HAL
open science

Estimation de la courbe d'actualisation par krigeage sous contraintes

Areski Cousin, Hassan Maatouk, Didier Rullière

To cite this version:

Areski Cousin, Hassan Maatouk, Didier Rullière. Estimation de la courbe d'actualisation par krigeage sous contraintes. 2016. hal-01422365

HAL Id: hal-01422365

https://hal.science/hal-01422365v1

Preprint submitted on 25 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation de la courbe d'actualisation par krigeage sous contraintes

Areski Cousin[†] , Hassan Maatouk[‡] et Didier Rullière[†]
(†) Université de Lyon, Université Lyon 1, ISFA, LSAF, 50 avenue Tony Garnier, 69366 Lyon, France
(‡) Mines de Saint-Etienne, 158 Cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne, France
hassan.maatouk@mines-stetienne.fr

Résumé - *La construction de structures par terme est au coeur de l'évaluation financière et de la gestion du risque voir e.g. [1], [2], [3], [4] et [5]. Une structure par terme est une courbe qui d'écrit l'évolution d'une grandeur économique ou financière comme une fonction de la maturité ou horizon de temps. Des exemples typiques sont la structure par terme des taux d'intérêt sans risque, la structure par terme d'obligations, la structure par terme de probabilités de défaut et la structure par terme de volatilités implicites de rendements d'actifs financiers. En pratique, les cotations des marchés des produits financiers sous-jacents sont utilisées et fournissent une information partielle sur les structures par terme considérées. De plus, cette information est plus au moins fiable en fonction de la liquidité de la maturité des marchés en question. Le problème est d'obtenir une courbe continue en la maturité à partir de ces informations.*

Mots clés - facteur d'actualisation, probabilités de défaut, krigeage, contraintes de monotonie

1 Interpolation sous contraintes linéaires

Dans cet article, on considère le cas où la vraie fonction f vérifie des contraintes linéaires de type égalité de la forme suivante :

$$A \cdot f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}, \qquad f(\boldsymbol{X}) = \left(f\left(x^{(1)}\right), \ldots, f\left(x^{(n)}\right)\right)^\top, \tag{1}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n,\ m, n \geq 1$ et où $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ (A est supposée de rang m). Ce type de contraintes généralise les contraintes d'interpolation étudiées jusqu'ici. Dans le cadre de la Régression par Processus Gaussien, on considère Y un PG de moyenne μ et de fonction de covariance K. La loi conditionnelle de Y sachant (1) est :

$$Y(\boldsymbol{x}) \mid A \cdot Y(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b} \ \sim \ \mathcal{N}(\eta(\boldsymbol{x}), \tau^2(\boldsymbol{x})),$$

où

$$\begin{cases} \eta(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}))^\top \left(A\mathbb{K}A^\top\right)^{-1} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{\mu}) \\ \tau^2(\boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}))^\top \left(A\mathbb{K}A^\top\right)^{-1} A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

areski.cousin@univ-lyon1.fr
hassan.maatouk@mines-stetienne.fr
didier.rulliere@univ-lyon1.fr

avec $\boldsymbol{\mu} = \mu(\boldsymbol{X}) = \left(\mu\left(x^{(1)}\right), \ldots, \mu\left(x^{(n)}\right)\right)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ le vecteur de covariance entre $Y(\boldsymbol{x})$ et $Y(\boldsymbol{X})$ et $\mathbb{K}$ la matrice de covariance de $Y(\boldsymbol{X})$. Notons que dans le cas où A est une matrice identité, les contraintes linéaires sont des conditions d'interpolation usuelle.

2 Modèle d'interpolation monotone

Dans l'application envisagée dans cet article, la vraie fonction est une courbe d'actualisation ou une probabilité de défaut. Comme fonction de la maturité (T), elle est *a priori* décroissante, de valeur égale à 1 en $T = 0$ et tend vers 0 avec T.

Dans cette section, la variable x est supposée dans $[0, 1]$ et le PG Y centré ($\mu = 0$). On utilise l'approximation suivante (cf. [7]) :

$$Y^N(x) = Y(0) + \sum_{j=0}^{N} Y'(u_j)\phi_j(x) = \eta + \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(x), \tag{2}$$

où $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \xi_0, \ldots, \xi_N)^\top \in \mathbb{R}^{N+2}$ est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Γ^N et où $(\phi_j)_{0 \le j \le N}$ sont déterministes :

$$\phi_j(x) = \int_0^x h_j(u)du, \qquad x \in [0, 1],$$

où $h_j(x) = h\left(\frac{x-u_j}{\delta}\right) := \left(1 - \frac{|x-u_j|}{\delta}\right) \mathbb{1}_{\frac{|x-u_j|}{\delta} \le 1}$ est la fonction chapeau centrée sur le $j^{\text{ème}}$ noeud $u_j := j\delta,\ j = 0, \ldots, N$, de la subdivision uniforme de pas $\delta = 1/N$. Dans ce cas, la monotonie décroissante du processus gaussien Y^N est *équivalente* à la négativité de tous les coefficients $\xi_j,\ j = 0, \ldots, N$. De plus, la matrice de covariance Γ^N du vecteur gaussien $\boldsymbol{\xi}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma^N = \begin{bmatrix} K(0,0) & \frac{\partial K}{\partial x'}(0, u_j) \\ \\ \frac{\partial K}{\partial x}(u_i, 0) & \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial x'}(u_i, u_j) \end{bmatrix}_{0 \le i,j \le N},$$

où $K = \sigma^2 C_\theta$ est la fonction de covariance du processus initial Y, avec σ un paramètre d'échelle, C_θ la fonction de corrélation où θ un paramètre de portée.

2.1 Simulation des trajectoires

En appliquant les conditions linéaires définies dans (1) au modèle proposé $Y^N(x)$ (voir (2)), on obtient :

$$A \cdot Y^N(\boldsymbol{X}) = A \cdot \left(\eta + \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(\boldsymbol{X})\right) = (A \cdot H) \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

où la matrice H de taille $m \times (N + 2)$ est définie par :

$$H_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 1, \\ \phi_{j-2}\left(x^{(i)}\right) & \text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 2, \ldots, N + 2. \end{cases}$$

La simulation du processus gaussien conditionnel sous contraintes de monotonie (décroissante) équivaut à simuler un vecteur gaussien $\boldsymbol{\xi}$ tronqué à l'espace correspondant aux conditions linéaires de type égalité et aux contraintes de monotonie suivantes :

$$\begin{cases} (A \cdot H) \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b} & \text{conditions linéaires de type égalité} \\ \boldsymbol{\xi} \in C_\xi & \text{contraintes de monotonie} \end{cases}$$

où $C_\xi = \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{N+2} \ : \ \xi_j \leq 0, \ j = 0, \ldots, N\right\}$. Dans ce cas, plusieurs algorithmes peuvent être utilisés voir e.g. [6] et [9].

2.2 Courbe la plus probable

En utilisant le modèle défini dans (2), l'estimateur (MAP) est égal à :

$$M_K(x \mid A, \boldsymbol{b}) = \nu + \sum_{j=0}^{N} \nu_j \phi_j(x), \tag{4}$$

où $\boldsymbol{\nu} = (\nu, \nu_0, \ldots, \nu_N)^\top \in \mathbb{R}^{N+2}$ est la solution du problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\boldsymbol{\nu} = \arg \min_{c \in I_\xi \cap C_\xi} \left(\frac{1}{2} c^\top \left(\Gamma^N\right)^{-1} c \right),$$

avec Γ^N la matrice de covariance du vecteur gaussien $\boldsymbol{\xi}$. Le vecteur $\boldsymbol{\nu}$ est vu comme le mode du vecteur gaussien $\boldsymbol{\xi}$ tronqué à $I_\xi \cap C_\xi$, où I_ξ représente les conditions linéaires de type égalité $(A \cdot H) \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}$.

L'avantage d'un tel estimateur est de vérifier à la fois les conditions linéaires de type égalité définies dans (3) et la monotonie (décroissante). De plus, il ne dépend pas du paramètre de variance. Pour $N = +\infty$, c'est aussi la fonction spline d'interpolation sous contraintes défini par :

$$h_{opt} = \arg \min_{h \in H \cap C \cap I} \|h\|_H^2,$$

où H est le Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) associé au noyau de covariance K, C est l'espace des fonctions décroissantes et $I = \{f \ : \ A \cdot f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}\}$.

3 Étude empirique (Euribor data)

Le modèle proposé a été appliqué à des données réelles.

Les données. La fonction à estimer est définie sur l'intervalle $[0, 40]$ de maturités exprimées en années. Elle démarre de 1 et décroît vers zéro à l'infini. En notant $\boldsymbol{X} = (1, \ldots, 40)^\top$ (de taille 40), les conditions linéaires de type égalité sont définies par une matrice réelle A de taille 14×40 :

$$A \cdot Y^N(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{b} = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{14}$. Dans ce cas, on a $m = 14$ et $n = 40$. En tenant compte du fait que le taux d'actualisation démarre de 1, l'ensemble des contraintes linéaires de type égalité est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi_0(0) & \dots & \phi_N(0) \\ & & A \cdot H & \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dans ce cas, la simulation du processus gaussien Y^N conditionnellement à (6) et à la contrainte de monotonie (décroissante) est *équivalente* à simuler le vecteur gaussien $\boldsymbol{\xi}$ tronqué au sous-espace convexe $I_\xi \cap C_\xi$ où I_ξ est donnée par l'équation (6) et $C_\xi := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{N+2} \ : \ \xi_j \leq 0, \ j = 0, \dots, N \right\}$.

Simulations. On considère les données Euribor au 02/06/2010.

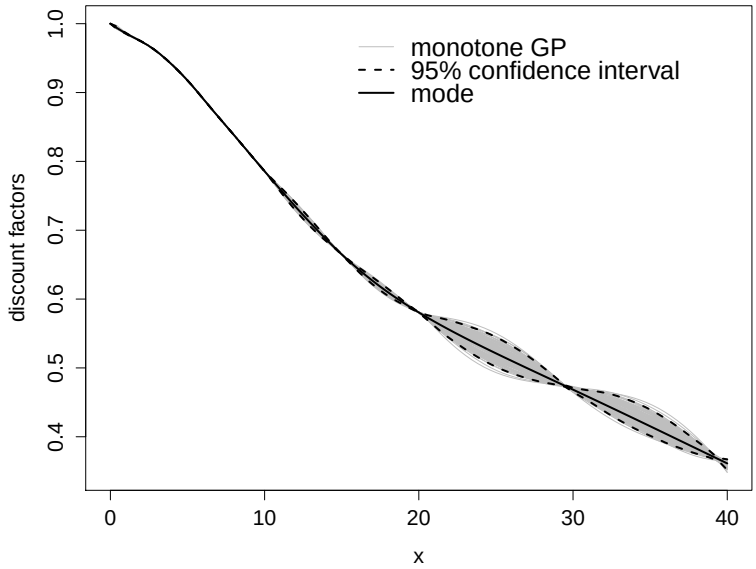

FIGURE 1 – Simulations d'un processus gaussien (trajectoires grises) conditionnellement décroissant en utilisant le noyau Matérn 3/2 avec les paramètres $(\hat{\sigma}^2, \hat{\theta}) = (0.8, 47.9)$ qui sont estimés par un technique de Validation Croisée adaptée aux contraintes inégalité voir [8].

Sur la Figure 1, on choisit $N = 60$ et en simulant le processus gaussien Y^N conditionnellement monotone (décroissante). Remarquons que les trajectoires simulées (courbes en gris) sont décroissantes sur le domaine tout entier. La courbe noire représente le mode du processus gaussien conditionnel qui respecte à la fois la contrainte de monotonie décroissante et les contraintes linéaires de type égalité (3). Les courbes en tirets noirs représentent un intervalle de confiance à 95% calculé par simulation.

4 Conclusions

Dans cet article, une courbe d'actualisation est estimé en utilisant la Régression par Processus Gaussien sous contraintes. Comme nous avons pu le voir, l'adaptation de la méthode au cas de contraintes linéaires de type égalité quelconque ne pose pas de difficulté. Pour

étudier le modèle proposé, un exemple numérique en dimension 1 est inclus. Le résultat numérique montre que les simulations du processus gaussien conditionnel respectent à la fois les contraintes linéaires de type égalité et la monotonie décroissante par rapport à la maturité.

Références

[1] Areski Cousin, Hassan Maatouk, and Didier Rullière. Kriging of financial term-structures. September 2015.

[2] C. P. Fries. Curves and term structure models : Definition, calibration and application of rate curves and term structure models. DZ Bank AG ; LMU Munich, Department of Mathematics, 2013.

[3] Y. Iwashita. Piecewise polynomial interpolations. Open Gamma Technical Report, 2013.

[4] C. Kenyon and R. Stamm. *Discounting, Libor, CVA and Funding : Interest Rate and Credit Pricing.* Palgrave Macmillan, 2012.

[5] F. Le Floc'h. Stable interpolation for the yield curve. Calypso Technology, 2013.

[6] H. Maatouk and X. Bay. A New Rejection Sampling Method for Truncated Multivariate Gaussian Random Variables Restricted to Convex Sets. https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063978, September 2014.

[7] H. Maatouk and X. Bay. Gaussian Process Emulators for Computer Experiments with Inequality Constraints. hal-01096751, December 2014.

[8] H. Maatouk, O. Roustant, and Y. Richet. Cross-Validation Estimations of Hyper-Parameters of Gaussian Processes with Inequality Constraints. *Procedia Environmental Sciences*, 27 :38 – 44, 2015. Spatial Statistics conference 2015.

[9] C. P. Robert. Simulation of truncated normal variables. *Statistics and Computing*, 5(2), 1995.