



**HAL**  
open science

# Reconstruction des déformations à partir de mesures de déplacement

Pierre Feissel, Stéphane Avril, Fabrice Pierron, Pierre Villon

► **To cite this version:**

Pierre Feissel, Stéphane Avril, Fabrice Pierron, Pierre Villon. Reconstruction des déformations à partir de mesures de déplacement : Estimateur d'erreur pour l'Approximation Diffuse. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01422241

**HAL Id: hal-01422241**

**<https://hal.science/hal-01422241>**

Submitted on 24 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Reconstruction des déformations à partir de mesures de déplacement

## Estimateur d'erreur pour l'Approximation Diffuse

P. Feissel<sup>1</sup>, S. Avril<sup>2</sup>, F. Pierron<sup>3</sup> et P. Villon<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Roberval de Mécanique, UTC,  
BP 20529 rue Personne de Roberval 60205 COMPIEGNE  
{ pierre.feissel, pierre.villon }@utc.fr

<sup>2</sup> CNRS UMR 5146, INSERM IFR 143, Ecole Nationale Supérieure des Mines  
158 cours Fauriel, 42023 SAINT-ETIENNE cedex 2  
avril@emse.fr

<sup>3</sup> Laboratoire de Mécanique et Procédés de Fabrication  
Arts et Métiers ParisTech BP 508 rue Saint Dominique 51006 CHÂLONS CH.  
Fabrice.Pierron@chalons.ensam.fr

---

**Résumé** — L'utilisation de l'Approximation Diffuse comme outil de filtrage des mesures de champs vise à contrôler le niveau des erreurs commises lors de la reconstruction. Ce papier étudie l'erreur liée au bruit de mesure, en étudiant l'effet du rayon d'influence des mesures sur le filtrage. Une approche de filtrage alternative basée sur un sous-échantillonnage des points de données impliqués dans la reconstruction est proposée et permet, par tirages répétés d'avoir une estimation de l'écart-type sur les quantités reconstruites sans *a priori* sur le niveau de bruit sur les mesures.

**Mots clés** — mesures de champs, filtrage, Approximation Diffuse, sous-échantillonnage.

---

## 1 Introduction

Le développement important des mesures de champs de déplacement ces dernières années, notamment grâce aux techniques s'appuyant sur les images en lumière blanche [2] offre de nombreuses perspectives en terme d'identification. L'information mécaniquement pertinente contenue dans ces mesures se situe au niveau des déformations, plus que du déplacement lui-même. Il est donc nécessaire, même implicitement, d'obtenir ces déformations à partir des mesures, ce qui demande d'en estimer numériquement le gradient. Cette opération est alors très sensible aux perturbations sur les mesures et cette difficulté doit être prise en compte.

Notre choix ici est d'effectuer cette dérivation comme une étape à part entière, pour ne dépendre ni de la technique permettant l'obtention des déplacements expérimentaux, ni de l'application qui pourra aussi bien être qualitative que quantitative. L'enjeu est de contrôler cette étape et ainsi de pouvoir quantifier les erreurs commises.

Dans [1], deux approches de reconstruction des déformations à partir des mesures de déplacement ont été comparées, l'une s'appuyant sur une formulation de moindres carrés globaux sur l'ensemble des données avec une base Éléments Finis (à supports locaux), l'autre s'appuyant sur l'Approximation Diffuse [4]. Les deux approches conservent une partie du traitement local, ce qui

leur donne des qualités de reconstruction similaires. Toutefois, l'approche s'appuyant sur l'Approximation Diffuse ne souffre pas de la dépendance de la reconstruction au maillage et s'avère plus souple tant pour le choix de la base fonctionnelle de reconstruction que pour le choix du paramètre gérant le filtrage du bruit. De plus, elle offre un cadre théorique agréable pour son étude et elle a donc été retenue ici.

Dans un premier temps, l'application de l'Approximation Diffuse au traitement des mesures de champs est rappelée, en mettant l'accent sur le rôle du rayon d'influence des mesures sur le filtrage du bruit. Puis, une alternative à cette première approche est proposée en s'appuyant sur les méthodes de sous-échantillonnage [5]. Cette modification de la méthode permet d'obtenir une estimation du niveau d'erreur liée au bruit sur les déformations reconstruites, sans *a priori* sur le bruit de mesure. L'approche est validée sur un exemple et une évolution de la stratégie de sous-échantillonnage est proposée pour permettre une réduction importante du coût de calcul.

## 2 L'Approximation Diffuse comme outil de filtrage

### 2.1 Cadre pour les mesures de champs

Lors d'un essai avec suivi par caméra, le traitement des images, par exemple par corrélation d'image [2], permet d'obtenir des mesures du déplacement sur une zone  $S$  de l'éprouvette. Les données sont donc connues sur une grille régulière de  $N$  points,  $M_i$  de coordonnées  $\underline{x}_i$  et rangées dans deux vecteurs :  $\{\tilde{U}\}$  et  $\{\tilde{V}\}$ , correspondant respectivement aux composantes longitudinale et transversale du déplacement. Du fait des perturbations de mesure, ces données s'écrivent encore :

$$\begin{cases} \{\tilde{U}\} = \{U_{ex}\} + \{\delta u\} \\ \{\tilde{V}\} = \{V_{ex}\} + \{\delta v\} \end{cases} \quad \text{où } \{U_{ex}\} \text{ et } \{V_{ex}\} \text{ sont les champs mécaniques exacts} \quad (1)$$

$\{\delta u\}$  et  $\{\delta v\}$  représentent les perturbations sur les mesures. En supposant les mesures comme indépendantes, il est raisonnable de modéliser ces perturbations par un bruit blanc Gaussien d'écart-type noté  $\sigma_b$ .

L'objectif de l'approche proposée est de reconstruire les champs de déplacement  $U(x,y)$  et  $V(x,y)$  et leurs gradients en tout point de  $S$  à partir de  $\{\tilde{U}\}$  et  $\{\tilde{V}\}$ , afin d'exploiter l'essai. Cette exploitation peut se faire au travers d'une approche inverse ou d'une description quantitative ou qualitative des déformations. La méthode sera testée dans ce papier sur des données synthétiques obtenues par Éléments Finis et perturbées par un bruit blanc Gaussien.

### 2.2 Principes de l'Approximation Diffuse

La méthode proposée s'appuie sur l'utilisation de moindres carrés locaux [3]. Ici, l'outil de régression locale utilisé est l'Approximation Diffuse [4]. Le paramètre régularisant est alors le rayon d'influence de chaque point de mesure,  $R$ . L'intérêt d'une telle approche est de fournir directement un champ de déplacements continu ainsi que ses dérivées au sens diffus.

Le champ reconstruit est cherché en tout point de  $S$ , comme solution du problème de minimisation :

$$\min_{a(\underline{x})} \frac{1}{2} \left( P\{a\} - \tilde{U} \right)^T W \left( P\{a\} - \tilde{U} \right) \quad \text{avec, } P = \begin{bmatrix} p(\underline{x}_1 - \underline{x}) \\ \dots \\ p(\underline{x}_N - \underline{x}) \end{bmatrix}_{i \in V(\underline{x})} \quad (2)$$

$p(\underline{x})$  est le vecteur ligne des monômes de la base d'approximation, qui n'est pas nécessairement polynômiale. Le choix ici est de prendre une base polynômiale de degré 2 (6 monômes en dimension 2). Ce choix s'est avéré, dans [1], être un bon compromis entre approximation mécanique et filtrage. Ainsi, les termes  $a_2(\underline{x})$  et  $a_3(\underline{x})$  représentent les dérivées premières au point  $\underline{x}$  au

sens diffus.  $V(\underline{x})$  représente l'ensemble des points de mesure pris en compte pour la reconstruction en  $\underline{x}$  et sa taille dépend directement de  $R$ . La matrice  $W$  est formée de la diagonale des fonctions poids  $w(\underline{x}, \underline{x}_i)$  et assure la continuité de la solution.

La méthode de reconstruction étant un processus linéaire (minimisation d'un critère quadratique menant à un système linéaire), les déformations reconstruites dépendent linéairement des mesures, au travers d'un opérateur noté  $M_\varepsilon$ . Les erreurs sur les champs reconstruits sont la somme de l'erreur d'approximation du champ exact  $\delta\varepsilon_k$  et de l'erreur liée au bruit sur les mesures  $\delta\varepsilon_b$ . Ceci s'exprime :

$$\delta\varepsilon_k(\underline{x}) = M_\varepsilon(\underline{x})\{U_{ex}\} - \varepsilon_{ex}(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \delta\varepsilon_b(\underline{x}) = M_\varepsilon(\underline{x})\{\delta u\} \quad (3)$$

Ceci permet d'étudier séparément les deux types d'erreur. Lorsque le rayon d'influence des mesures,  $R$ , augmente, l'erreur d'approximation augmente tandis que l'erreur liée au bruit diminue. Il y a donc un compromis à trouver. Dans les exemples traités dans [1], il est apparu que les rayons pouvaient être assez grands sans provoquer de grandes erreurs d'approximation. Ainsi, la reconstruction en un point pouvait faire appel à des zones de 1600 points de données ou plus, conduisant à une lourdeur numérique du traitement des mesures. Le premier objectif de la méthode proposée au 3 était de diminuer le nombre de points nécessaire à la reconstruction. Dans cette optique, nous regardons plus en détail, dans la suite, comment se comporte le filtrage, c'est-à-dire  $\delta\varepsilon_b$ , vis-à-vis du rayon  $R$ .

### 2.3 Effet du rayon d'influence sur le filtrage

L'erreur liée au bruit  $\delta\varepsilon_b$  est associée à la reconstruction de  $\delta u$ . En supposant ce dernier issu d'un bruit blanc Gaussien d'écart-type  $\sigma_b$  et vu que l'opérateur de reconstruction est linéaire, il est possible de décire  $\delta\varepsilon_b$  comme une variable Gaussienne dont on veut caractériser l'écart-type. Le vecteur  $\{\delta a\}$ , à partir duquel  $\delta\varepsilon_b$  est construit, a pour matrice de covariance :

$$cov(\{\delta a\}) = \langle \{\delta a\}\{\delta a\}^T \rangle = \langle M\{\delta u\}\{\delta u\}^T M^T \rangle = \sigma_b^2 M M^T \quad (4)$$

L'opérateur de reconstruction  $M$ , associé à la reconstruction du vecteur complet  $\{\delta a\}$ , dépend uniquement des coordonnées et poids des points de mesures situés dans le rayon d'influence du point de reconstruction et se calcule explicitement. De plus, l'opérateur  $M$  peut être séparé en un produit de deux termes tel que :

$$M = D_R^{-1} M_{adi} \quad (5)$$

où  $M_{adi}$  est l'opérateur adimensionné qui ne dépend que de la distribution spatiale relative des points de mesure, indépendamment de la valeur du pas d'espace de la grille de points. La matrice  $D_R$ , faisant intervenir le rayon  $R$ , permet de prendre en compte ce pas d'espace pour obtenir  $M$ .

Ainsi, la matrice de covariance de  $\{\delta a\}$  s'exprime :

$$cov(\{\delta a\}) = \sigma_b^2 D_R^{-1} \underbrace{M_{adi} M_{adi}^T}_A D_R^{-1} \quad (6)$$

On peut remarquer dans l'expression (6) qu'apparaissent de façon naturelle les deux paramètres qui gèrent le filtrage : la forme du motif de reconstruction, et en particulier le nombre de points qui y participent, au travers de la matrice  $A$ , et la taille physique du motif qui intervient au travers de la matrice  $D_R$ . Ainsi, l'erreur sur le champ est donnée par :

$$cov(a_1) = A_{11} \quad (7)$$

Tandis que l'erreur sur sa dérivée est donnée par :

$$cov(a_2) = \frac{1}{R^2} A_{22} \quad (8)$$

Ceci signifie que la taille physique de la fenêtre ne joue pas sur le champ de déplacement alors qu'elle joue un rôle important sur le filtrage des gradients donc des déformations. Globalement, la variance sur le déplacement décroît comme l'inverse du nombre de points de donnée utilisés, donc en  $\frac{1}{R^2}$ , tandis que la décroissance de la variance des gradients d'ordre 1 est en  $\frac{1}{R^4}$ . Ainsi, en conservant le même rayon et en ne gardant qu'une partie des points, on peut maintenir une qualité de filtrage raisonnable. Ceci est illustré sur la Figure 1 qui présente la variance sur les déplacements et le premier gradient en fonction du rayon pour l'opérateur adimensionné et l'opérateur non adimensionné.

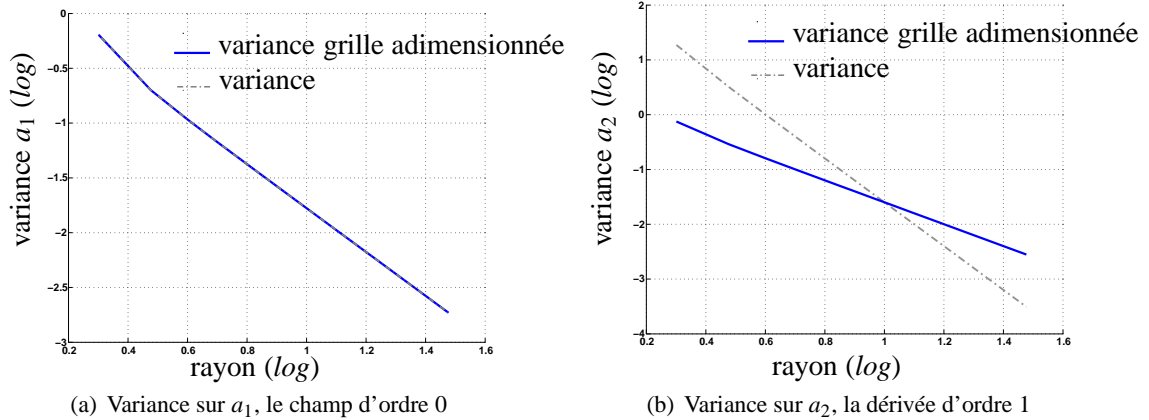


Figure 1 – Variance théorique en fonction du rayon  $R$

### 3 Approximation Diffuse sous-échantillonnée

#### 3.1 Principe et estimateurs

Compte-tenu des remarques du 2.3, pour maîtriser l'erreur sur les déformations, l'effet de la taille physique de la zone est au moins aussi important que celui du nombre de points dans la zone. Ceci pousse à effectuer une reconstruction ne prenant en compte qu'une partie des points de la zone, notamment pour alléger les calculs. Tout en voulant conserver des points de données équilibrés en espace, il n'apparaît en général pas clairement de critère pour garder ou supprimer un point plutôt qu'un autre. Il semble donc naturel de tirer au hasard les points que l'on conserve et d'effectuer la reconstruction successivement sur plusieurs tirage de points.

Cette approche est similaire des approches de sous-échantillonnage [5]. Ainsi, les reconstructions sur les tirages successifs doivent permettre d'estimer la variance de la variable aléatoire reconstruite sur le nuage de point, malgré le fait que ce nuage de départ ne corresponde qu'à une seule réalisation du champ d'entrée. Dans notre cas, on souhaite estimer la variance sur  $\epsilon$ , ce que nous fournit l'équation (6), si  $\sigma_b$  est connu ; si ce n'est pas le cas, l'approche proposée ici peut être utile. En général, un facteur d'échelle, dépendant notamment de la fréquence de sous-échantillonnage, doit être introduit pour passer de l'estimateur sur les tirages à la variance que l'on veut estimer. Le cadre théorique nécessaire à la définition de ce facteur d'échelle n'a pas été étudié dans notre cas et l'approche est utilisée d'un point de vue purement pragmatique.

On se place donc dans le cadre de la reconstruction en un point pour un rayon  $R$  fixé. La fréquence de sous-échantillonnage est choisie égale à 4, c'est-à-dire qu'à chaque tirage, on ne conserve qu'un point sur quatre parmi les mesures qui influencent la reconstruction et le vecteur  $\{a\}$  est reconstruit pour ce jeu de point. L'opération est répétée autant de fois qu'il y a de tirages. Ceci nous permet alors de construire un estimateur de la moyenne et de la variance de  $\{a\}$ .

### 3.2 Illustration sur un exemple

L'approche sous-échantillonnée est illustrée sur la reconstruction en un point à partir de mesures formées d'un tirage de bruit blanc Gaussien d'écart-type :  $\sigma_b = 1$ . La Figure 2 présente les estimateurs de moyenne et de variance sur le premier gradient calculées à partir de 1000 reconstructions. La moyenne est comparée à la reconstruction sur la grille complète et la variance est comparée aux valeurs théoriques obtenues à partir de l'équation (6) pour la grille complète et la grille sous-échantillonnée. On peut constater que les estimateurs sont de bonne qualité et que l'estimateur de variance est compris entre les variances théoriques associées aux deux grilles. Une assise théorique de ce résultat devra être développée.

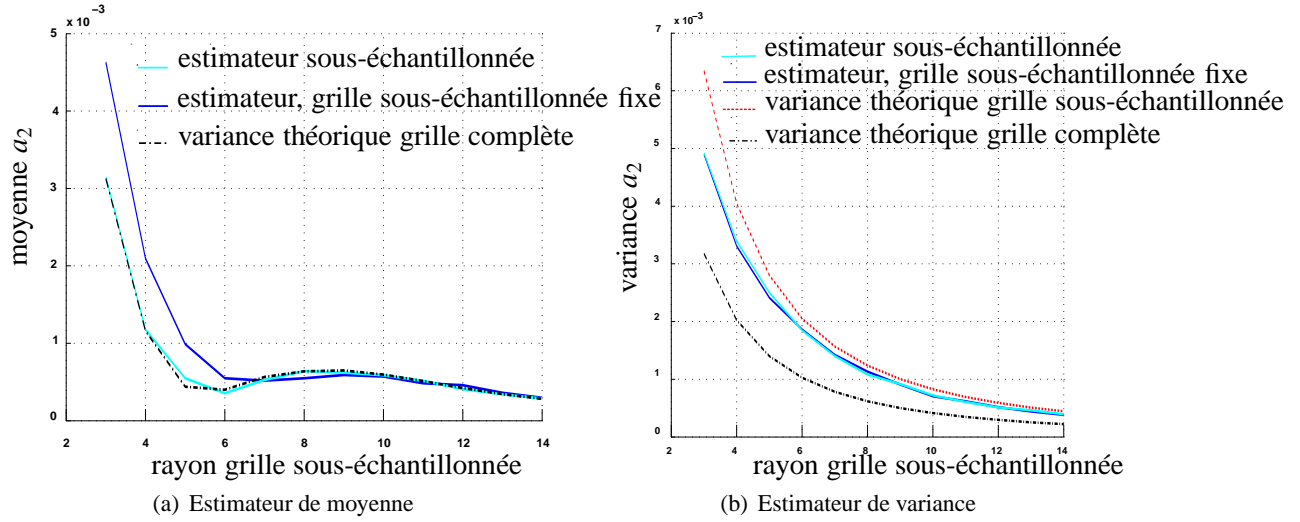


Figure 2 – Estimateurs sur grille sous-échantillonnée pour le gradient d'ordre 1

La Figure 3 présente la courbe de convergence de l'estimateur de variance du premier gradient pour un rayon  $R$  de 44 points de données. La valeur se stabilise après quelques centaines de tirages.

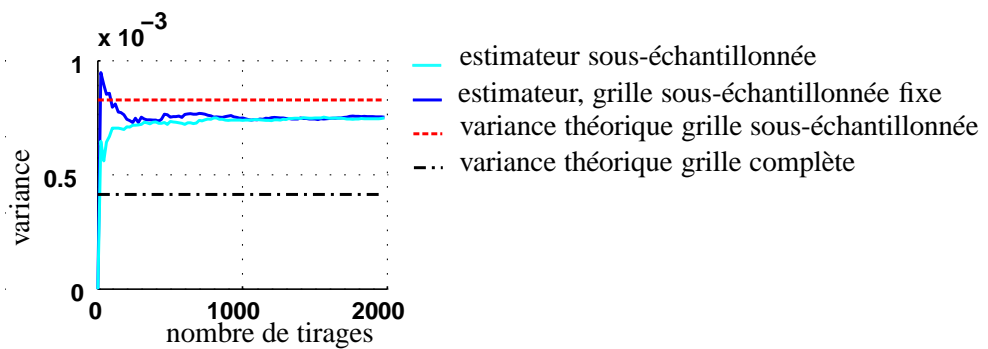


Figure 3 – Convergence de l'estimateur de variance

### 3.3 Modification et efficacité numérique

La méthode précédente permet donc d'estimer la variance de la reconstruction sans *a priori* sur le bruit de mesure. Toutefois, alors que sa première motivation était de limiter le coût de calcul,

cette version demande de construire le système à résoudre à chaque tirage, puisque la position des points est différente à chaque fois. Ceci est numériquement inefficace. On se propose donc ici de changer la stratégie de sous-échantillonnage, en regroupant les points par sous-groupes de quatre points, en approximant leur position géométrique par celle du barycentre du sous-groupe. Une petite erreur d'approximation en découlera, mais qui devrait rester modeste. Les tirages se font alors au sein de chaque paquet, de sorte que le motif des points de données reste le même à chaque reconstruction, ce qui ne modifie pas les matrices du système d'optimalité de (2).

Les résultats de cette méthode sont comparés avec ceux de la première approche sous-échantillonnée Figure 2. On peut constater que les écarts entre les deux approches sont importants pour la moyenne et pour de faibles rayons  $R$ , mais restent acceptables sinon. En particulier, l'estimateur de variance est peu modifié. Ceci valide l'approche qui devient numériquement plus intéressante. Elle reste sans doute plus coûteuse que l'approche sans sous-échantillonnage, mais apporte une estimation de l'erreur commise non disponible jusqu'à présent sans *a priori* sur le niveau de bruit de mesure.

## 4 Conclusion

L'utilisation de l'Approximation Diffuse comme outil de filtrage des mesures de champs vise à contrôler le niveau des erreurs commises lors de la reconstruction. Ce papier s'est concentré sur l'étude de l'erreur liée au bruit de mesure, en étudiant l'effet du rayon d'influence des mesures sur le filtrage. Le filtrage est à la fois influencé par la forme du motif de reconstruction ainsi que par sa taille physique. Cette décomposition nous a conduit à proposer une approche de filtrage alternative basée sur un sous-échantillonnage des points de données impliqués dans la reconstruction. En répétant le tirage, cette approche permet d'avoir une estimation de l'écart-type sur les quantités reconstruites sans *a priori* sur le niveau de bruit sur les mesures. En regroupant les points par sous-groupes, il est possible d'améliorer notablement l'efficacité numérique sans dégrader la qualité des estimateurs mis en place. Cette approche devra être appliquée à une reconstruction complète sur des données simulées ainsi que des données expérimentales. Enfin, le cadre théorique permettant d'asseoir la méthode devra être développé.

## Références

- [1] S. Avril, P. Feissel, F. Pierron, P. Villon. Estimation of strain field from full-field displacement noisy data. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, Lavoisier, 17.5-7, 857-868 2008.
- [2] G. Besnard, F. Hild, S. Roux. Finite-element displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Techniques*, 46, 789-803, 2006.
- [3] W.S. Cleveland, C. Loader *Smoothing by local regression : principles and methods*, Springer, 1995.
- [4] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon. La méthode des éléments diffus. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre*, 313-2, 133-138, 1991.
- [5] D.N. Politis, J.P. Romano, M. Wolf *Subsampling*, Springer-Verlag, New York, 1999.