



**HAL**  
open science

## Inférence bayésienne pour la caractérisation du comportement vibratoire des structures

Erliang Zhang, Pierre Feissel, Jérôme Antoni

► **To cite this version:**

Erliang Zhang, Pierre Feissel, Jérôme Antoni. Inférence bayésienne pour la caractérisation du comportement vibratoire des structures. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01422178

**HAL Id: hal-01422178**

**<https://hal.science/hal-01422178>**

Submitted on 23 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Inférence bayésienne pour la caractérisation du comportement vibratoire des structures

Erliang Zhang, Pierre Feissel, Jérôme Antoni

Laboratoire Roberval de Mécanique, UMR 6253  
Université de Technologie de Compiègne, France  
{ pierre.feissel, jerome.antoni,erliang.zhang }@utc.fr

---

**Résumé** – En raison des erreurs de mesure et de modèle, la caractérisation du comportement vibratoire des structures est effectuée dans un cadre bayésien. Un modèle modal non-déterministe est introduit pour prendre en compte l'erreur de modèle. L'inférence bayésienne des paramètres du modèle et de l'erreur de modèle pour une structure linéaire est effectuée dans le domaine fréquentiel. L'utilisation du chaos polynomial permet d'accélérer l'évaluation requise par l'inférence bayésienne. La méthodologie développée est illustrée numériquement sur une poutre encastree.

**Mots clés** – modèle modal non-déterministe, inférence bayésienne, erreur de modèle

---

## 1. Introduction

L'analyse modale expérimentale [1] permet la caractérisation vibratoire des structures en s'appuyant uniquement sur les essais, mais ne reste valide que sur la structure testée et n'est donc pas une approche prédictive. Son couplage avec un modèle physique, le plus souvent représenté par un modèle Éléments Finis (MEF) peut permettre d'envisager une approche prédictive sur une bande de fréquence basse et medium. Les écarts *a priori* entre le modèle physique et la réponse expérimentale proviennent majoritairement des sources suivantes :

- Les erreurs sur les paramètres du modèle (1)
- Les limitations de la modélisation (erreur de modèle) (2)
- Le bruit sur les mesures et les erreurs expérimentales (3)

L'erreur (2) est due à la simplification inévitable de la structure réelle au cours de la modélisation. Le recalage déterministe [2] du MEF à partir des essais permet de diminuer l'écart entre la réponse du modèle physique et la réponse expérimentale. Toutefois, les erreurs (2) et (3) peuvent rendre la correction des paramètres du modèle ou recalage du modèle vraiment difficile. Une autre grande difficulté du recalage est le risque de problème d'identifiabilité, qui peut être résolue par des techniques de régularisation de type Tikhonov [3]. Il reste néanmoins dans ce type d'approche la difficulté du choix de distances mises en œuvre ainsi que de la pondération entre la distance aux mesures et le terme de régularisation. Pour répondre à ces difficultés, l'approche bayésienne[4] offre un cadre qui permet de fusionner toute l'information *a priori* pour construire de façon optimale vis-à-vis de cette information les termes de la fonction coût. De plus, en traduisant l'information *a priori* sur les variables concernées sous forme de densité de probabilité, l'approche bayésienne fournit une information *a posteriori* beaucoup plus riche qu'une solution déterministe optimale. Dans ce travail, la caractérisation du comportement vibratoire par inférence bayésienne sera effectuée en prenant en compte tous les trois types d'erreurs. La section 2 propose un modèle modal non-déterministe pour tenir compte de l'erreur de modèle, et la section 3 présente le processus complet d'inférence bayésienne. La section 4 illustre l'approche sur l'exemple numérique d'une poutre encastree.

## 2. Proposition de modèle modal non-déterministe

### 2.1. Motivation

La description du comportement vibratoire d'une structure par un MEF est rarement parfaite même après le recalage du modèle. Ceci s'explique notamment par le fait que les erreurs de modèle ne peuvent que partiellement être compensées par l'ajustement des paramètres du modèle. Il peut donc être pénalisant d'appuyer l'identification du comportement vibratoire uniquement sur un MEF, et l'objectif ici est double : permettre une quantification de l'erreur de modèle et l'identification d'un modèle vibratoire plus large que celui prédit par le MEF. Dans le travail [5] l'approche développée a été conçue pour construire les matrices incertaines de masse et de raideur de modèle numérique, qui représentent les incertitudes sur les paramètres de modèle ainsi que l'erreur de modèle. La voie présentée ici à la fois vise à fournir un MEF optimal et l'erreur de modèle associé *a posteriori*.

### 2.2. Modèle modal non-déterministe

Un modèle modal non-déterministe s'appuyant sur un MEF paramétrique est proposé pour caractériser le comportement vibratoire. Il s'appuie sur deux niveaux de modèle :

#### 2.2.1. Le modèle éléments finis stochastique

Un MEF de la structure est construit avec un certain nombre de paramètres  $\theta$  à recalculer, à partir duquel le modèle modal est formé par analyse modale, les paramètres du modèle modal sont notés  $\bar{\alpha}(\theta)$  et contiennent les fréquences propres et les résidus pour les modes d'intérêt.

#### 2.2.2. Le modèle modal non-déterministe

Des variables aléatoires supplémentaires sont introduites pour représenter l'erreur de modèle provoqué par le déficit de MEF. Ces variables aléatoires supplémentaires forme le vecteur  $\varepsilon$ , et sont supposées *a priori* normales  $N(0, \mathbf{C}_T)$ , avec la matrice de covariance  $\mathbf{C}_T$  :

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sigma_{\varepsilon_i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Le modèle modal non-déterministe s'exprime concrètement comme :

$$\alpha = \bar{\alpha}(\theta) + \varepsilon \quad (1)$$

Deux variables aléatoires  $\varepsilon$  sont attribués respectivement à  $\{\omega, A\}$  pour chaque mode, en supposant que tous les degrés de liberté du MEF ont une incertitude de même écart-type. Le vecteur  $\varepsilon$  comprend toutes les sortes d'erreurs comme celle de discrétisation, celle de simplification de modélisation physique et ainsi de suite.

La fonction de transfert paramétrée par  $\alpha$  est alors construite comme suit,

$$\mathbf{H}(\omega, \xi, \varepsilon) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{kl}(\xi, \varepsilon)}{\omega_r^2(\xi, \varepsilon) - \omega^2 + 2j\eta_r \omega_r(\xi, \varepsilon)\omega}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

avec  $\eta$  le coefficient d'amortissement, identifié par analyse modale expérimentale.

### 2.3. Expansion sur le chaos polynomial

Pour alléger le calcul du MEF qui sera exigé par inférence bayésienne, le chaos polynomial [6] est introduit pour représenter la réponse de la structure. Le chaos polynomial sur la base d'Hermite permet la représentation de n'importe quelle variable aléatoire à partir de variables

gaussiennes centrées réduites indépendantes  $\xi$ . Tout d'abord, chaque paramètre de modèle est transformé en une fonction d'une variable primale  $\xi$ . L'approximation par chaos polynomial consiste ensuite à approcher la relation fonctionnelle entre les vecteurs stochastiques  $\xi$  et  $\bar{\alpha}$  sous la forme :

$$\bar{\alpha}_p(\xi) = \sum_{k=0}^P a_k \Phi_k(\xi) \quad (3)$$

où les  $\Phi_k(\xi)$  sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels et P représente le nombre total de terme dans le développement. L'approximation sur le chaos polynomial fonctionne donc comme une surface de réponse équivalente au MEF qui permet de propager l'incertitude de l'espace des variables primales à l'espace des paramètres modaux. Les coefficients du chaos polynomial s'évaluent en utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes de la base. Enfin, le modèle modal non-déterministe est re-écrit comme:

$$\alpha(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=1}^P a_k \Phi_k(\xi) + \varepsilon \quad (4)$$

### 3. Formulation d'inférence bayésienne

En générale, la règle de Baye's bien connue s'écrit comme,

$$p(\theta | \mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D} | \theta)}{p(\mathcal{D})} p(\theta) \quad (1)$$

avec  $\theta$  le vecteur des paramètres à inférer,  $\mathcal{D}$  l'ensemble des données expérimentales. Les deux difficultés principales consistent à construire la densité de probabilité *a priori* et à modéliser le bruit de mesure ainsi que les erreurs de modèle.

#### 3.1. Construction de l'information *a priori*

La probabilité *a priori* peut se construire à partir d'un jugement expert ou du principe de la maximum entropie. Les densités de probabilité *a priori* dans ce travail sont résumées comme suit,

- $\theta$  suit une loi log-normale, dont les informations sont traduites dans les coefficients du développement sur le chaos polynomial.
- $\varepsilon$  suit une loi normale
- $\sigma_\varepsilon$  des variables aléatoires positives, suivant des lois log-uniformes, appelés hyper-paramètres dans le cadre bayésien.

#### 3.2. Formulation de la fonction de vraisemblance

La vraisemblance correspond à la probabilité  $p(\mathcal{D} | \theta)$  qui mesure l'adéquation des données expérimentales aux données prédites.

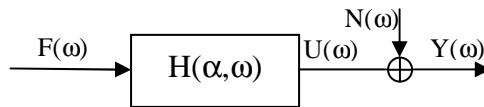


Figure 1 modèle additif du bruit

$\mathbf{Y}$  est la réponse du système mesurée,  $\mathbf{F}$  est l'entrée (force) supposée connue,  $\mathcal{D} = \{\mathbf{Y}, \mathbf{F}\}$ .  $\mathbf{N}$  est le bruit de mesure. La relation entre excitation et mesure s'appuyant sur le modèle additif du bruit s'exprime dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}(\omega, \xi, \varepsilon) \mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) \quad (6)$$

La donnée prédite  $\mathbf{U}$  est approchée par son développement au premier ordre de Taylor par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_0(\xi) + \mathbf{E}(\xi, \varepsilon) \quad (7)$$

où  $\mathbf{E}(\xi, \varepsilon) = \mathbf{T}(\xi) \varepsilon$ , avec  $\mathbf{T}(\xi)$  la matrice de sensibilité, qui contient les dérivées de  $\mathbf{U}$  par rapport à  $\varepsilon$ . Les paramètres  $\xi$  et  $\varepsilon$  étant d'origine physique différente, ils sont indépendants *a priori*, et la formulation de l'inférence bayésienne sur l'ensemble des paramètres inconnus se formule comme :

$$p(\xi, \varepsilon, \sigma_\varepsilon | \mathcal{D}) \propto p(\mathcal{D} | \xi, \varepsilon) p(\xi) p(\varepsilon | \sigma_\varepsilon) p(\sigma_\varepsilon) \quad (8)$$

En fait, d'après l'équation (2),  $\xi$  et  $\varepsilon$  influencent les mêmes paramètres de la fonction de transfert, ce qui conduit à un problème d'identifiabilité. L'estimation du niveau de dispersion (écart-type) de  $\varepsilon$  est relativement faisable, et la fonction de vraisemblance du modèle  $\theta(\xi)$  s'exprime comme suit en tenant compte du bruit de mesure et d'erreur de modèle,

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D} | \xi) &= \int p(\mathcal{D} | \xi, \varepsilon) p(\varepsilon | \sigma_\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \int \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{C}_N)} \exp\left(-\sum_{i=1}^S (Y_i - U_i(\xi, \varepsilon))^t \mathbf{C}_N^{-1} (Y_i - U_i(\xi, \varepsilon)) - \frac{1}{2} \varepsilon^t \mathbf{C}_T^{-1} \varepsilon\right) d\varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $S$  le nombre de réponses mesurées. Le bruit de mesure suit une loi complexe circulaire [7], avec  $\mathbf{C}_N$  la matrice de covariance diagonale estimée en utilisant un signal d'excitation multi-sinus [7].

### 3.3. Exploration de la densité de probabilité conjointe *a posteriori*

D'après la règle de Bayes,  $p(\xi, \sigma_\varepsilon | \mathcal{D})$  s'exprime comme suit, en supposant que  $\xi, \sigma_\varepsilon$  sont indépendants *a priori* :

$$p(\xi, \sigma_\varepsilon | \mathcal{D}) \propto p(\mathcal{D} | \xi) p(\xi) p(\sigma_\varepsilon) \quad (10)$$

La solution de l'approche bayésienne est la densité de probabilité *a posteriori* des paramètres d'intérêt.  $p(\xi, \sigma_\varepsilon | \mathcal{D})$  n'a pas une expression explicite, et de plus est une fonction non-linéaire de  $\xi, \sigma_\varepsilon$ . Par conséquent, une stratégie robuste d'échantillonnage doit être adoptée. L'échantillonnage de Monte Carlo par Chaines de Markov [8] est donc utilisé pour explorer la densité de probabilité  $p(\xi, \sigma_\varepsilon | \mathcal{D})$ . Deux estimateurs scalaires (valeur moyenne et maximum *a posteriori*) sont calculés, la densité de probabilité *a posteriori* s'obtient aussi à l'aide d'une estimation classique par estimation de densité par la méthode de noyau.

### 3.4. Calcul d'intervalle de confiance

L'intervalle de confiance à 95% pour la fonction de transfert *a posteriori* entre le point d'excitation et les points de réponse est étudié. En utilisant l'algorithme Chen-Shao [9], pour chaque fréquence  $\omega$  fixée, un grand nombre de réalisations  $H(\omega)$  est calculé, la fonction de répartition empirique peut être estimée, les intervalles de confiance à 95% sont déduits, et enfin l'intervalle de confiance le plus court parmi tous les intervalles est choisi.

## 4. Exemple numérique

La méthodologie développée est appliquée à l'exemple numérique d'une poutre encadrée comme illustré à la figure 2.

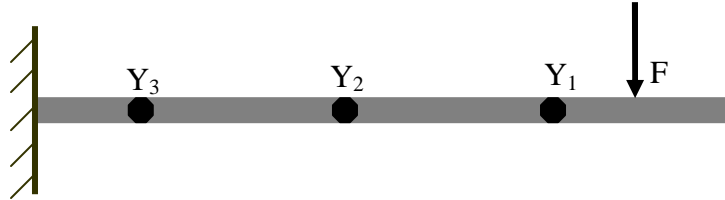


Figure 2 Poutre encadrée

Un MEF de 20 éléments est utilisé pour caractériser le comportement vibratoire. La 'réalité' est simulée par un MEF de 200 éléments; des erreurs supplémentaires aléatoires sont ajoutées sur la sortie de ce MEF pour simuler l'erreur de modèle, et la réponse du système 'réel' est perturbée par un bruit blanc d'écart-type 5% de la valeur efficace de la réponse du système. Les réponses  $Y_1$  et  $Y_2$  sont utilisées pour identifier le modèle modal non-déterministe comprenant le MEF et les écart-types des paramètres modaux. La réponse  $Y_3$  est employée pour valider le modèle modal non-déterministe qui est recalé par  $Y_1$  et  $Y_2$ .

### 4.1. Résultats d'identification

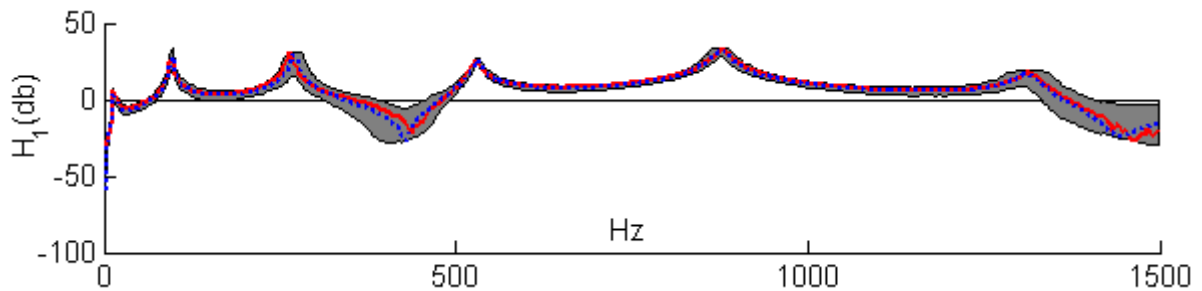


Figure 3 Fonction de transfert entre F et  $Y_1$

(zone grise : intervalle de confiance à 95%, ligne continue: fonction de transfert mesurée, ligne pointillée: prédiction du MEF optimal, même légende pour figure 4 et 5)

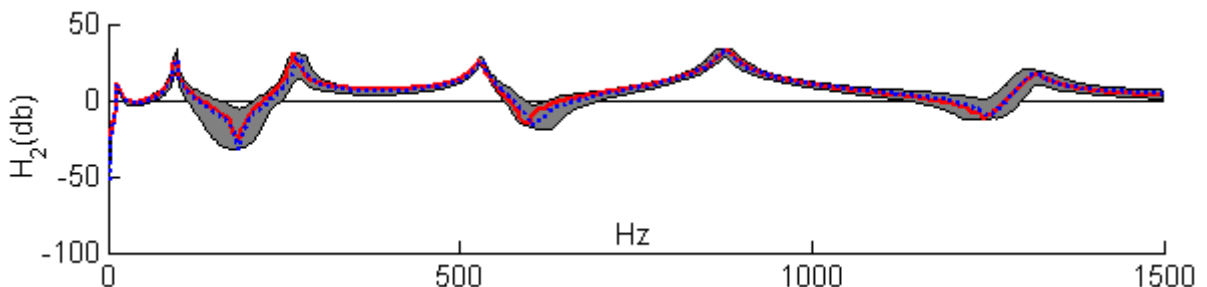


Figure 4 Fonction de transfert entre F et  $Y_2$

L'inférence est effectuée pour les six premières modes de la bande de fréquence [0 1500] Hz. Les figures 3-4 montrent que pour les fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$ , la prédiction du MEF optimal et la fonction de transfert appartient à l'intervalle de confiance à 95%.

### 4.2. Validation du modèle modal non-déterministe

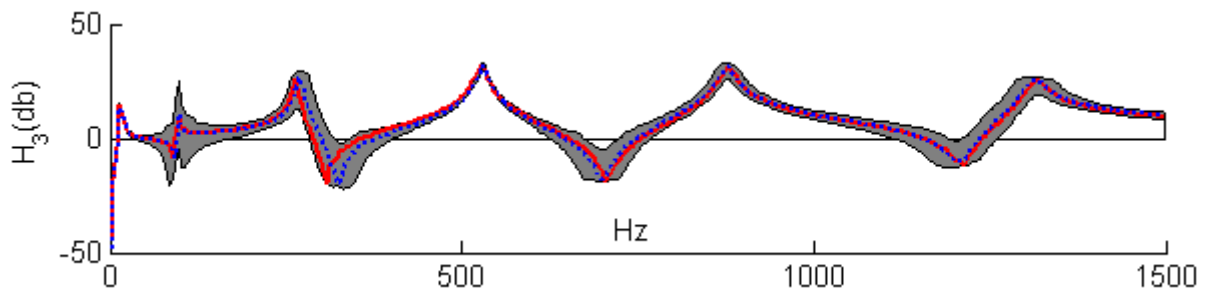


Figure 5 Fonction de transfert entre F et  $Y_3$

La réponse  $Y_3$  est utilisée pour valider le modèle modal non-déterministe recalé. La figure 5 montre que la fonction de transfert mesurée  $H_3$  se situe dans l'intervalle de confiance à 95% ; elle est également bien corrélée avec celle construite par le MEF optimal.

## 5. Conclusion

Un modèle modal non-déterministe a été proposé, dont l'identification est effectuée dans le cadre bayésien. Il s'appuie sur un MEF, et possède la capacité de faire une prédiction satisfaisante avec une quantification probabiliste de l'erreur de modèle.

## Référence

- [1] J. He, Z. F. Fu, Modal analysis, Elsevier, 2001.
- [2] M.I. Friswell, J.E. Mottershead, Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [3] D. Calvettia, S. Morigib, L. Reichelc, F. Sgallarid, Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.123, pp. 423-446, 2000.
- [4] J.L. Beck, L.S. Katafygitiou, Updating models and their uncertainties-I: Bayesian statistical framework, Journal of Engineering Mechanics(ASCE), Vol.124, pp. 455-461, 1998.
- [5] C. Soize, A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics, Journal of Sound and Vibration, vol. 288, pp. 623-652, 2005.
- [6] N. Wiener, The Homogeneous Chaos, American Journal of Mathematics, Vol. 60, No. 4, pp.897-936, 1938.
- [7] R. Pintelon, and J. Schoukens, System Identification. A Frequency Domain Approach, IEEE Press, 2001
- [8] W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter, Markov Chain Monte Carlo in Practice: Interdisciplinary Statistics, Chapman&Hall, 1996
- [9] M.H. Chen, Q.M.Shao, J.G. Ibrahim, Monte Carlo Methods in Bayesian Computation, Springer, 2000.