



**HAL**  
open science

## Interaction fluide structure et décompositions de domaines mixtes et multiéchelles

Etienne Vergnault, Olivier Allix, Serge Maison-Le-Poëc

► **To cite this version:**

Etienne Vergnault, Olivier Allix, Serge Maison-Le-Poëc. Interaction fluide structure et décompositions de domaines mixtes et multiéchelles. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01422255

**HAL Id: hal-01422255**

**<https://hal.science/hal-01422255v1>**

Submitted on 24 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Interaction fluide structure et décompositions de domaines mixtes et multiéchelles

E. Vergnault<sup>1,2</sup>, O. Allix<sup>1</sup> et S. Maison-Le-Poëc<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6/PRES UniverSud Paris)  
61 av. du Président Wilson, F-94230 Cachan, France  
{vergnault,allix}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Innovation Works  
12 rue Pasteur BP 76 92152 SURESNES  
serge.maison-le-poec@eads.net

---

**Résumé** — Ce travail s’inscrit dans la thématique de la prédiction de la rupture pour les structures complexes au moyen de modèles matériaux fins. Dans le but de traiter des problèmes où le chargement est induit par un fluide, une extension de la méthode de décomposition de domaine mixte et multi-échelle utilisée pour le solide est en cours de développement. Dans un premier temps, seul un problème fluide est considéré. Après décomposition du domaine, une séparation d’échelles sur un problème macroscopique permet d’accélérer la convergence de la stratégie itérative de résolution.

**Mots clés** — Interaction fluide-structure, Décomposition de domaine, Séparation d’échelles.

---

## 1 Méthode de décomposition de domaine pour la partie fluide

### 1.1 Hypothèses et problème monolithique

On s’intéresse aux écoulements incompressibles de fluides visqueux, occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (ici fixe), dont la frontière est notée  $\partial\Omega$ . Le fluide est soumis à des forces volumiques  $\rho \underline{b}$ , et des conditions aux limites en vitesse  $\underline{v}_d$  sur  $\partial_v \Omega$  et en effort  $\rho \underline{f}$  sur la partie complémentaire  $\partial_f \Omega = \partial\Omega \setminus \partial_v \Omega$ . Le problème est formulé de manière mixte en vitesse et pression, et l’écoulement est régi par les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement, auxquelles on ajoute la relation de comportement d’un fluide newtonien. Sa formulation faible aboutit au problème (1).

Trouver  $\underline{v}, p$  tels que :

$$B(\underline{w}, q, \underline{v}, p) = (\underline{b}, \underline{w})_{\Omega} + (\underline{f}, \underline{w})_{\partial\Omega} \quad \forall \underline{w}, q \quad (1)$$

$$\text{avec } B(\underline{w}, q, \underline{v}, p) = (\underline{w}, \underline{v} \nabla \underline{v})_{\Omega} + (\underline{v} \nabla \underline{v}, \nabla \underline{w})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \underline{w})_{\Omega} - (q, \nabla \cdot \underline{v})_{\Omega}$$

Dans l’équation (1),  $p$  est la pression divisée par la masse volumique  $\rho$

### 1.1.1 Discrétisation par Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis, appliquée à la formulation ci-dessus conduit à deux sources potentielles d'instabilités. L'approximation du terme de convection ( $v\nabla v$ ) impose d'employer une technique de stabilisation, ici SUPG [1]. La formulation mixte impose certains choix d'éléments pour représenter les champs de vitesse et de pression, ici les éléments sont des triangles, le champ de vitesse est quadratique et le champ de pression linéaire, ce qui est un élément de Taylor-Hood, qui est connu pour être stable [2].

### 1.2 Partition du domaine

Le domaine  $\Omega$  est séparé *a priori* en sous-domaines  $\Omega_E, E \in \mathcal{E}$  et interfaces  $\Gamma_I, I \in I$  (Figure 1). Chaque sous-domaine  $\Omega_E$  est soumis à l'action de son environnement par l'intermédiaire de sa frontière  $\partial\Omega_E$  sur laquelle existent une distribution de force  $\underline{F}_E$  et de vitesse  $\underline{W}_E$ . L'interface  $\Gamma_{EE'}$  entre  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  possède une relation de comportement liant  $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$  et  $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$ . Les champs de vitesse et de pression sur la sous-structure  $\Omega_E$  sont notés  $v_E$  et  $p_E$  respectivement.

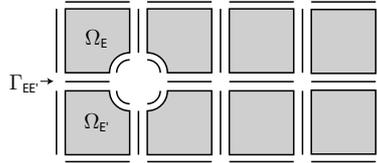


Figure 1 – Décomposition du domaine

### 1.3 Stratégie itérative de résolution

- La partition du domaine amène à séparer l'ensemble des équations en deux groupes :
- les équations de Navier-Stokes sur chaque sous-domaine
  - les relations de comportement sur les interfaces

La solution du problème initial est bien entendu atteinte à l'intersection des deux espaces définis par les groupes d'équations ci-dessus. Ceci conduit à résoudre le problème de manière itérative, en construisant à chaque itération une solution approchée de chaque groupe d'équations. Ainsi, une itération de la méthode se compose d'une étape pour résoudre le problème des équations de la mécanique des fluides sur chaque sous-domaine et d'une étape construisant des distributions de vitesse et d'effort compatibles avec le comportement des interfaces. Ces deux solutions sont reliées par des directions de recherche, qui permettent d'obtenir un problème bien posé à chaque étape (Figure 2).

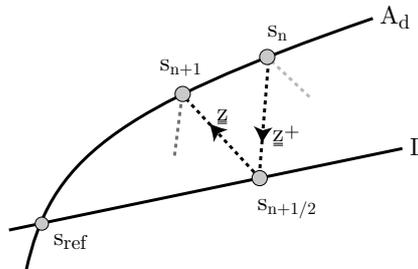


Figure 2 – Stratégie itérative de résolution

### 1.3.1 Critère de convergence

Le processus itératif est arrêté lorsque la qualité de la solution est estimée suffisante, au moyen d'un indicateur  $\eta_{CR}$  mesurant les discontinuités sur les interfaces :

$$\eta_{\underline{W}}^2 = \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\|\underline{W} - \underline{W}'\|^2}{\|\underline{W} + \underline{W}'\|^2} \quad \eta_{\underline{F}}^2 = \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\|\underline{F} + \underline{F}'\|^2}{\|\underline{F} - \underline{F}'\|^2}$$

$$\eta_{CR} = \sqrt{(\eta_{\underline{W}}^2 + \eta_{\underline{F}}^2)}$$

### 1.3.2 Étape sur les sous-domaines

En partant d'une solution  $(\widehat{W}, \widehat{F})$  sur les interfaces, on cherche une solution  $(\underline{v}_E, p_E, \underline{W}_E, \underline{F}_E)$  sur chacun des sous-domaines, vérifiant :

- les équations de Navier-Stokes sur chaque sous-domaine
- les directions de recherche

Sur le bord de  $\Omega_E$ , les directions recherche s'écrivent :

$$(\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + \underline{z}(\underline{W}_E - \widehat{W}_E) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_E$$

Soient donc à résoudre  $dim(\mathcal{E})$  problèmes indépendants par sous-domaine, avec des conditions aux limites mixtes. La non-linéarité due au terme de convection dans les équations de Navier-Stokes est traitée par un algorithme de Newton-Raphson.

### 1.3.3 Étape sur les interfaces

Les interfaces relient les sous-domaines entre eux, ou avec l'extérieur, par l'intermédiaire de distributions mixtes d'efforts et de vitesse. Chaque interface interne possède deux côtés, que l'on distingue en notant les quantités qu'ils portent  $\square$  et  $\square'$ . Les interfaces appartenant à la frontière du domaine n'ont qu'un seul coté. À l'étape sur les interfaces, les inconnues sont repérées par un chapeau ( $\widehat{\square}$ ).

**Relations de comportement pour les interfaces** Les relations de comportement traduisent l'équilibre des efforts et la continuité des vitesses sur les interfaces. Elles assurent que la solution du problème décomposé est la solution du problème initial. Elles permettent également de prendre en compte les interfaces de conditions aux limites. Pour une interface parfaite :

$$\widehat{F} + \widehat{F}' = \underline{0} \text{ et } \widehat{W} = \widehat{W}'$$

**Directions de recherche** Ce sont des paramètres de la méthode, elles relient les quantités obtenues à l'issue des étapes sur les sous-domaines et sur les interfaces :

$$\widehat{F} - \underline{F} - \underline{z}(\widehat{W} - \underline{W}) = 0$$

Ce sont des opérateurs agissant sur les champs d'interface, mais ne couplant pas leurs composantes normales et tangentielles. Pour une interface de normale  $\underline{n}$ , ils peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

$$z = z_n \underline{n} \otimes \underline{n} + z_t (\mathbb{I}_d - \underline{n} \otimes \underline{n})$$

Ici, deux scalaires ( $z_n$  et  $z_t$ ) permettent de distinguer une impédance normale et tangente à l'interface.

### 1.3.4 Exemple : écoulement de Couette plan

Soit l'écoulement (incompressible et stationnaire) d'un fluide visqueux entre deux plans parallèles distants d'une longueur  $H$ , sur une longueur  $L = n \times l$ , décomposé en  $n$  sous-domaines de dimension  $n \times H$ . Une vitesse parabolique est imposée en entrée, et la sortie est laissée libre. La convergence de la stratégie de résolution décrite ci-dessus dépend du nombre de sous-domaines utilisés, comme le montre la figure 3.

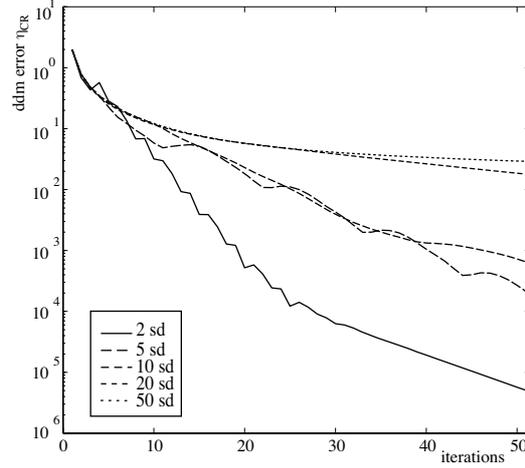


Figure 3 – Indicateur d'erreur en fonction des itérations sans problème macro

### 1.3.5 Introduction d'un problème macroscopique

La recherche d'extensibilité numérique (convergence indépendante du nombre de sous-domaines) pour la méthode de décomposition de domaine motive l'introduction d'un problème supplémentaire, permettant une communication entre l'ensemble des sous-domaines à chaque itération.

L'hypothèse d'écoulement incompressible impose, au niveau local :

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{M} \in V$$

Tout champ à divergence nulle à l'intérieur d'un volume quelconque  $V$  possède un flux nul sur le bord  $\partial V$  de ce même volume. Ainsi, imposer aux quantités  $\widehat{\underline{W}}$  de respecter la condition d'incompressibilité, exprimée sur la frontière de chaque sous-domaine permet de construire un problème macroscopique posé sur l'ensemble des interfaces :

$$\int_{\partial\Omega_E} \widehat{\underline{W}} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E} \quad (2)$$

**Séparation d'échelles** Les échelles micro et macro sont définies par :

$$\begin{aligned} \underline{\square}^M &= \underline{\square}^M \underline{n} = \frac{1}{mes(\Gamma)} \int_{\Gamma} \underline{\square} \cdot \underline{n} \, dS \underline{n} \\ \underline{\square} &= \underline{\square}^M \underline{n} + \underline{\square}^m \end{aligned}$$

Le problème macro (2) ne concerne que la partie macro des quantités d'interface, la séparation d'échelle permet de condenser le problème sur une seule inconnue par champ. Le gain par rapport à la résolution du même problème sans séparation d'échelle est d'un facteur égal au nombre de nœuds de l'interface, soit environ  $L_{\Gamma}/h$ .

Les équations de direction de recherche peuvent s'écrire, en partie macro :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_E} (z_n^{-1}(\widehat{F}^M - F^M) - (\widehat{W}^M - W^M)) \widehat{F}^{M*} = 0 \quad \forall \widehat{F}^{M*}$$

Le problème macro ajoute la contrainte :

$$\int_{\partial\Omega_E} \widehat{W} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

En introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\mu_E$  sur chaque sous domaine, on obtient : Trouver  $\widehat{F}^M, \widehat{W}^M, \mu_E$  admissibles tels que :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_E} (z_n^{-1}(\widehat{F}^M - F^M) - (\widehat{W}^M - W^M)) \underline{n}_0 \cdot \widehat{F}^{M*} \underline{n}_0 + \mu_E \underline{n} \cdot \widehat{F}^{M*} \underline{n}_0 = 0 \quad \forall \widehat{F}^{M*}$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_E} \mu_E^* \underline{n}_0 \cdot \widehat{W}^M \underline{n} = 0 \quad \forall \mu_E$$

#### 1.4 Résultats d'extensibilité

La résolution du problème de l'écoulement de Couette plan avec problème macroscopique montre le gain par rapport à la méthode de décomposition de domaine simple. La convergence du processus itératif de résolution ne dépend plus du nombre de sous-domaines utilisés dans le calcul, comme le montre la figure 4.

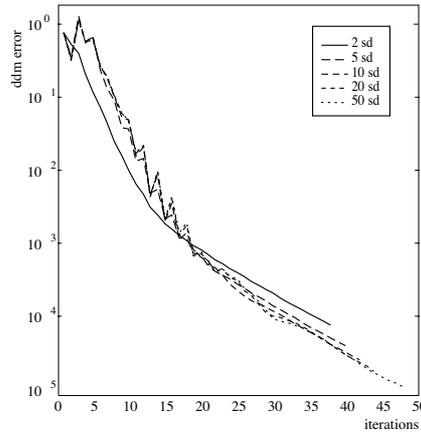


Figure 4 – Indicateur d'erreur en fonction des itérations, avec problème macro

La méthode est ensuite testée sur le problème suivant : un domaine carré est constitué de  $n \times n$  carrés de côté 0.1m, et on impose une vitesse sur les deux premières interfaces de la face gauche, ainsi qu'une pression nulle sur les deux dernières interfaces de la face de droite. Avec 25, 49 ou 100 sous-domaines la convergence est identique, comme le montre la figure 6. La figure 5 montre les champs de vitesse et de pression obtenus à différentes itérations dans la configuration 100 sous-domaines. Très rapidement, l'erreur n'est plus visible à l'oeil nu.

La méthode de décomposition de domaine présentée ici est utilisée pour résoudre la partie fluide des problèmes d'interaction fluide-structure traités, au sein d'une méthode de couplage type domaine fictif [5]. Faute de place, la partie couplage n'est pas détaillée ici.

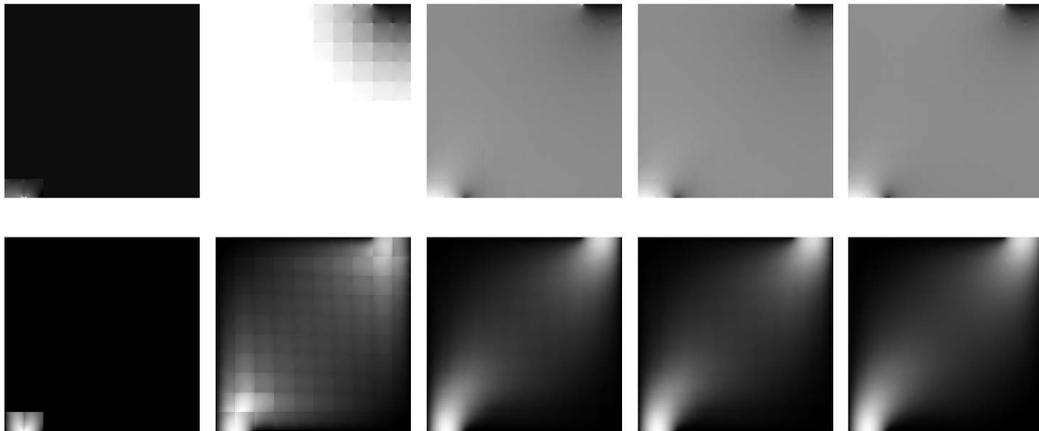


Figure 5 – Champs de pression et de vitesse pour  $10 \times 10$  sous-domaines aux itérations 1, 3, 5, 7 et 9

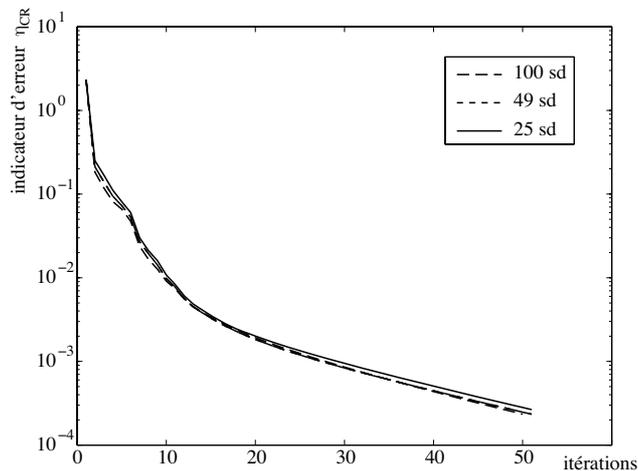


Figure 6 – Indicateur d'erreur en fonction des itérations

## Références

- [1] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, pages 199–259, 1990.
- [2] J. Donea, A. Huerta. *Finite Elements Methods for Flow Problems*, Wiley, 2003.
- [3] W.A. Wall, D.P. Mok, and E. Ramm. Partitioned analysis approach for the transient, coupled response of viscous fluids and flexible structures. In *ECCM'99—Proc. European conference on computational mechanics, Munich, Germany, August 31–September 3, 1999*.
- [4] M. Schäfer, S. Turek. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. *Flow Simulation with High-Performance Computation II*, 52 :547–566, 1996.
- [5] R. Glowinski, T. W. Pan, J. Periaux. A lagrange multiplier/fictitious domain method for the numerical simulation of incompressible viscous flow around moving rigid bodies : (i) case where the rigid body motions are known a priori. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 324 :361–369, 1997.