



HAL
open science

Déflexion gravitationnelle de la lumière en mécanique discrète

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Déflexion gravitationnelle de la lumière en mécanique discrète . 2016. hal-01422632

HAL Id: hal-01422632

<https://hal.science/hal-01422632v1>

Preprint submitted on 26 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Déflexion gravitationnelle de la lumière en mécanique discrète

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

La déflexion gravitationnelle de la Lumière par une étoile massive peut être recherchée par une approche newtonienne classique ; dans le cas du Soleil la déviation est de $0.875''$ d'arc, une valeur trop faible d'un facteur deux par rapport à la théorie de la Relativité Générale. La valeur exacte $1.75''$ d'arc, obtenue par cette théorie basée sur un calcul de géodésique a été confirmée par une expérience quelques années après à partir d'une éclipse totale et depuis, par de nombreuses mesures plus précises.

Ce résultat d'interaction faible sert de référence pour confronter la mécanique des milieux discrets dans un domaine éloigné des applications habituelles de la mécanique. L'intégration d'un terme supplémentaire, qui représente de fait la courbure de l'espace-temps, dans l'équation du mouvement permet de retrouver exactement la valeur expérimentale. La gravité introduit une variation de la vitesse locale qui génère elle-même une accélération exactement égale à celle de la gravité.

Mots clés

Mécanique des milieux discrets, décomposition de Hodge-Helmholtz, Principe d'Equivalence, déflexion gravitationnelle de la Lumière,

Gravitational Deflection of Light in Discrete Mechanics

Abstract

The gravitational bending of the Light by a massive star can be sought by applying Newton's Law to the transverse deflection of a photon ; in the case of the Sun the deviation is of 0.875 arcseconds a value too low by a factor of two compared to the General Relativity. The exact value, 1.75 arcseconds, obtained by this theory based on a geodesic calculation was confirmed by an experiment a few years later from a total eclipse and since by many more accurate measurements.

This result of weak interaction is used as reference to confront the Discrete Mechanics in field far away from the usual applications in the framework of classical mechanics. The integration of an additional term which represents in fact the curvature of spacetime in the equation of motion makes it possible to find exactly the experimental value. Gravity introduces a variation the local velocity which generates itself an acceleration exactly equal to that of gravity.

Keywords

Discrete Mechanics, Hodge-Helmholtz Decomposition, Principle of Equivalence, Deflection of Light, Gravitational bending of Light

1 Introduction

L'objectif est de montrer que l'équation du mouvement issue de la mécanique discrète [1] permet de retrouver le premier résultat majeur de la théorie de la Relativité, la déflexion de la Lumière par le Soleil. Alors que cette dernière théorie est basée sur une approche de géométrie différentielle et de calcul de géodésique, la mécanique des milieux discrets repose sur l'établissement d'une équation du mouvement établie dans un référentiel local. Les solutions de cette équation reproduisent intégralement les phénomènes habituels, les écoulements de fluides, les contraintes et déplacements dans les solides, la propagation des ondes, etc. L'équation du mouvement discrète fait apparaître un terme assimilable à la courbure de l'espace-temps ce qui justifie la question posée ici, est-ce que celle-ci est relativiste ? Même si la réponse n'est que très partielle, si elle est positive, elle laisserait espérer une certaine cohérence des différentes approches de la mécanique. Deux grands principes sont à la base de la mécanique discrète : le Principe d'Equivalence et la décomposition de Hodge-Helmholtz associée à l'existence de deux potentiels scalaire et vectoriel.

Depuis G. Galilée de nombreuses expériences ont été menées sur l'action de la pesanteur sur deux masses différentes qui sont accélérées de la même manière indépendamment de leur structure interne ou de leur composition ; c'est ce que l'on appelle l'égalité entre masse grave et masse inerte (Weak Equivalence Principle, ou WEP). A. Einstein en fera un principe fort, le Principe d'Equivalence associé à la limitation de la vitesse de la lumière dans le vide.

A ce jour ce principe est bien vérifié par de nombreuses expériences et quantifiées par le rapport d'Eötvös $\eta = 2 |a_1 - a_2| / |a_1 + a_2|$ où a_1 et a_2 sont les accélérations des deux masses. La mesure de l'accélération est indépendante de tout référentiel et peut se faire avec une grande précision absolue. L'état actuel conduit à estimer que le WEP est exact avec un rapport d'Eötvös $\eta < 10^{-13}$; l'exposé de C.M. Will [5] cite les différentes expériences menées depuis un siècle. D'autres expériences en cours, menées par la France et par les Etats-Unis permettront probablement d'atteindre des précisions supérieures (10^{-15} ou 10^{-18}) pour conforter (ou infirmer) l'exactitude du Principe d'Equivalence (WEP).

Ainsi ce Principe d'Equivalence permet de ré-écrire le Principe Fondamental de la Dynamique établi par Newton dans ses *Principia* [4] sous la forme :

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \tag{1}$$

Cette égalité ressemble à une évidence puisqu'il n'est pas possible de dissocier pour un observateur isolé l'effet de la gravité de celle de son accélération propre. Malgré la connaissance de cette égalité depuis G. Galilée, I. Newton a formulé sa seconde loi $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$ alors même que la principale force qui s'imposait à l'époque était la gravité. Même si ce principe pose encore des problèmes en électromagnétisme il sera retenu dans ce cadre de la dynamique.

La question est maintenant de savoir ce que peut représenter la force par unité de masse \mathbf{g} . Est-ce que ce vecteur est seulement associé aux forces de gravitation ou bien peut-on considérer que \mathbf{g} est la somme des forces exercées sur une particule de matière ? La question est sans enjeu ici car nous considérerons la gravité comme étant la seule force exercée par un corps de masse M supposée ponctuelle sur une particule de masse m pouvant éventuellement être nulle. L'accélération de la gravité est alors égale à $-\mathcal{G} M/r^2$ alors que le potentiel dont elle est issue est $\mathcal{G} M/r$ où \mathcal{G} est la constante universelle de la gravitation et r la distance entre la particule et le corps de masse M . Dans le cas d'une faible gravité exercée par un corps pouvant être assimilé à une masse ponctuelle M , un développement limité en $\mathcal{G} M/r c^2 \ll 1$, conduit à :

$$g_{00} = -1 + 2 \frac{\mathcal{G} M}{r} - 2 \left(\frac{\mathcal{G} M}{r} \right)^2 + \dots \tag{2}$$

dont le premier ordre correspond au potentiel newtonien et le second terme est une correction d'ordre de grandeur de 10^{-6} dans le cas du système solaire. Cette théorie dite Post-Newtonienne va permettre d'expliquer la déviation de photons passant au voisinage du soleil doublant ainsi la contribution purement newtonienne. La déflexion de la lumière au voisinage du soleil mesurée par A.S. Eddington en 1919 [2] au cours d'une éclipse est la première confirmation de la théorie de la Relativité Générale établie quelques années plus tôt par A. Einstein. La théorie de la Relativité Générale prend la forme d'une théorie purement géométrique qui sépare les interactions de la gravitation des autres interactions et l'unification avec d'autres théories n'est pas totalement réalisée. Elle postule l'existence d'une vitesse limite, la célérité de la lumière c dans le vide ; celle-ci est inscrite dans les transformations de Lorentz à son origine et le facteur $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ servant à exprimer les coordonnées, les vitesses et accélérations ainsi que les lois de la cinématique et de la dynamique relativistes.

Certains résultats de la dynamique des fluides, comme l'existence d'écoulements supersoniques, dans une tuyère de Laval par exemple, montrent que la vitesse du milieu est plus grande que la célérité locale du son. De même on observe aussi dans certains milieux des vitesses supraluminiques, l'eau par exemple où la propagation de la Lumière est plus faible que dans le vide ; c'est l'effet Vavilov-Tcherenkov observé dans les piscines de centrales nucléaires par exemple. Ces phénomènes où la vitesse du milieu est plus grande que la célérité locale du milieu ne sont pas en contradiction avec la limitation de la célérité de la Lumière dans le vide associée à la théorie de la Relativité. Un exemple marquant est celui de l'inflation cosmique dans les tous premiers instants de l'existence de l'Univers où sa vitesse d'expansion est considérable. Dans le cadre de la mécanique discrète le problème est résolu d'emblée, la célérité locale (un scalaire) est une donnée du problème et la vitesse du milieu (un vecteur), est une variable non limitée.

2 Concept de milieu discret

La vision de milieu discret reprend le Principe Fondamental de la Dynamique sur sa forme (1) excluant l'influence de la masse (ou de la masse volumique) sur l'accélération d'une particule de matière. Celle-ci ne sera ré-introduite que lorsque l'on cherchera à exprimer certaines quantités mesurables comme la pression par exemple ou bien l'énergie. La grandeur \mathbf{g} représentera ici l'ensemble des forces massiques (accélérations) exercées par les différents effets, la gravité bien sûr mais aussi les forces visqueuses, les forces capillaires, les effets de dissipation, les forces centripète et centrifuge, etc. Les principales hypothèses sont :

- le Principe d'Equivalence sera admis ;
- le vecteur accélération, seule quantité mesurable en l'absence de repère, sera écrite formellement comme une décomposition de Hodge-Helmholtz, la somme d'une contribution irrotationnelle et d'une composante solénoïdale ;
- les équations seront invariantes à tout changement de référentiel et les mouvements rigides de translation et de rotation uniformes n'auront pas d'effets sur la solution ;
- le principe d'accumulation sera adopté : les évolutions d'un système physique s'effectueront d'un état d'équilibre vers un autre état d'équilibre. La définition de celui-ci est associé à la satisfaction des lois de la physique ;
- la dualité entre vitesse de la particule et célérité de la propagation sera adoptée ;
- la notion de milieu continu sera abandonnée ;
- les lois constitutives, rhéologie, lois d'états, seront exclues du système d'équations.

Le concept de milieu discret est introduit à travers deux topologies, primale et duale, où s'expriment les différentes quantités scalaires ou vectorielles du problème. La figure (1) montre la topologie primale constituée de segments Γ de vecteurs unitaires \mathbf{t} définissant une surface plane de normale unitaire \mathbf{n} ; ces deux vecteurs sont orthogonaux $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Les scalaires seront exprimés sur chaque extrémité a et b du segment Γ . La vitesse ou plutôt les composantes de la

vitesse \mathbf{V} , comme l'accélération \mathbf{a} , sont associées à chaque segment Γ où elles sont constantes sur celui-ci. Mais il y a une différence fondamentale entre accélération et vitesse : si \mathbf{a} possède un caractère absolu et mesurable indépendamment du référentiel, la vitesse est une variable secondaire attachée au seul repère local. La désignation habituelle de c , la "vitesse de la Lumière", est ambiguë ; en mécanique discrète la célérité c est un scalaire associé au point tandis que la vitesse \mathbf{V} est attachée au segment Γ et il ne peut y avoir confusion entre ces deux quantités. La propagation des ondes s'effectuera à la célérité c fixée et le mouvement de la matière ou de particule sans masse à la vitesse \mathbf{V} ne sera limité par aucun principe. De plus, si l'accélération est la variable principale de l'équation du mouvement, la vitesse n'intervient qu'à travers des opérateurs différentiels jouant le rôle de filtre éliminant ainsi les mouvements de translation et de rotation uniformes.

Une question importante doit-être posée : est-il légitime de considérer que la nature des ondes dans les solides, fluides et le vide soit la même ? Pour y répondre on peut faire la comparaison entre fluide et solide ; dans les solides il existe deux célérités, c_L la célérité longitudinale et c_T la célérité transversale toujours plus petite que la première alors qu'en fluide les effets de la propagation transversale ne sont généralement pas considérés. Ces effets existent pourtant mais les constantes de temps auxquels on peut les observer est de l'ordre de grandeur des temps de relaxation des contraintes de cisaillement dans le fluide soit $\tau \approx 10^{-12} s$. Pour les ondes longitudinales la notion du temps d'observation est aussi importante, par exemple de l'eau qui nous paraît, dans les conditions courantes, comme incompressible n'en propage pas moins les ondes à la célérité $c_L \approx 1500 m s^{-1}$ et l'eau est donc est un milieu compressible. Alors la propagation des ondes sonores nécessitant un milieu dense et celle de la lumière dans le vide relève-t-elle de la même phénoménologie ? Nous considérerons que c'est le cas et que le laps de temps d'observation dt entre deux états fait partie du problème posé et de sa solution.

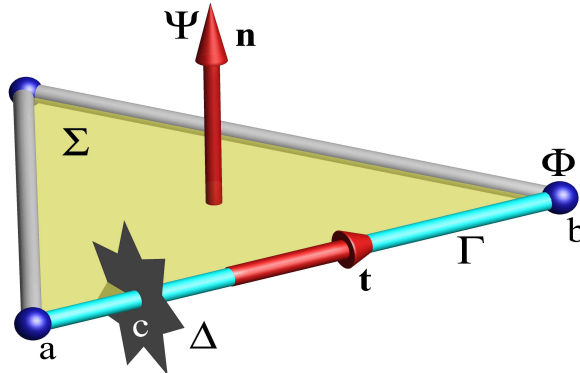


FIGURE 1. Topologie élémentaire de la mécanique des milieux discrets : trois segments rectilignes Γ délimités par des points définissent une face plane Σ . Les vecteurs unitaires de la normale à la face \mathbf{n} et du vecteur porté par Γ sont orthogonaux, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Le segment Γ peut être intercepté par une discontinuité Δ située en c , entre les extrémités a et b sur celui-ci. Φ et Ψ sont respectivement les potentiel scalaire et vectoriel.

En mécanique des milieux discrets dt est fini tout comme la distance d entre les deux extrémités du segment Γ . La topologie primale représentée sur la figure (1) peut être réduite à toutes les échelles mais ne peut être résolue à un point. De même le temps d'observation dt peut être choisi en fonction du problème mais ne deviendra jamais un élément différentiel ou un infiniment petit. Les lois du milieu continu ou celles de la dérivation habituelles ne s'appliquent plus.

La dérivation des équations de la mécanique discrète, établie précédemment [1], est réalisée

sur un segment Γ et conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla(\phi^o - dt c_L^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \times (\psi^o - dt c_T^2 \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{g} \\ \phi = \phi^o - dt c_L^2 \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \psi = \psi^o - dt c_T^2 \nabla \times \mathbf{V} \end{cases} \quad (3)$$

où c_L est la célérité longitudinale et c_T est la célérité transversale. Ces quantités peuvent s'exprimer en fonction des modules de compression isotherme $1/\chi_T$ et du module de cisaillement μ sous la forme $c_L = 1/\sqrt{\rho \chi_T}$ et $c_T = 1/\sqrt{\mu/\rho}$. Le terme \mathbf{g} représente une force par unité de masse. Dans le cas d'un fluide simple les ondes transversales ne s'accumulent pas alors qu'en élasticité linéaire elles s'accumulent totalement dans le potentiel vecteur ψ^o . De même dans les ondes longitudinales ne s'accumulent pas dans le vide et ϕ^o reste nul alors qu'elles s'accumulent pour les fluides denses. Ces deux potentiels ϕ^o et ψ^o peuvent s'exprimer en fonction de quantités plus habituelles, la pression p^o et la contrainte de cisaillement-rotation ω^o soit $\phi^o = p^o/\rho$ et $\psi^o = \omega^o/\rho$ où ρ est la masse volumique moyenne définie sur le segment Γ .

Le système (3) est constitué d'une équation dont la variable est \mathbf{V} et de deux relèvements des potentiels ϕ^o et ψ^o . Ce système est autonome et ne fait référence à aucune loi constitutive, loi d'état ou loi rhéologique, les paramètres physiques sont supposés simplement connus et déterminés par ailleurs. La conservation de la masse n'est pas associée au système comme en milieu continu, celle-ci ne sera utilisée que si nécessaire, pour les écoulements diphasiques par exemple.

En fluide la célérité est notée $c = c_L$ et c'est généralement une fonction du potentiel ϕ^o ; par exemple pour l'air la célérité $c = \sqrt{dp/d\rho} = 1/\sqrt{\rho \chi_T}$ dépend de la pression. L'augmentation de la célérité dans un écoulement conduit à une onde de compression puis à une onde de choc alors qu'au contraire sa diminution conduit à une onde de détente. Il n'y a pas de limite théorique à l'augmentation de la vitesse du milieu fluide et celle-ci peut être supérieure à la célérité. Cependant il existe un cas où la vitesse du milieu ne peut dépasser la célérité, c'est le cas d'un écoulement unidimensionnel pour lequel la courbure de l'espace est nulle. Le théorème d'Hugoniot décrit parfaitement ce phénomène classique.

2.1 Propriétés des équations

Les équations de la mécanique discrète possèdent un certain nombre de différences avec celles de la mécanique des milieux continus; celles-ci sont décrites dans [1]. Il en est une pourtant qui représente une avancée importante, c'est sa formulation qui décrit l'accélération \mathbf{a} comme la somme d'un champ à rotationnel nul et d'un autre à divergence nulle. Avec le Principe d'Equivalence la décomposition de Hodge-Helmholtz est un autre résultat important du siècle dernier et pourtant son application aux équations de la physique semble être laissée de côté. De nombreux effets physiques semblent se réduire à des potentiels scalaires comme la gravité par exemple mais peu, au moins en mécanique classique, peuvent s'écrire sous la forme d'un rotationnel comme le cisaillement. L'unification aux équations de l'électromagnétisme changerait probablement ce constat.

L'écriture vectorielle simple de l'équation du mouvement à partir d'opérateurs discrets, rotationnel, gradient, divergence ne nécessite aucun tenseur du second ordre pour décrire le comportement du mouvement quel que soit le milieu considéré y compris les solides anisotropes. La confusion entre lois de comportement et loi générale du mouvement a conduit à l'intégration de tenseurs dans celle-ci. La mécanique des milieux continus établie depuis deux siècles conduit en effet à des *artefacts* et à des conditions de compatibilité non nécessaires.

Tous les comportements observés en mécanique newtonienne pour les écoulements subsoniques, supersoniques, visqueux ou non, solides ou fluides, ... sont inscrits au sein du système (3) unifiant ainsi des domaines de la mécanique parfois disjoints. Ce système est général et s'applique pour les solides, les fluides, les ondes quel que soit la dimension d'espace considéré et la topologie du système.

Les approximations classiques telles que l'incompressibilité de l'écoulement, le régime de Stokes, le fluide parfait, ... s'appliquent à ce système de manière naturelle. Par exemple considérons le cas d'un écoulement dit incompressible, la condition $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ est une conséquence et non un fait acquis, il ne faut surtout pas supprimer le terme correspondant dans l'équation du mouvement. L'incompressibilité dépend de la célérité des ondes dans le milieu mais aussi du temps d'observation dt entre deux états ; ainsi, pour un même fluide, l'écoulement nous apparaîtra d'autant plus compressible que dt est petit.

Considérons maintenant le cas des écoulements unidirectionnels suivant une trajectoire curviligne. Comme le rotationnel n'est pas défini en 1D le terme visqueux correspondant disparaît de l'équation du système (3) tout comme une partie du terme d'inertie $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$. Si le champ de gravité dérive d'un potentiel, $\mathbf{g} = \nabla \Phi_g$, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \left(\phi^o - dt c_L^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Phi_g \right) \quad (4)$$

Suivant la trajectoire curviligne le gradient est parfaitement défini comme la différence entre deux points du trajet discret comme la divergence de la vitesse où celle-ci est définie sur chaque segment Γ . Cette expression généralise la loi de Bernoulli aux écoulements compressibles et à la propagation des ondes. Pour les écoulements stationnaires la quantité entre parenthèse est constante sur une ligne de courant.

Dans le cas général 1D la forme lagrangienne s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(\phi^o - dt c_L^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_g \right) \quad (5)$$

Comme on le voit la masse ou la masse volumique ρ n'apparaît pas à ce stade, celle-ci intervient à travers le potentiel scalaire d'accumulation ϕ^o lorsque la notion de pression est utilisée sous la forme $\phi^o = p^o/\rho$; la masse volumique est une constante sur tout le segment Γ .

La difficulté de résolution de l'équation (5) réside dans le couplage fort de l'espace et du temps du terme $dt c_L^2 \nabla \cdot \mathbf{V}$. La quantité dt représente l'échelle d'observation du phénomène entre deux états d'équilibre. Appelons $u(t)$ la vitesse curviligne associée au segment Γ , l'abscisse $s(t)$, considérons $dt c^2$ comme une constante et supprimons le potentiel d'accumulation ; transformons la dernière équation sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{c^2}{u^2} \frac{dt}{u} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{u^2} dt \frac{d^2u}{dt^2} + g \quad (6)$$

cette équation ne peut pas être considérée comme une équation différentielle du second ordre à moins de transformer le laps de temps dt apparaissant au numérateur comme un paramètre physique $dt = \tau$; même dans ce cas l'équation où t est absent de l'équation celle-ci ne possède pas de solution simple y compris lorsque le terme source g est constant.

Dans le cas général le terme $dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}$ dépend de l'abscisse curviligne sans que l'on puisse dissocier chacun de ses termes. En effet la divergence de la vitesse instantanée dépend du temps dt d'observation du phénomène. Pour autant la solution du problème ne dépend pas de dt si cette quantité est suffisamment petite pour capter la physique. Dans le cas des écoulements compressibles à vitesses modérées, subsoniques ou supersoniques, la célérité du son est une fonction du potentiel $\phi^o = p^o/\rho$, pour un gaz parfait la célérité elle devient $c = \sqrt{\gamma r T^o}$.

Le couplage fort de l'espace et du temps de l'équation (5) correspond à une vision instantanée de l'espace qui représente le présent ; la résolution de cette équation permettra d'en déduire son avenir au moins sur un certain horizon car ce qui entre dans le champ décrit n'est pas connu et va, à terme, influencer le présent. De même ce qui sort de ce champ est définitivement perdu. Cette description est différente d'un astronome qui observe l'univers et qui voit un passé d'autant plus lointain que sa lunette est puissante.

L'équation du mouvement de la mécanique discrète (3) permet ainsi d'unifier différents aspects de la mécanique newtonienne parfois disjoints. Pour aller plus loin il sera nécessaire d'envisager de traiter d'autres problèmes de la physique notamment l'électromagnétisme ou des théories plus récentes de la mécanique. Si la mécanique newtonienne est définie par rapport à la vitesse de la lumière considérée comme infinie alors l'équation du mouvement discrète sort de ce cadre. Le terme $\nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V})$ peut être associé à la courbure de l'espace-temps de la théorie de la Relativité ; dans quelle mesure l'équation (3) est une équation de la dynamique relativiste ? La seule manière d'y répondre est de confronter les résultats obtenus aux expériences incontournables menées depuis le début du siècle dernier [5].

D'abord examinons le terme $\nabla (\phi^o - dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V})$ et menons une analyse en ordre de grandeur où $dt \approx, \mathbf{V} \approx V_o/dx$, alors ϕ^o est d'ordre de grandeur de $\phi^o \approx c V_o$. Ainsi la pression est d'ordre de grandeur $p \approx \rho c V_o$; ce résultat est celui que l'on trouve facilement pour le coup de bélier où une colonne d'eau est stoppée brusquement par une vanne. Pour une vitesse de $V_o = 1 \text{ ms}^{-1}$ et $c = 1500$ on obtient $p = 15 \text{ bar}$. Ce résultat est corroboré exactement par la simulation du phénomène à l'aide du système (3). Si, au premier ordre, on considère c comme constant on peut calculer l'énergie mise en jeu lorsque $V_o = c$, on trouve $e = m c^2$, la célèbre formule de la théorie de la Relativité. En fait cette énergie est celle que l'on trouverait quelle que soit la nature de l'onde considérée, la lumière, le son, etc.

Pour les fluides classiques la vitesse, dans l'air par exemple, peut être plus grande que la célérité du son mais ce phénomène est lié à la courbure de l'espace. Pour un espace sans courbure la vitesse du fluide a pour limite la célérité du son. Dans le cas de la Lumière, l'univers actuel étant homogène et plat, la propagation de celle-ci est relaxée et sa limite est égale à $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ dans le vide. La célérité c est limitée par c_0 par la théorie de la Relativité mais un cas de vitesse supraluminique édifiant est celui associé au Big-Bang pour des temps compris entre l'ère de Planck pour des temps inférieurs à 10^{-43} s où l'univers était limité à un horizon de l'ordre de 10^{-33} m jusqu'à un temps de 10^{-35} s , appelée inflation. Pendant cette période l'Univers a augmenté sa taille dans un rapport de 10^{107} à $10^{10^{14}}$ [3]. La courbure de l'univers à cette époque de son existence était suffisamment élevée pour induire des vitesses qui pourrait justifier de la taille actuelle de l'univers, c'est le ce que appelle le problème de l'horizon dans certaines théories de la cosmologie.

3 Déflexion de la lumière par le Soleil

La mécanique discrète est maintenant confrontée à un résultat expérimental qui a fait l'objet d'une des toutes premières vérifications de la théorie de la Relativité Générale, la déflexion de la Lumière par la gravitation. Il s'agit de l'expérience de Sir Eddington en 1919 [2] réalisée au cours d'une éclipse totale de Soleil. La déviation de la lumière d'une étoile par le Soleil mesurée a été de $1.7505''$ d'arc alors que la mécanique newtonienne n'en prévoyait que la moitié soit $4.25 \cdot 10^{-6} \text{ rd}$. Il s'agit ici d'une interaction faible entre une particule sans masse, le photon, et la gravité du soleil au voisinage duquel passe la Lumière. Le contexte n'est plus celui du début du siècle dernier, depuis la théorie de la Relativité Générale a été largement vérifiée sur des expériences d'interactions fortes, pulsars, ondes gravitationnelles etc. Il s'agit simplement de trancher sur l'éventuelle possibilité que l'équation du mouvement discrète (3) prenne en compte les effets relativistes.

3.1 En mécanique newtonienne

Considérons dans un premier temps le cas dit de la "mécanique newtonienne" souvent associée à une célérité des ondes infinie. En fait lorsque la célérité des ondes augmente la compréhension de la physique des phénomènes physiques reste délicate ; si l'on examine le terme $\nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V})$, l'augmentation de la célérité des ondes s'accompagne de la diminution de celle de la divergence de la vitesse et nécessite donc la diminution du temps d'observation dt . Supprimons cependant ce terme de l'équation du mouvement pour obtenir :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (7)$$

où $\mathcal{G} = 6.6738480 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante universelle de la gravitation, $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ la masse du Soleil et $R = 6.95 \cdot 10^8 \text{ m}$ son rayon moyen. On constate que la célérité de la Lumière, $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, n'est pas présente dans cette équation ce qui est naturel dans ce contexte simplifié. La quantité \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire dont la direction est définie entre le centre du soleil et la particule. La figure (2) montre le système géométrique et la définition des quantités utilisées. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne s'expriment par :

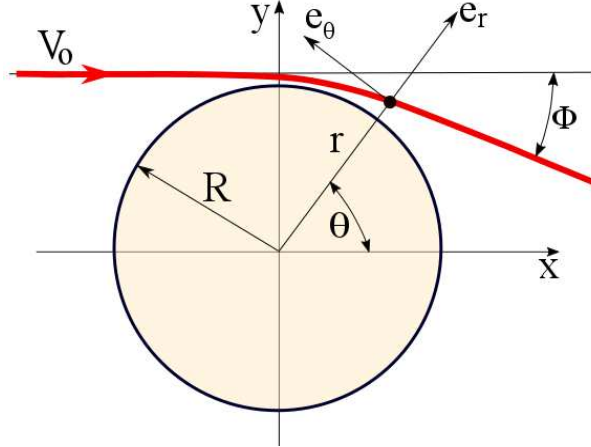


FIGURE 2. Déflexion de la lumière par le champ de gravité solaire

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (8)$$

où $\cos \theta = x/r$ et $\sin \theta = y/r$.

Le second membre de la relation (7), égal à \mathbf{g} la force par unité de masse exercée par le Soleil, dérive du potentiel gravitaire Φ :

$$\begin{cases} \mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{r^2} \mathbf{e}_r = \nabla \Phi \\ \Phi = \frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{r} \end{cases} \quad (9)$$

La projection de l'équation du mouvement pour $\mathbf{V} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y$ sur x et y donne :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\mathcal{G} M_\odot}{r^2} \cos \theta \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{\mathcal{G} M_\odot}{r^2} \sin \theta \end{cases} \quad (10)$$

La solution de ce système peut être directement recherchée en coordonnées polaires et, moyennant quelques petites approximations, elle peut être obtenue de manière analytique ; celle-ci est généralement reproduite dans des polycopiés de cours universitaires. La valeur de la déviation est égale à :

$$\Phi = \frac{2 \mathcal{G} M_\odot}{V_o^2 R} \quad (11)$$

La célérité c est bien entendu absente de ce résultat mais en supposant que la vitesse initiale V_o est égale à la célérité de la Lumière on trouve $\Phi = 4.250 \cdot 10^{-6} \text{ rd}$ soit $\Phi = 0.875''$ d'arc. La valeur mesurée par Eddington en 1919 [2] était de $\Phi = 1.705''$ d'arc soit précisément le double.

Le succès de la théorie de la Relativité a été dû principalement à la vérification de la prévision d'A. Einstein quelques années auparavant. Bien d'autres phénomènes ont pu être expliqués et vérifiés depuis, par exemple l'existence de trous noirs dans le cas d'étoiles massives de faible diamètre ; dans le cas du soleil le rayon de Schwarzschild R_s nécessaire pour capter la lumière serait de :

$$R_s = \frac{2 \mathcal{G} M_\odot}{c^2} \quad (12)$$

soit $R_s = 2.95 \text{ km}$.

Dans le cadre de cette étude la solution a été recherchée directement à partir du système (10) avec une condition initiale $V_o = c_0$. La résolution en temps a été réalisée à l'aide d'un schéma RK2 avec un pas de temps de $dt = 10^{-3}$ en vérifiant que la solution du problème soit indépendante du pas de temps choisi. Il faut environ $\Delta t = 10 \text{ s}$ pour franchir la zone d'influence du Soleil. Le calcul a été mené en quadruple précision avec les valeurs réelles, sans remise à l'échelle.

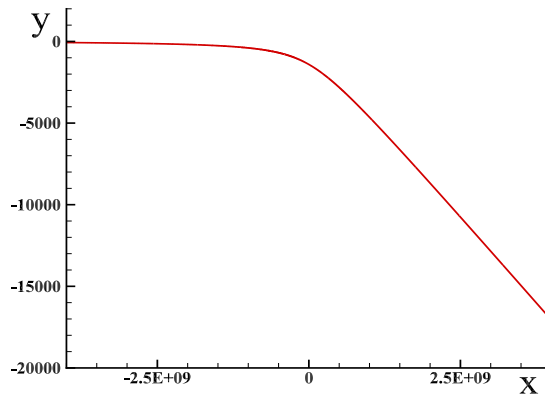


FIGURE 3. Déflexion de la lumière par le champ de gravité solaire, $y = y_0 - R$

La solution numérique trouvée est égale à $\Phi = \arctan(v/u)$ soit $\Phi = 4.249 \cdot 10^{-6} \text{ rd}$, c'est bien la valeur obtenue dans le cadre de la mécanique classique. La précision relative de ce calcul est estimée à $5 \cdot 10^{-4}$. Les grandeurs accessibles par la simulation sont les composantes de la vitesse u et v et la trajectoire d'une particule au voisinage du Soleil lors de son parcours. La figure (3)

montre celle-ci dans un système d'axe cartésien, ce sont des droites en amont et en aval du Soleil et quasiment une hyperbole à son voisinage immédiat. Comme on peut le constater la déviation est très faible et l'effet de lentille gravitationnelle est minime. Comme attendu la vitesse de la particule n'est pas égale à la célérité de la Lumière sur tout son parcours. L'action gravitationnelle agit au premier ordre sur la particule pour l'accélérer puis pour la décélérer pour $0 < \theta < \pi/2$. Contrairement à certaines expressions de Φ trouvées dans la littérature qui remplace V_o par c dans la relation (11), la célérité n'est pas en cause, elle n'apparaît à aucun moment pour le cas newtonien ; la mécanique newtonienne suppose en effet que celle-ci est infinie ; V_o est seulement la vitesse initiale du problème. Toute autre valeur que $V_o = c$ conduirait à une déviation différemment de la célérité de l'onde.

La figure (4) montre les évolutions des composantes de la vitesse, horizontale $u - c$ et verticale v , en fonction du temps. En l'absence du champ gravitationnel la vitesse u serait toujours égale à

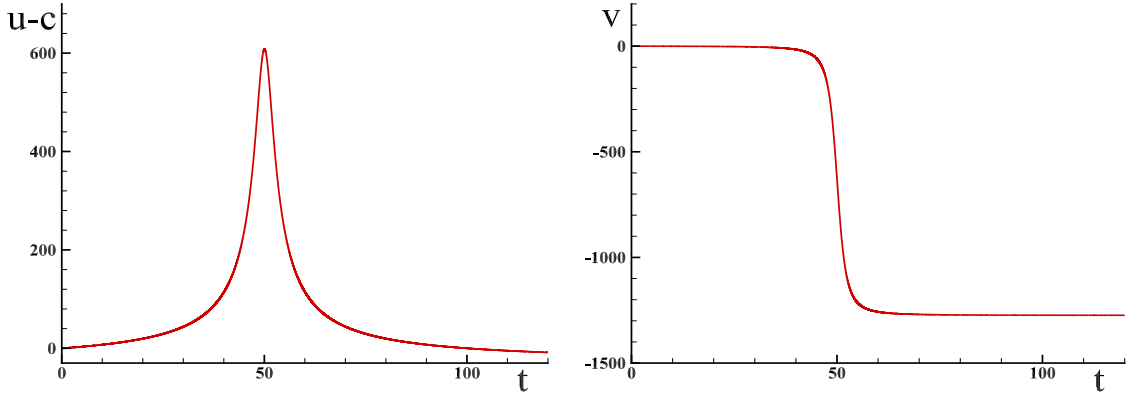


FIGURE 4. Déflexion de la lumière par le champ de gravité solaire, vitesses en fonction du temps : vitesse axiale $u - c$ à gauche et vitesse verticale à droite, la vitesse verticale minimale est égale à $v = -1274 \text{ m s}^{-1}$.

la vitesse initiale V_o . L'influence du champ de gravité se traduit par une augmentation de la vitesse \mathbf{V} puis par sa diminution lorsque la particule quitte le champ d'attraction solaire. Le mouvement n'est bien sûr pas symétrique et la vitesse axiale en aval est plus faible. Il convient de prendre quelques précautions avec la notion de vitesse, il en existe de multiples définitions ; il s'agit ici de la vitesse au sens de la mécanique discrète qui voit cette quantité comme une variable secondaire. Il faut rappeler que l'équation du mouvement filtre les mouvements uniformes de translation et de rotation.

3.2 En mécanique discrète

La solution du problème de l'attraction gravitationnelle due au Soleil étant retrouvée précisément par l'intégration directe de l'équation du mouvement dans un cadre newtonien il est maintenant possible d'envisager son éventuelle extension à la mécanique relativiste. L'objectif est de savoir si l'équation de la mécanique discrète conduit à la valeur de la déflexion observée expérimentalement et vérifiée par la théorie de la Relativité Générale.

Pour cela reprenons le système (3) et supprimons pour commencer tous les termes en $\nabla \times \mathbf{V}$ qui n'ont pas de sens en une dimension d'espace. De plus le potentiel scalaire ϕ^o n'est pas accumulé dans le vide. Il vient ainsi :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \Phi_g \quad (13)$$

avec $\Phi_g = \mathcal{G} M_\odot / r$. La dérivée particulière contient le terme en $|\mathbf{V}^2|/2$ mais comme une intégration lagrangienne est envisagée celle-ci restera sous cette forme. Le relèvement du potentiel scalaire s'avère donc inutile.

Cette équation contient explicitement la célérité en plus de la vitesse \mathbf{V} . Ce sont deux quantités indépendantes qui représentent pour la première la propagation de l'onde et pour la seconde le mouvement de la particule, le photon.

Alors que le système possède d'excellentes propriétés de robustesse pour sa résolution dans des cas classiques, l'intégration en espace et en temps de cette équation s'avère particulièrement difficile tout comme celle de la vitesse curviligne (6) d'ailleurs dans le contexte de la déflexion gravitationnelle. Cette difficulté va être contournée car la solution obtenue dans le cadre newtonien nous permet de calculer la variation spatio-temporelle de la quantité $\nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V})$. La solution sur \mathbf{V} permet de calculer la divergence sur l'abscisse curviligne ds et le terme complet en maintenant dt et $c = c_0$ constants.

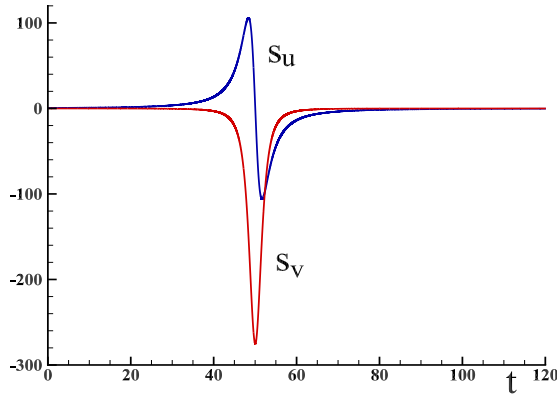


FIGURE 5. Déflexion de la lumière par le champ de gravité solaire ; s_u et s_v représentent les composantes en u et v du terme $\nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V})$ de l'équation du mouvement.

La simulation permet de calculer la vitesse par intégration en temps du terme gravitationnel et d'en déduire simultanément la divergence de celle-ci et les composantes $s_u = \nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_x$ et $s_v = \nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_y$. Le résultat est net, les deux termes du membre de droite de l'équation du mouvement (13) sont égaux :

$$\nabla (dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \left(\frac{\mathcal{G} M_\odot}{r} \right) \quad (14)$$

La précision numérique sur la différence est de l'ordre de 10^{-5} en relatif tout au long du calcul. Ce facteur 2 entre l'approche newtonienne et la mécanique discrète ou la dynamique relativiste n'est bien entendu pas fortuit. La force gravitationnelle crée une perturbation de faible amplitude qui donne naissance à une action proportionnelle ; compte tenu de l'absence d'accumulation de l'énergie cette proportionnalité est une égalité locale et instantanée. La célérité de la Lumière est certes très élevée mais la propagation à vitesse finie permet une certaine "compressibilité" du mouvement.

L'égalité des gradients (14) peut être traduite en égalité des potentiels scalaires et comparée à l'expression du rayon de Schwarzschild R_s . On trouve alors que le paramètre sans dimension $dt \nabla \cdot \mathbf{V} = 1/2$. Pour $dt \nabla \cdot \mathbf{V} < 1/2$ la Lumière est simplement déviée alors que pour des valeurs supérieures à $1/2$ celle-ci est captée par le trou noir. Si une particule restait indéfiniment sur le bord du trou noir, une situation instable, la courbure de sa trajectoire serait égale à $\kappa = 1/R_s$. En dynamique des fluides la pression au col d'une tuyère convergente-divergente est égale à $p_c = 1/2 p_i$, la pression génératrice lorsque l'écoulement est en régime supersonique en aval du

col. Le théorème d'Hugoniot prévoit que l'écoulement subsonique ne peut devenir supersonique que si la section présente un minimum. Dans une approche lagrangienne la vitesse d'une particule fluide est étroitement associée à la section de la tuyère et le terme $dt \nabla \cdot \mathbf{V}$ traduit la courbure de l'espace-temps. La comparaison ne sera pas poursuivie mais il existe des liens entre des aspects différents d'une même mécanique.

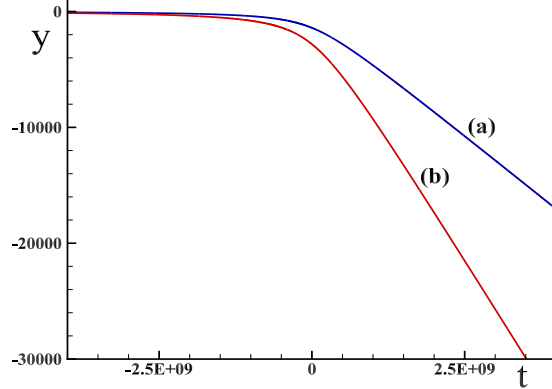


FIGURE 6. *Déflexion de la lumière par le champ de gravité solaire, (a) en mécanique newtonienne, (b) en mécanique discrète.*

Les trajectoires obtenues dans l'hypothèse newtonienne et celle de la mécanique des milieux discrets sont montrées sur la figure (6). La valeur de la déviation obtenue par simulation dans ce dernier cas, $\Phi = 8.498 \cdot 10^{-6} \text{ rd}$ soit $1.751''$ d'arc avec une précision relative de $5 \cdot 10^{-4}$, est très proche de celle de l'expérience de A.S. Paddington et de la théorie de la Relativité.

3.3 Conclusions

L'équation du mouvement discrète (3) représente un bon nombre de phénomènes physiques courants, l'écoulement d'un liquide visqueux dans un tuyau, la compression de l'air dans une pompe à vélo, la propagation d'ondes de choc, les contraintes et déplacements dans un solide, etc. Elle représente déjà une alternative aux équations de Navier-Stokes pour les écoulements de fluides. De nombreuses vérifications théoriques et expérimentales étayent cette affirmation.

L'objectif de ce travail était de soumettre cette théorie à des observations hors des champs habituels de la mécanique classique. Le cas de la déflexion gravitationnelle de rayons lumineux par le Soleil, considéré comme très habituel en cosmologie, présente de nombreuses difficultés s'il est abordé par une approche spatio-temporelle.

La dualité entre ondes et particule s'exprime en mécanique des milieux discrets par la propagation des ondes à la célérité c et la vitesse du milieu \mathbf{V} . La nature des ondes n'est pas précisée, elle est simplement caractérisée par sa célérité. Les phénomènes physiques de la propagation des ondes acoustiques et de celle de la Lumière n'est pas la même mais ils sont abordés ici par une approche unifiée. La différence entre un solide et un fluide n'existe pas non plus, seuls les propriétés des milieux et le temps d'observation changent.

Pour les milieux denses aucune hypothèse ne peut être faite sur les limites des deux quantités indépendantes c et \mathbf{V} . En dynamique des gaz la célérité des ondes elle-même dépend du potentiel scalaire ϕ^o . La Lumière quant à elle se propage à une vitesse constante dans le vide mais se trouve limitée depuis la théorie de la Relativité Restreinte par le principe de causalité. En dynamique des fluides le rôle de la courbure de l'espace, comme probablement celui de l'espace-temps en cosmologie, est une quantité permettant à la matière de se déplacer plus rapidement que la

célérité locale.

C'est dans ce contexte, sans hypothèse restrictive *a priori*, que l'équation du mouvement discrète a été soumise au test de la déflexion gravitationnelle de la Lumière. La simulation a permis de retrouver le résultat expérimental et celui de la prévision antérieure par la théorie de la Relativité Générale. Le terme traduisant la courbure de l'espace et du temps dans cette équation est exactement égal à celui qui génère cette accélération gravitationnelle. Ce facteur deux non expliqué à l'origine se retrouve aussi dans la prédiction du décalage de la lumière vers le rouge due à l'action de la gravité. En fait on peut exprimer ce résultat en remarquant que c'est la matière qui engendre la gravitation, c'est donc elle qui impose à l'espace-temps de se courber, et en retour, ce dernier doit dire à la matière comment se déplacer. L'approche proposée ici sera confrontée à d'autres épreuves et étendue à d'autres domaines de la physique.

Références

- [1] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [2] F.W. Dyson, A.S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29,1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 220 :291–333, 1920.
- [3] A. Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood, Chur, Switzerland, 1990.
- [4] I. Newton. *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle traduit en français moderne d'après l'oeuvre de la marquise Du Châtelet sur les Principia*. fac-similé de l'édition de 1759 publié aux Editions Jacques Gabay en 1990, Paris, 1990.
- [5] C.M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Space Sci. Rev.*, 148 :3–13, 2009.