsf{A}$, deux éléments $x, y \in D$ satisfont r, ce que nous dénoterons par $x\ r\ y$, ssi il existe une relation de base $a \in r$ telle que $(x, y) \in a$. Ainsi chaque élément r de A peut être considéré comme l'union de toutes les relations de base la composant. Nous utilisons le terme de "relation" pour désigner une telle union de relations de base. L'ensemble A est muni de l'opération d'intersection ($\cap$) et l'opération d'union ($\cup$). Il est également muni de l'opération unaire inverse ($\sim$) et de l'opération binaire de faible composition ($\circ$) : l'inverse d'une relation r de A est la relation de A correspondant à la transposée de r ; elle coresponde à l'union des inverses des relations de base appartenant à r. La faible composition $a \circ b$ de $a, b \in \mathsf{B}$ est la relation r définie par $r = \{c : \exists x, y, z \in \mathsf{D}, x\ a\ y, y\ b\ z \text{ et } x\ c\ z\}$. La composition $r \circ s$ de $r, s \in \mathsf{A}$ est la relation $t = \bigcup_{a \in r, b \in s} \{a \circ b\}$. Intuitivement, $r \circ s$ est l'ensemble de toutes les relations de base possibles entre $x \in \mathsf{D}$ et $y \in \mathsf{D}$ lorsqu'il existe $z \in \mathsf{D}$ avec $x\ r\ z$ et $z\ s\ y$. Remarquons que pour certains formalismes (voir [2] par exemple), cette opération de faible composition n'est pas équivalente à l'opération de composition relationnelle classique.
Concernant les RCQ nous utiliserons les définitions suivantes dans la suite :

Définition 1
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ*, avec $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Une* solution partielle *de $\mathcal{N}$ sur $V' \subseteq V$ est une application σ de V' dans* D *telle que $\sigma(v_i)\ \ C(v_i, v_j)\ \ \sigma(v_j)$, pour tout $v_i, v_j \in V'$. Une* solution *de $\mathcal{N}$ est une solution partielle de V. $\mathcal{N}$ est* cohérent *si et seulement si il admet une solution. $\mathcal{N}$ est* $\circ$-fermé [1] *si et seulement si pour tout $v_k, v_i, v_j \in V$, $C(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_k) \circ C(v_k, v_j)$. Un* sous-RCQ *$\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ est un* RCQ *(V, C') où $C'(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_j)$ pour tout $v_i, v_j \in V$. On note $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ le fait que $\mathcal{N}'$ soit un sous-*RCQ *de $\mathcal{N}$. Un* scénario *de $\mathcal{N}$ is un* sous-RCQ *(V, C') de $\mathcal{N}$ tel que $C'(v_i, v_j) = \{a\}$ avec $a \in \mathsf{B}$. Un* scénario cohérent *de $\mathcal{N}$ est un scénario de $\mathcal{N}$ admettant une solution. $\mathcal{N}' = (V', C')$ est* équivalent *à $\mathcal{N}$ si et seulement si $V = V'$ et si les deux* RCQ*s ont les mêmes solutions.*

Étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, des algorithmes de propagation locale de contraintes[12, 11, 3, 4] peuvent être utilisés pour dériver en temps polynomial (en $O(|V|^3)$ pour certains d'entre eux) un sous-RCQ qui est $\circ$-fermé et équivalent à $\mathcal{N}$. En bref, le principe de ces algorithmes est d'itérer l'opération suivante $C(v_i, v_j) \leftarrow C(v_i, v_j) \cap (C(v_i, v_k) \circ C(v_k, v_j))$ pour tout triplet de variables $v_i, v_j, v_k \in V$ jusqu'à qu'un point fixe soit obtenu. Dans la suite, l'expression "méthode de la fermeture par faible composition" désignera un tel algorithme. Le RCQ $\circ$-fermé obtenu par application de la méthode de

[1] Le terme "chemin-cohérent" peut souvent être trouvé dans la littérature. Nous évitons ce terme du fait qu'un RCQ $\circ$-fermé n'est pas nécessairement chemin-cohérent au sens classique utilisé pour les CSP.

la $\circ$-fermeture sur un RCQ $\mathcal{N}$ sera dénoté par $ffc(\mathcal{N})$ et appelé $\circ$-fermeture de $\mathcal{N}$. La $\circ$-fermeture satisfait les propriétés suivantes.

Proposition 1
Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux RCQ *: (a) $ffc(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$, (b) $ffc(ffc(\mathcal{N})) = ffc(\mathcal{N})$, (c) si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$ alors $ffc(\mathcal{N}) \subseteq ffc(\mathcal{N}')$.*

3 L'algorithme de recherche avec éligibilité

Une méthode brutale pour tester la cohérence d'un réseau de contraintes qualitatif $\mathcal{N}$ consiste à instancier successivement chaque contrainte du réseau par chacune de ses relations de base jusqu'à trouver un scénario cohérent. Après chaque instanciation la méthode de la fermeture par faible composition est appliquée pour supprimer des relations de base non possibles et pour tester de manière grossière la cohérence de la solution partielle. En cas d'échec un retour en arrière est opéré. L'algorithme s'arrête lorsqu'un scénario $\circ$-fermé est obtenu ou lorque toutes les instanciations partielles ont conduit à une incohérence. Dans le premier cas, pourvu que la méthode de la fermeture de la faible composition soit complète pour les scénarios, le scénario obtenu est une solution.
Cet algorithme de base à été rendu plus efficace à l'aide de l'utilisation de classes dites traitables [7, 13, 17]. L'idée générale est de disposer d'un ensemble $Split$ de relations (contenant l'ensemble des relations de base) pour lequel la méthode de la fermeture par faible composition est complète. Lors de la recherche, au lieu d'instancier la contrainte courante par une de ses relations de base, cette contrainte est partagée en relations appartenant à l'ensemble $Split$ et la contrainte est ensuite successivement instanciée par ces relations. De manière générale le facteur de branchement est diminué et l'espace de recherche plus restreint que celui de la méthode de base. Lorsque l'algorithme se termine sur un succès, nous obtenons un sous-réseau du réseau initial qui est $\circ$-fermé et dont toutes les relations appartiennent à $Split$. Ce réseau est donc forcément cohérent et par conséquent le réseau de contraintes initial l'est également.
Dans cette section nous proposons un raffinement de cet algorithme basé sur la notion d'*éligibilité*. Le principe de ce nouvel algorithme est simple, il consiste en la détection au plus tôt de contraintes qui n'auront pas besoin d'être instanciées pour se prononcer sur le résultat de la cohérence ou non du réseau initial. Pour cela, à chaque étape de la recherche, en particulier lors de la réalisation de la fermeture par faible composition, nous marquons comme non éligible tout contrainte définie par une relation appartenant à l'ensemble $Skip$. De plus, le choix de la nouvelle contrainte à instancier se fait uniqement sur les contraintes dites éligibles. L'objectif général est d'instancier un nombre minimal de contraintes. Dans la suite nous montrerons que cet algorithme est correct et complet. Dans Algorithme 1 est donnée la définition de notre algorithme appelé $cohérenceE$ (E pour éligible) dans la suite. La méthode prend en paramètre un RCQ $\mathcal{N}$ et retourne une valeur booléenne correspondant à la détection ou non de la cohérence de $\mathcal{N}$. Un ensemble $Skip \subseteq \mathsf{A}$ de relations est utilisé pour le découpage des relations lors des intanciations. $Skip$ doit contenir les relations composées d'une seule relation de base et doit être fermé pour l'opération inverse. Dans le cadre de l'al-

gèbre des intervalles $Skip$ peut par exemple être l'ensemble des relations préconvexes. La première étape de l'algorithme $cohérenceE$ consiste à marquer comme éligible chaque contrainte de $\mathcal{N}$ n'appartenant pas à l'ensemble $Skip$ et à marquer comme non éligible chacune des autres contraintes. Ensuite est retourné le résultat de l'appel de la fonction récursive $cohérenceE'$. Cette fonction met en œuvre le mécanisme expliqué auparavant. Chacun de ces appels débute par un appel de la méthode de la fermeture par faible composition ; en plus du travail classique de triangulation, cette dernière détecte les nouvelles contraintes dont les relations appartiennent à $Skip$ et devant être marquées comme non éligibles à ce stade du traitement. À cette étape il se peut que $\mathcal{N}$ soit détecté incohérent. L'étape suivante consiste à sélectionner une contrainte éligible et à la traiter. Elle est tout d'abord partagée en relations appartenant à l'ensemble $Skip$. Chacune de ces relations est utilisée pour instancier la contrainte sélectionnée. La recherche se poursuit en appelant de nouveau $cohérenceE'$. La recherche s'arrête lorsque toutes les contraintes sont marquées comme éligibles ou lorsque toutes les instanciations partielles se sont soldées par un échec.

Algorithme 1

Function $cohérenceE(\mathcal{N})$, *avec* $\mathcal{N} = (V, C)$ *et* $n = |V|$.
1: **for** $i, j \in 0 \dots n-1$
2: **if** *(*$C_{ij} \in Skip$*) Marquer non éligible* C_{ij} **else** *Marquer éligible* C_{ij}
3: **endFor**
4: **return** $cohérenceE'(\mathcal{N})$

Function $cohérenceE'(\mathcal{N})$, *with* $\mathcal{N} = (V, C)$.
1: **if** $(ffc(\mathcal{N}) == \mathbf{false})$ **return false**
2: *Selectionner une contrainte* C_{ij} *telle que* C_{ij} *est éligible*
3: **if** *une telle contrainte* C_{ij} *n'existe pas* **return true**
4: *Partage* C_{ij} *en sous relations* $r_1, \dots, r_k$ *telles que* $r_l \in Split$
5: **for** $l \in 1 \dots k$ **do**
6: $C_{ij} \leftarrow r_l$, $C_{ji} \leftarrow C_{ij}^{-1}$
7: *Marquer non éligible* C_{ij} *et* C_{ji}
8: **if** $(cohérenceE'(\mathcal{N}) == \mathbf{true})$ **return true**
9: **endFor**
10: **return false**

Function $ffc(\mathcal{N})$, *avec* $\mathcal{N} = (V, C)$ *et* $n = |V|$.
1: **do**
2: $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}$
3: **for** $i, j, k \in 0 \dots n-1$
4: $C_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} \circ C_{kj})$, $C_{ji} \leftarrow C_{ij}^{-1}$
5: **if** *(*$C_{ij} == \emptyset$*)* **return false**
6: **if** *(*$C_{ij} \in Skip$*) Marquer non éligible* C_{ij} *et* C_{ji}
7: **endFor**
8: **until** *(*$\mathcal{N}' == \mathcal{N}$*)*
9: **return true**

Clairement, si l'algorithme se termine en retournant **false** c'est que toutes les instanciations partielles ont été détectées incohérentes à l'aide de la méthode de fermeture par faible composition. Dans le cas contraire il n'est pas évident que le RCQ soit cohérent. En suivant la ligne de raisonnement proposée par Nebel [13] nous allons montrer que

le RCQ $\mathcal{N}$ obtenu est un RCQ $\circ$-fermé dont toute les relations appartiennent à l'ensemble $Skip$. Ainsi, si $Skip$ est complet pour la méthode de la fermeture par faible composition, le réseau obtenu est forcément cohérent. Tout d'abord nous introduisons une terminologie dont une partie est similaire à celle utilisée dans [13].
Étant donnés un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, deux entiers $0 \leq i, j < |V|$ avec n le nombre de variables de $\mathcal{N}$ et une relation $r \in 2^{\mathsf{B}}$, $\mathcal{N}[(i, j, r)]$ représente le RCQ (V, C') définie par $C'_{kl} = r$ (resp. la relation r^{-1}) dans la cas où $k = i$ et $l = j$ (resp. dans la cas où $k = j$ et $l = i$), $C'_{kl} = C_{kl}$ sinon. Étant donné un ensemble $\Psi \subseteq \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\} \times 2^{\mathsf{B}}$ avec $i < j$ pour tout $(i, j, r) \in \Psi$, nous définissons $\mathcal{N}[\Psi]$ par $\mathcal{N}[(i_0, j_0, r_0)] \ldots [(i_k, j_k, r_k)]$ avec $\Psi = \{(i_0, j_0, r_0), \ldots, (i_k, j_k, r_k)\}$. Cet opérateur de substitution satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 2
Soient $\mathcal{N} = (V, C)$, $\mathcal{N}' = (V, C')$ deux RCQ*, un triplet (i, j, r) avec $0 \leq i, j < n$ et $r \in 2^{\mathsf{B}}$ et un ensemble $\Psi \subseteq \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\} \times 2^{\mathsf{B}}$ avec $n = |V|$.*
(a) Si $r \subseteq C_{ij}$ alors $\mathcal{N}[(i, j, r)] \subseteq \mathcal{N}$ sinon $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}[(i, j, r)]$.
(b) Si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$ alors $\mathcal{N}[\Psi] \subseteq \mathcal{N}'[\Psi]$.
(c) $ffc(\mathcal{N})[\Psi] \subseteq \mathcal{N}[\Psi]$.
(d) Si $ffc(\mathcal{N}[\Psi]) \subseteq \mathcal{N}'$ alors $ffc(\mathcal{N}[\Psi]) \subseteq \mathcal{N}'[\Psi]$.

Preuve (a) et (b) sont immédiats. (c) découle de (b) et du fait que $ffc(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$. Prouvons (d). Si $ffc(\mathcal{N}[\Psi]) \subseteq \mathcal{N}'$ alors $ffc(\mathcal{N}[\Psi])[\Psi] \subseteq \mathcal{N}'[\Psi]$ (Propriété (b)). De plus, $ffc(\mathcal{N}[\Psi]) \subseteq ffc(\mathcal{N}[\Psi])[\Psi]$ (Propriété (a)). Nous pouvons en conclure que $ffc(\mathcal{N}[\Psi]) \subseteq \mathcal{N}'[\Psi]$. $\dashv$

Considérons de nouveau l'alogithme Algorithme 1. $\mathcal{N}^k$ dénotera le RCQ $\mathcal{N}$ obtenu durant le $k^{\text{ième}}$ appel de $cohérenceE'$ après l'instanciation de la contrainte sélectionnée $C_{i^k j^k}$ par la sous relation r_l^k (*i.e.* après la ligne 7 de $cohérenceE'$. $\mathcal{N}^0$ correspond au RCQ initial $\mathcal{N}$. Clairement nous avons $\mathcal{N}^k = ffc(\mathcal{N}^{k-1})[(i^k, j^k, r_l^k)]$ pour tout $k > 0$. L'ensemble $\Psi_k = \{(\alpha_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k), \ldots, (\alpha_{m_k}^k, \beta_{m_k}^k, \gamma_{m_k}^k)\}$, avec $k > 1$ représente l'ensemble des contraintes marquées lors de la $k^{\text{ième}}$ exécution de la méthode de la fermeture par faible composition (ligne 1 de la fonction $cohérenceE'$). L'appartenance du triplet $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ à Ψ_k stipule que la contrainte C_{α_i, β_i} a été marquée comme non éligible et était égale à la relation γ_i au moment du marquage. Ψ_k ne contient que les contraintes marquées C_{ij} avec $i \leq j$. De plus, nous définissons Ψ_1 par l'ensemble les contraintes marquées comme non éligibles pendant la première exécution de la fermeture par faible composition auquelles sont rajoutées celles marquées comme non éligibles pendant l'initialisation de la méthode, ligne 1 de la fonction $cohérenceE$. Nous avons la propriété suivante.

Proposition 3
$ffc(\mathcal{N}^k) = ffc(ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}])$, *pour tout $k > 0$.*

Preuve
($\subseteq$) Les contraintes représentées par Ψ_{k+1} sont des contraintes marquées non éligible durant la fermeture par faible composition sur $\mathcal{N}^k$ (et également durant l'intialisation de la méthode pour $k = 0$). Par conséquent, $ffc(\mathcal{N}^k) \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}]$.

De la proposition 1 (c), nous déduisons que $ffc(ffc(\mathcal{N}^k)) \subseteq ffc(ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}])$. Ainsi nous obtenons $ffc(\mathcal{N}^k) \subseteq ffc(ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}])$ (Proposition 1 (b)).

($\supseteq$) À partir de la proposition 2 (c) nous avons $ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}] \subseteq \mathcal{N}^k[\Psi_{k+1}]$. De plus, par définition de Ψ_{k+1} et de $\mathcal{N}_k$ nous savons que $\mathcal{N}^k[\Psi_{k+1}] \subseteq \mathcal{N}^k$. Ainsi, $ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}] \subseteq \mathcal{N}^k$. De la proposition 1 (c) il résulte que $ffc(ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}]) \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)$.

⊣

Nous définissons par $\mathcal{S}^k$ le RCQ obtenu en substituant les relations des contraintes de $\mathcal{N}$ marquées non éligibles jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ instanciation de contraintes par celles utilisées pour définir ces contraintes au moment du marquage de non éligibilité. Formellement, $\mathcal{S}^k$ est défini par $\mathcal{S}^0 = \mathcal{N}$ and $\mathcal{S}^k = \mathcal{S}^{k-1}[\Psi_k][(i^k, j^k, r^k]$ pour tout entier $k > 0$. Il est clair que $\mathcal{S}^k$ est un sous-RCQ de $\mathcal{N}$. De plus, lorsque l'algorithme se termine par un succès, après k' instanciations, le RCQ $\mathcal{S}^{k'}$ n'est défini qu'à partir de relations de l'ensemble $Skip$. De plus nous avons la propriété importante suivante.

Proposition 4
$ffc(\mathcal{N}^k) = ffc(\mathcal{S}^k)$, *pour tout* $k \geq 0$.

Preuve Puisque $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0 = \mathcal{S}^0$ la propriété est vraie pour $k = 0$. Maintenant supposons la vraie au rang k et prouvons la pour $k + 1$.

($\subseteq$) Nous avons $ffc(\mathcal{N}^k) = ffc(\mathcal{S}^k)$. À partir de la proposition 1 (a) nous déduisons que $ffc(\mathcal{N}^k) \subseteq \mathcal{S}^k$. Il résulte que $ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}] \subseteq \mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}]$ (Proposition 2 (b)). Ainsi, $ffc(ffc(\mathcal{N}^k)[\Psi_{k+1}]) \subseteq \mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}]$ (Proposition 1 (a)). À partir de cela et de la proposition 3 nous pouvons affirmer que $ffc(\mathcal{N}^k) \subseteq \mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}]$. En conséquence de quoi $ffc(\mathcal{N}^k)[(i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1})] \subseteq \mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}][(i^{k+1}, j^{k+1}), r^{k+1})]$ (Proposition 2 (b)). Par définition de $\mathcal{N}^{k+1}$ et $\mathcal{S}^{k+1}$ nous pouvons déduire que $\mathcal{N}^{k+1} \subseteq \mathcal{S}^{k+1}$. Nous pouvons conclure que $ffc(\mathcal{N}^{k+1}) \subseteq ffc(\mathcal{S}^{k+1})$ (Proposition 1 (c)).

($\supseteq$) Clairement $\mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}] \subseteq \mathcal{S}^k$. Ainsi $ffc(\mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]) \subseteq ffc(\mathcal{S}^k)$. D'après la proposition 2 (d) nous pouvons déduire que $ffc(\mathcal{S}^k[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]) \subseteq ffc(\mathcal{S}^k)[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]$. Par définition de S^{k+1} nous avons $ffc(\mathcal{S}^{k+1}) \subseteq ffc(\mathcal{S}^k)[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]$. De plus, comme la propriété est vraie au rang k, nous avons $ffc(\mathcal{S}^k) \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)$. Clairement, $ffc(\mathcal{S}^k)[\Psi_{k+1}] \subseteq ffc(\mathcal{S}^k)$. Il résulte que $ffc(\mathcal{S}^k)[\Psi_{k+1}] \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)$. En conséquence de quoi $ffc(\mathcal{S}^k)[\Psi_{k+1}][i^{k+1}, j^{k+1}), r^{k+1}] \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)\,[i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]$. À partir de tout cela nous pouvons affirmer que $ffc(\mathcal{S}^{k+1}) \subseteq ffc(\mathcal{N}^k)[i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}]$. Il résulte que $ffc(ffc(\mathcal{S}^{k+1})) \subseteq ffc(ffc(\mathcal{N}^k)\,[i^{k+1}, j^{k+1}, r^{k+1}])$. D'après la définition $\mathcal{N}^{k+1}$ nous pouvons conclure que $ffc(\mathcal{S}^{k+1}) \subseteq ffc(\mathcal{N}^{k+1})$.

⊣

Ainsi, lorsque l'algorithme $cohérenceE$ retourne **true** le réseau obtenu $\mathcal{N}$ est un sous-RCQ du RCQ initial et ne contient que des relations de l'ensemble $Skip$ comme contraintes. De plus, il est $\circ$-fermé. Il s'ensuit que si la méthode de la fermeture par faible composition est complet pour $Skip$ alors le RCQ obtenu est cohérent. Nous pouvons donc déduire le théorème suivant.

Théorème 1
Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour l'ensemble

$Skip \subseteq 2^{\mathsf{B}}$ alors $cohérenceE$ est correct et complet pour le problème de la cohérence des RCQ *définis sur* 2^{B}.

4 Résultats expérimentaux

Pour montrer l'intérêt pratique de notre approche nous avons réalisé une série de tests sur des réseaux de contraintes qualitatives de l'algèbre des intervalles. Ces réseaux ont été généré aléatoirement selon un modèle similaire à ceux proposés dans [3, 13]. Ce modèle considère les paramètres suivants : un entier n correspondant au nombre de variables du réseau ; le paramètre $nonTrivialDensity$ qui est la probabilité qu'une contrainte soit non triviale (i.e différente de B) ; le paramètre $cardinalityDensity$ qui est la probabilité qu'une relation atomique appartienne à une contrainte non triviale donnée ; $consistant$ qui est une valeur booléenne indiquant si le RCQ généré doit être cohérent ou non. Dans la suite nous donnerons des résultats expérimentaux concernant des RCQ générés avec 50 variables, avec $nonTrivialDensity$ prenant trois valeurs possibles 0.25, 0.50 et 0.75. Le paramètre $cardinalityDensity$ varie de 0.05 jusqu'à 0.95 avec un pas de 0.05. Par manque de place nous indiquons de manière détaillée uniquement les résultats concernant des RCQ cohérents. Pour chaque point, 100 RCQ sont générés et testés.
Les expériences ont été réalisées en JAVA à l'aide de la librairie QAT [5](Qualitative Algebra Toolkit). Nous avons implanté et comparé l'algorithme $cohérenceE$ et celui de Nebel [13] qui n'utilise pas de marquages de contraintes. L'ensemble $Split$ utilisé est l'ensemble des relations préconvexes [14, 8]. Concernant la méthode de fermeture par faible composition nous utilisons deux algorithmes différents. Pour le premier appel nous utilisons une méthode basée sur l'algorithme WCC_Mixed [4] mixant $PC1$ et $PC2$ [10, 12]. Celui étant plus efficace lorsque la méthode de la fermeture par faible composition est suffisante pour détecter l'incohérence du RCQ. Pour les autres appels nous utilisons une version plus classique basée sur $PC2$ et stockant les paires de contraintes à traiter dans une queue.
Lors de la recherche le choix des contraintes à traiter (ligne 2 de $cohérenceE$) est dynamique. La première heuristique que nous appellons Dom consiste à selectionner une contrainte ayant la plus petite cardinalité parmi les contraintes sélectionnables. La deuxième heuristique que nous utilisons est plus originale. Nous la nommons $DomTriangle$. Comme l'heuristique précédente, cette heuristique considère les contraintes de plus petite cardinalité. À chacune de ces contraintes C_{ij} l'heuristique $DomTriangle$ associe le poids $\Sigma(|Cik|+|Ckj| : C_{ik}$ et C_{kj} sont non triviales) et choisira une de celles ayant un poids minimal. L'idée de cette heuristique est de sélectionner une contrainte qui provoquera le plus de modifications lors des opérations de triangulation futures.

En examinant les courbes de la figure 1 nous constatons que pour la majorité des RCQ générés, l'algorithme $cohérenceE$ s'arrête plus tôt. L'avantage est plus important avec l'utilisation de l'heuristique $DomTriangle$ que l'heuristique Dom. De plus, de manière générale, plus la densité $nonTrivialDensity$ est faible et plus l'avantage est élevé. Une explication plausible de ce phénomène est que plus cette densité est faible, plus grand est le nombre de relations triviales, de manière générale plus grand est le

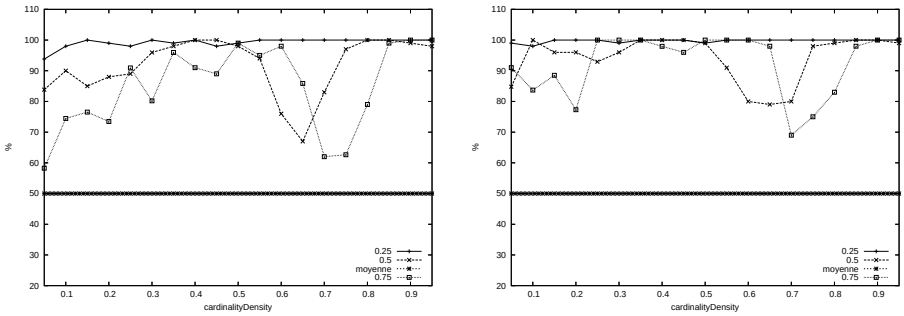

FIG. 1 – Pourcentages du nombre de RCQ résolus plus rapidement par $cohérenceE$ pour $nonTrivialDensity \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$, avec l'heuristique Dom à gauche et $DomTriangle$ à droite.

nombre de relations préconvexes, et plus tôt s'arrêtera $cohérenceE$.
Les tableaux suivants récapitulent les temps mis et le nombre de retours en arrière réalisés lors de la recherche. Le temps moyen est donné en millisecondes. La première colonne indique le temps mis par le premier appel de la fermeture par faible composition. Les deux suivantes concernent le temps de recherche effectué par $cohrenceE$ et l'algorithme de Nebel respectivement. Dans les deux dernières sont indiqués les nombres de retours en arrière. Les tableaux de gauche concernent l'heuristique Dom et ceux de droite l'heuristique $DomTriangle$. Tout d'abord, nous remarquons que plus la densité de contraintes non triviales est élevée plus est élevé la difficulté de résolution des RCQ. De plus, pour chacune des trois densités de contraintes non triviales considérées il existe une phase correspondant à des valeurs bien précises de la densité $cardinalityDensity$ pour lesquelles la résolution est particulièrement difficile. Pour $nTD = 0.5$ cette phase correspond à $cD \in \{0.6, 0.65\}$ et pour $nTD = 0.75$ cette phase correspond à $cD \in \{0.7, 0.75\}$. Dans ces phases le nombre de retours en arrière est très important. Pour $nTD = 0.25$, $cohérenceE$ est systématiquement plus rapide. Pour la densité $nTD = 0.5$ et $nTD = 0.75$, $cohérenceE$ est moins rapide dans quelques cas. Ces cas se situent toujours dans la phase difficile. De plus, nous remarquons qu'avec l'utilisation de l'heuristique $DomTriangle$ ces cas sont moins nombreux : 1 pour $nTD = 0.5$ et 2 pour $nTD = 0.75$ contre respectivement 2 et 3 pour l'heuristique Dom. Nous remarquons aussi que pour la densité de contraintes non triviales 0.5 et 0.75 l'utilisation de l'heuristique $DomTriangle$ permet d'avoir de meilleurs résultats en terme de temps et de retours en arrière que l'utilisation de l'heuristique Dom. Pour la densité de contraintes non triviales 0.25 il n'y a pas de différence significative entre ces deux heuristiques. Nous avons également réalisé des expériences sur des RCQ non forcés cohérents. Les premiers résultats concernant ces RCQ semblent montrer que $cohérenceE$ soit moins performant sur ce type de RCQ. Une explication possible à cela est que, dans le cas d'un RCQ non cohérent, la sélection des contraintes se faisant uniquement sur les contraintes marquées comme éligibles dans le cas de $cohérenceE$, celui-ci se dirige moins rapidement vers un noyau de contraintes non cohérent. Contrairement à l'algorithme de Nebel qui peut sélectionner les contraintes les plus appropriées pour atteindre un tel noyau.

nTD=0.25	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
cD=0.05	190	35	64	0	0
cD=0.1	203	42	78	0	0
cD=0.15	221	61	112	0	0
cD=0.2	232	86	143	0	0
cD=0.25	247	140	226	0	0
cD=0.3	240	213	322	0	0
cD=0.35	191	327	467	0	0
cD=0.4	110	450	613	0	0
cD=0.45	61	510	670	0	0
cD=0.5	37	511	689	0	0
cD=0.55	29	511	748	0	4
cD=0.6	27	502	692	0	0
cD=0.65	21	457	684	0	0
cD=0.7	19	398	610	0	0
cD=0.75	23	376	569	0	0
cD=0.8	18	314	495	0	0
cD=0.85	16	249	403	0	0
cD=0.9	13	151	252	0	0
cD=0.95	9	33	66	0	0

nTD=0.25	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
0.05	180	31	60	0	0
0.1	194	41	79	0	0
0.15	212	61	109	0	0
0.2	227	87	143	0	0
0.25	244	142	227	0	0
0.3	232	215	318	0	0
0.35	183	323	459	0	0
0.4	100	462	628	1	1
0.45	51	504	673	0	0
0.5	35	508	775	0	5
0.55	23	507	698	0	0
0.6	17	485	701	0	0
0.65	19	455	676	0	0
0.7	16	402	614	0	0
0.75	18	361	559	0	0
0.8	15	303	486	0	0
0.85	12	242	397	0	0
0.9	11	149	247	0	0
0.95	5	32	63	0	0

nTD=0.5	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
cD=0.05	137	11	17	0	0
cD=0.1	138	9	14	0	0
cD=0.15	151	11	18	0	0
cD=0.2	162	14	24	0	0
cD=0.25	175	18	33	0	0
cD=0.3	198	24	45	0	0
cD=0.35	231	34	63	0	0
cD=0.4	268	55	98	0	0
cD=0.45	296	90	155	0	0
cD=0.5	290	296	387	0	0
cD=0.55	108	1289	1320	19	12
cD=0.6	72	**37566**	**34338**	1078	839
cD=0.65	59	**28751**	**27061**	785	640
cD=0.7	52	4964	10096	136	190
cD=0.75	47	717	987	0	2
cD=0.8	48	626	873	0	0
cD=0.85	42	520	752	0	0
cD=0.9	31	384	564	0	0
cD=0.95	17	179	281	0	0

nTD=0.5	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
cD=0.05	135	11	17	0	0
cD=0.1	132	6	13	0	0
cD=0.15	142	9	17	0	0
cD=0.2	154	13	24	0	0
cD=0.25	175	19	34	0	0
cD=0.3	198	26	47	0	0
cD=0.35	225	33	62	0	0
cD=0.4	262	56	98	0	0
cD=0.45	298	94	153	0	0
cD=0.5	281	290	380	0	0
cD=0.55	109	1642	1724	29	23
cD=0.6	68	6272	6325	162	139
cD=0.65	51	**14188**	**11260**	429	297
cD=0.7	45	1078	1283	7	7
cD=0.75	40	715	935	0	0
cD=0.8	38	625	879	0	0
cD=0.85	36	522	748	0	0
cD=0.9	24	368	570	0	0
cD=0.95	13	167	263	0	0

nTD=0.75	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
cD=0.05	132	14	13	0	0
cD=0.1	134	9	12	0	0
cD=0.15	140	9	12	0	0
cD=0.2	149	9	13	0	0
cD=0.25	157	6	11	0	0
cD=0.3	180	13	17	0	0
cD=0.35	184	10	19	0	0
cD=0.4	223	20	35	0	0
cD=0.45	264	26	46	0	0
cD=0.5	282	32	63	0	0
cD=0.55	348	331	485	47	58
cD=0.6	186	561	681	1	1
cD=0.65	120	**3551**	**3312**	63	46
cD=0.7	110	**50848**	**43879**	1295	931
cD=0.75	94	**78982**	**66304**	1635	1160
cD=0.8	81	1516	2338	14	22
cD=0.85	75	756	990	0	0
cD=0.9	55	572	784	0	0
cD=0.95	32	318	474	0	0

nTD=0.75	T_{ffc}	T_E	T_N	BK_E	BK_N
cD=0.05	117	10	13	0	0
cD=0.1	125	8	12	0	0
cD=0.15	132	8	12	0	0
cD=0.2	143	9	13	0	0
cD=0.25	149	5	10	0	0
cD=0.3	163	8	15	0	0
cD=0.35	181	9	19	0	0
cD=0.4	216	19	37	0	0
cD=0.45	258	27	46	0	0
cD=0.5	286	34	62	0	0
cD=0.55	329	72	115	0	0
cD=0.6	175	543	650	0	0
cD=0.65	110	**3447**	**3179**	79	58
cD=0.7	91	**49158**	**42696**	1178	969
cD=0.75	84	73930	87883	1493	1536
cD=0.8	75	1308	1328	10	6
cD=0.85	65	768	1007	0	0
cD=0.9	48	567	775	0	0
cD=0.95	22	314	465	0	0

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un algorithme basé sur la notion d'éligibilité de contraintes pour la résolution de réseaux de contraintes qualitatives. Nous avons prouvé que cet algorithme est correct et complet. Les premiers résultats expérimentaux obtenus montrent l'intérêt pratique de notre approche. Malgré tout de nouvelles expériences doivent être réalisées. En particulier, il serait intéressant de confronter $cohérenceE$ à des RCQ de taille supérieure et d'autres formalismes que celui d'Allen. Il faudrait également étudier le comportement de $cohérenceE$ en utilisant différents ensembles de découpage, par exemple nous pourrions utiliser l'ensemble des relations convexes ou celui des relations pointisables dans le cadre de l'algèbre des intervalles.

Références

[1] J. F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proc. of the Seventh Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.

[2] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Gérard Ligozat. On the consistency problem for the INDU calculus. In *Proceedings of TIME'2003*, pages 203–211, 2003.

[3] Peter Van Beek and Dennis W. Manchak. The design and experimental analysis of algorithms for temporal reasoning. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 4 :1–18, 1996.

[4] J.-F. Condotta, G. Ligozat, and M. Saade. An empirical study of algorithms for qualitative temporal or spatial networks. In *Proceedings of the workshop on spatial reasoning (ECAI'06)*, 2006.

[5] J.-F. Condotta, G. Ligozat, and M. Saade. The QAT : A qualitative algebra toolkit. In *Proceedings of the thirteenth international conference on Temporal Representation an Reasoning (TIME'2006), Hungary*, 2006.

[6] Amar Isli and Anthony G. Cohn. A new approach to cyclic ordering of 2D orientations using ternary relation algebras. *Artificial Intelligence*, 122(1–2) :137–187, 2000.

[7] P. B Ladkin and A. Reinefeld. Effective solution of qualitative interval constraint problems. *Artificial Intelligence*, 57(1) :105–124, september 1992.

[8] Gérard Ligozat. A New Proof of Tractability for ORD-Horn Relations. In *Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'96)*, volume 1, pages 395–401, 1996.

[9] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9) :23–44, 1998.

[10] A. K. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence, 1977*, 8 :99–118, 1977.

[11] A. K. Mackworth and E. C. Freuder. The Complexity of Some Polynomial Network Consistency Algorithms for Constraint Satisfaction Problems. *Artificial Intelligence*, 25(1) :65–74, 1985.

[12] U. Montanari. Networks of constraints : Fundamental properties and application to picture processing. *Information Sciences*, 7(2) :95–132, 1974.

[13] Bernhard Nebel. Solving hard qualitative temporal reasoning problems : Evaluating the efficienty of using the ORD-Horn class. In *Proceeding of the Twelfth Conference on Artificial Intelligence (ECAI'96)*, 1996.

[14] Bernhard Nebel and Hans-Jürgen Bürckert. Reasoning About Temporal Relations : A Maximal Tractable Subclass of Allen's Interval Algebra. *Journal of the ACM*, 42(1) :43–66, 1995.

[15] Arun K. Pujari, G. Vijaya Kumari, and Abdul Sattar. INDU : An interval and duration network. In *Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 291–303, 1999.

[16] D. A. Randell, Z. Cui, and A. G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In *Proc. of the 3rd Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 165–176, 1992.

[17] J. Renz and B. Nebel. Efficient methods for qualitative spatial reasoning, 1998.