



**HAL**  
open science

# Sensibilité topologique d'ordre élevé pour l'identification d'inclusions

Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Marc Bonnet. Sensibilité topologique d'ordre élevé pour l'identification d'inclusions. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01422176

**HAL Id: hal-01422176**

**<https://hal.science/hal-01422176v1>**

Submitted on 23 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Sensibilité topologique d'ordre élevé pour l'identification d'inclusions

M. Bonnet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR 7649 CNRS)  
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex  
bonnet@lms.polytechnique.fr

---

**Résumé** — Cette communication propose une approche basée sur la sensibilité topologique d'ordre élevé (i.e. le développement asymptotique à plusieurs termes d'une fonction-coût par rapport à l'apparition d'une inclusion test de taille arbitrairement petite) pour l'identification d'inclusions. On traite ici une situation-modèle (problèmes plans pour milieux caractérisés par une conductivité scalaire, inclusions caractérisées par un contraste de conductivité). Les caractéristiques principales de l'approche sont son caractère spatialement global (exploration exhaustive d'une région spatiale d'intérêt par grille d'échantillonnage) et sa rapidité numérique reposant sur le remplacement de la fonction-coût originelle par son approximant issu de l'analyse de sensibilité topologique étendue. La méthode est susceptible de généralisation (élasticité, 3D...). Des résultats numériques sont présentés.

**Mots clés** — Sensibilité topologique, Méthode de champ adjoint, Identification, Inclusion

---

## 1 Introduction

La reconstruction de défauts inconnus, situés à l'intérieur de solides, est classiquement formulée en termes d'une minimisation de fonction-coût faisant intervenir des données expérimentales et (éventuellement) de l'information *a priori*. Les méthodes d'exploration globale, telles que les algorithmes évolutionnaires, nécessitent habituellement un très grand nombre d'évaluations de fonction-coût, chacune demandant la résolution d'un problème direct complet. Les méthodes de minimisation plus traditionnelles sont plus économiques, notamment si elles sont combinées avec des techniques telles que la dérivation par rapport au domaine ou les ensembles de niveaux, mais leur efficacité dépend beaucoup de la pertinence du choix des conditions initiales et d'informations *a priori* concernant la géométrie ou topologie du défaut à identifier (éventuellement multiple).

Ces remarques ont conduit, depuis une douzaine d'années, au développement d'approches alternatives, non-itératives, maintenant connues dans la littérature internationale sous les noms de *sampling methods* ou de *probe methods*, pour lesquelles une synthèse est présentée dans [7]. L'une de ces approches, objet de cette communication, exploite la notion de sensibilité topologique. On considère dans cette communication des milieux 2-D caractérisés par une conductivité (thermique, électrostatique...) isotrope, susceptibles de contenir des inclusions inconnues caractérisées par un contraste de conductivité. Dans ce cadre, on cherche à exploiter le développement d'une fonction-coût par rapport à l'apparition en un point spécifié  $\mathbf{a}$  du milieu d'une inclusion  $B_\varepsilon(\beta, \mathbf{a}, \beta)$  de (petit) rayon caractéristique  $\varepsilon$  et de contraste de conductivité  $\beta$ , afin de définir une méthode approchée mais globale d'identification d'inclusions, la recherche de l'emplacement  $\mathbf{a}$  et de la taille  $\varepsilon$  étant accomplie par minimisation de l'approximant de la fonction-coût résultant de son développement asymptotique pour  $\varepsilon$  petit et  $\mathbf{a}$  quelconque. Cette approche constitue une extension de l'identification par champ de gradient topologique (voir [4, 6, 5] et la communication [1]).

## 2 Problèmes direct et inverse

**Problème direct.** On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , borné ou non, de frontière  $S$ , constitué d'un milieu isotrope caractérisé par une conductivité  $k$ . Soit  $B^* \subset \Omega$  une inclusion de conductivité isotrope  $k^*$ , de frontière  $\Gamma^*$ , et posons  $\Omega^- = \Omega \setminus (B^* \cup \Gamma^*)$ . Le potentiel  $u^*$  créé dans  $\Omega^-$  et  $B^*$  par l'application d'un potentiel  $u^D$  et d'un flux  $p^D$  donnés sur  $S_D$  et  $S_N$ , respectivement (où  $S_D, S_N$  définissent une partition de  $S$ ), vérifie les équations de champ

$$\operatorname{div}(k\nabla u^*) = 0 \quad (\text{dans } \Omega^-), \quad \operatorname{div}(k^*\nabla u^*) = 0 \quad (\text{dans } B^*), \quad (1)$$

les conditions aux limites

$$p^* = p^D \quad (\text{sur } S_N), \quad u^* = u^D \quad (\text{sur } S_D) \quad (2)$$

(où  $p^* = k\nabla u^* \cdot \mathbf{n}$  désigne le flux associé à  $u^*$  pour la normale unitaire sortante  $\mathbf{n}$ ) et les conditions de transmission

$$u_m^* = u_i^*, \quad (\nabla u^*)_m \cdot \mathbf{n} = (\beta \nabla u^*)_i \cdot \mathbf{n} \quad (\text{sur } \Gamma^*), \quad (3)$$

les indices "m" and "i" indiquant les traces sur  $\Gamma^*$  de quantités définies dans la matrice  $\Omega^-$  et l'inclusion  $B^*$ , respectivement, et  $\beta = k^*/k$  désignant le contraste de conductivité. Par ailleurs, le *champ libre*  $u$  est défini comme le potentiel créé dans  $\Omega$  par les mêmes données aux limites  $p^D, u^D$  et en l'absence d'inclusion, et donc comme solution du problème

$$\operatorname{div}(k\nabla u) = 0 \quad (\text{dans } \Omega), \quad p = p^D \quad (\text{sur } S_N), \quad u = u^D \quad (\text{sur } S_D) \quad (4)$$

**Fonctions-coût, problème inverse.** On considère des fonctions-coût génériques de la forme

$$\mathcal{J}(B^*) = \int_{S_N} \varphi_N(u^*, \boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma + \int_{S_D} \varphi_D(p^*, \boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma, \quad (5)$$

les densités  $\varphi_N, \varphi_D$  étant supposées  $C^2$  par rapport à leur premier argument. Par exemple, l'énergie potentielle  $\mathcal{E}(B^*)$  associée à la solution  $(u^*, p^*)$  du problème (1–3) peut être mise sous la forme (5) avec

$$\varphi_N(p^*, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} p^D(\boldsymbol{\xi}) u^*(\boldsymbol{\xi}), \quad \varphi_D(p^*, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} p^*(\boldsymbol{\xi}) u^D(\boldsymbol{\xi}) \quad (6)$$

On s'intéresse en particulier au problème de l'identification d'une inclusion inconnue  $B^{\text{vrai}}$  à partir de données surabondantes, supposant les valeurs du potentiel  $u^{\text{obs}}$  et du flux  $p^{\text{obs}}$  mesurées respectivement sur  $S_N$  et  $S_D$  (ou des parties de  $S_N$  et  $S_D$ ). La distance entre les observations  $u^{\text{obs}}, p^{\text{obs}}$  et leur prédiction  $u^*, p^*$  pour une inclusion test  $B^*$  peut alors être exprimée comme une fonction-coût de la forme (5). Par exemple, la distance au sens des moindres carrés  $\mathcal{J}^{\text{LS}}(B^*)$  correspond à

$$\varphi_N(u^*, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} |u^*(\boldsymbol{\xi}) - u^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi})|^2, \quad \varphi_D(p^*, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \alpha |p^*(\boldsymbol{\xi}) - p^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi})|^2. \quad (7)$$

( $\alpha$  étant une pondération dimensionnelle servant à homogénéiser les unités des deux termes). Il est facile d'adapter les définitions (7) au cas d'observations recueillies sur des portions de  $S_D$  ou  $S_N$ .

## 3 Développement asymptotique de $\mathcal{J}$ pour une petite inclusion

On cherche dans cette communication à exploiter le développement asymptotique en  $\varepsilon = 0$  de fonctions-coût de la forme (5) pour des inclusions-test de contraste  $\beta$  et emplacement spécifiés et de taille  $\varepsilon$  petite. Dans cette optique, on définit par  $B_\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \varepsilon \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert fixé de mesure (aire)  $|\mathcal{B}|$  et centré à l'origine, le domaine occupé par une inclusion de (petite) taille  $\varepsilon > 0$  et centrée en un point  $\mathbf{a} \in \Omega$  spécifié. La forme d'inclusion est ainsi définie par le choix du domaine normalisé  $\mathcal{B}$  (par exemple,  $\mathcal{B}$  est le disque unité pour une petite inclusion circulaire). La matrice correspondante est ainsi le domaine  $\Omega^- = \Omega_\varepsilon(\mathbf{a}) = \Omega \setminus (B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cup \Gamma_\varepsilon(\mathbf{a}))$ . On définit alors à

partir de (5) une fonction-coût  $J(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a})$  par

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a}) = \mathcal{J}(B_\varepsilon(\mathbf{a})) = \int_{S_N} \varphi_N(u_\varepsilon, \boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma + \int_{S_D} \varphi_D(p_\varepsilon, \boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma, \quad (8)$$

**Développement à l'ordre  $O(\varepsilon^4)$  de la fonction-coût.** Le développement à l'ordre  $O(\varepsilon^4)$  de  $J(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a})$  est alors trouvé au moyen d'une analyse asymptotique (dont les détails sont donnés dans [3]) et s'écrit

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a}) = J_4(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a}) + o(\varepsilon^4) \quad (9)$$

en termes de l'approximant polynômial

$$J_4(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{a}) = J(0) + \mathcal{T}_2(\mathbf{a})\varepsilon^2 + \mathcal{T}_3(\mathbf{a})\varepsilon^3 + \mathcal{T}_4(\mathbf{a})\varepsilon^4, \quad (10)$$

les coefficients  $\mathcal{T}_2(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{T}_3(\mathbf{a})$  et  $\mathcal{T}_4(\mathbf{a})$  étant donnés par

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{a}) = \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \nabla \hat{u}(\mathbf{a}), \quad (11a)$$

$$\mathcal{T}_3(\mathbf{a}) = \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{12} : \nabla^2 \hat{u}(\mathbf{a}) + \nabla \hat{u}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{12} : \nabla^2 u(\mathbf{a}), \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4(\mathbf{a}) = & \frac{1}{2}(1-\beta)\mathbf{I}_B : \nabla^2 [\nabla u \cdot \nabla \hat{u}](\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{13} : \nabla^3 \hat{u}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \nabla \hat{u}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{13} : \nabla^3 u(\mathbf{a}) \\ & + \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \nabla_x \nabla_\xi \mathcal{G}_C(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \nabla \hat{u}(\mathbf{a}) + \nabla^2 u(\mathbf{a}) : \mathbf{A}_{22} : \nabla^2 \hat{u}(\mathbf{a}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_N} \varphi_{N,uu} W^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{S_D} \varphi_{D,pp} (\nabla W \cdot \mathbf{n})^2 \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (11c)$$

Dans les expressions (11a–c), les tenseurs constants  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{13}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (1-\beta)k \left( |\mathcal{B}| \mathbf{I} + \int_{\mathcal{B}} \bar{\nabla} \mathbf{U}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} \right) & \mathbf{A}_{12} &= (1-\beta)k \int_{\mathcal{B}} \bar{\nabla} \mathbf{U}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} \\ \mathbf{A}_{13} &= (1-\beta)k \int_{\mathcal{B}} \bar{\nabla} \mathbf{U}_1 \otimes (\bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}}) \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, & \mathbf{A}_{22} &= (1-\beta)k \int_{\mathcal{B}} \bar{\nabla} \mathbf{U}_2 \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} \end{aligned}$$

en termes des solutions  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  d'équations intégrales pour l'inclusion *normalisée*  $\mathcal{B}$  dans un milieu infini :

$$\mathbf{U}_1(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathcal{L}} \mathbf{U}_1(\bar{\mathbf{x}}) = [\bar{\mathcal{L}} \bar{\boldsymbol{\xi}}](\bar{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{U}_2(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathcal{L}} \mathbf{U}_2(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} [\bar{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}})](\bar{\mathbf{x}}),$$

où l'opérateur intégral  $\bar{\mathcal{L}}$  est défini par

$$[\bar{\mathcal{L}} f](\bar{\mathbf{x}}) = (1-\beta)k \int_{\mathcal{B}} \bar{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \bar{\nabla} G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} \quad (\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}),$$

$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\text{Log}(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)/2\pi$  étant la solution fondamentale de l'équation de Laplace dans le plan),  $\hat{u}$  est la solution du *problème adjoint*

$$k\Delta \hat{u} = 0 \quad (\text{dans } \Omega), \quad k\nabla \hat{u} \cdot \mathbf{n} = \varphi_{N,u} \quad (\text{sur } S_N), \quad \hat{u} = -\varphi_{D,p} \quad (\text{sur } S_D), \quad (12)$$

$\varphi_{N,u}, \varphi_{D,p}, \varphi_{N,uu}, \varphi_{D,pp}$  sont définis par

$$\varphi_{N,u} = \frac{\partial \varphi_N}{\partial u_\varepsilon} \Big|_{u_\varepsilon=u}, \quad \varphi_{D,p} = \frac{\partial \varphi_D}{\partial p_\varepsilon} \Big|_{p_\varepsilon=p}, \quad \varphi_{N,uu} = \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial u_\varepsilon^2} \Big|_{u_\varepsilon=u}, \quad \varphi_{D,pp} = \frac{\partial^2 \varphi_D}{\partial p_\varepsilon^2} \Big|_{p_\varepsilon=p},$$

la fonction  $W$  est donnée par

$$W(\mathbf{x}) = \nabla_\xi \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \nabla u(\mathbf{a}) \quad (13)$$

en termes de la fonction de Green  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  pour le domaine  $\Omega$  est des conditions aux limites *homogènes* de la forme (2), le tenseur  $\mathbf{I}_B$  (inertie géométrique de l'inclusion normalisée  $\mathcal{B}$ ) est donné par

$$\mathbf{I}_B = \int_{\mathcal{B}} (\bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}}) \, d\bar{V}_{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (14)$$

et enfin la fonction  $\mathcal{G}_C$  est définie par  $\mathcal{G}_C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ .

**Commentaires.** Le développement (9) donne la sensibilité topologique étendue de  $\mathcal{J}$ , le coefficient  $\mathcal{T}_2$  du terme dominant de (9) pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  étant la sensibilité topologique de  $\mathcal{J}$  telle que définie par exemple dans [8]. De plus, le choix d'établir le développement (9) à l'ordre  $O(\varepsilon^4)$  est guidé par le fait que, pour des fonctions-coût de type moindres carrés, la perturbation des résidus est d'ordre  $O(\varepsilon^2)$  dans les conditions présentes. Pour le cas 3D, la contribution dominante de  $J(\varepsilon; \mathbf{a})$  est d'ordre  $O(\varepsilon^3)$  et notre démarche conduit à pousser le développement à l'ordre  $O(\varepsilon^6)$  [2]. Enfin, le calcul pratique des *champs* de coefficients  $\mathcal{T}_2(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{T}_3(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{T}_4(\mathbf{a})$  repose sur le calcul numérique des champs libre  $u$  et adjoint  $\hat{u}$  ainsi que de la fonction de Green complémentaire  $G_C$ . Cela représente au total un volume de calcul modeste (tous les problèmes aux limites étant définis pour la même configuration de référence  $\Omega$ ) et très inférieur à celui exigé par une minimisation classique (et *a fortiori* évolutionnaire) de  $\mathcal{J}(B^*)$ .

**Cas particulier d'une inclusion circulaire.** Pour le cas d'une inclusion circulaire ( $\mathcal{B}$  étant donc le disque unité), des expressions explicites sont établies pour  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_{22}$  [3] et donc pour  $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{22}$ , ce qui conduit à :

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{a}) = 2k\pi \frac{1-\beta}{1+\beta} \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \nabla \hat{u}(\mathbf{a}) \quad (15a)$$

$$\mathcal{T}_3(\mathbf{a}) = 0 \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4(\mathbf{a}) = & (2\pi)^2 k \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \nabla u(\mathbf{a}) \cdot \nabla_x \nabla_\xi G_C(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot \nabla \hat{u}(\mathbf{a}) + \frac{k\pi}{2} \frac{1-\beta}{1+\beta} \nabla^2 u(\mathbf{a}) : \nabla^2 \hat{u}(\mathbf{a}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_N} \varphi_{N,uu} W^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{S_D} \varphi_{D,pp} (\nabla W \cdot \mathbf{n})^2 \, d\Gamma \end{aligned} \quad (15c)$$

## 4 Identification par recherche globale approchée

**Méthode de recherche globale approchée.** On va maintenant exploiter le développement (9) pour le problème d'identification d'inclusion fondé sur la fonction-coût  $\mathcal{J}^{LS}$  définie par (5,7), avec  $\varphi_D = 0$  pour les exemples présentés ci-après (cette simplification ne jouant aucun rôle essentiel).

On explore l'intérieur de  $\Omega$  au moyen d'une grille dense  $\mathbb{G}$  formée d'un grand nombre de points d'échantillonnage  $\mathbf{a}$ . Minimiser par rapport à  $\varepsilon$  l'approximant  $J_4^{LS}(\varepsilon; \mathbf{a})$  de  $\mathcal{J}^{LS}$  obtenu par (9) pour  $\mathbf{a}$  fixé est une tâche simple et numériquement rapide, qui peut facilement être effectuée pour tous les points d'échantillonnage  $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$ . On définit ce faisant une procédure de recherche globale approchée sur la région spatiale ainsi échantillonnée. La meilleure estimation de l'inclusion inconnue  $B^{\text{vrai}}$  fournie par cette procédure correspond à l'emplacement  $\mathbf{a} = \mathbf{x}^{\text{est}}$  et la taille  $\varepsilon = R^{\text{est}}$  rendant  $J_4(\varepsilon; \mathbf{a})$  minimale sur  $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , c.à.d. définis par

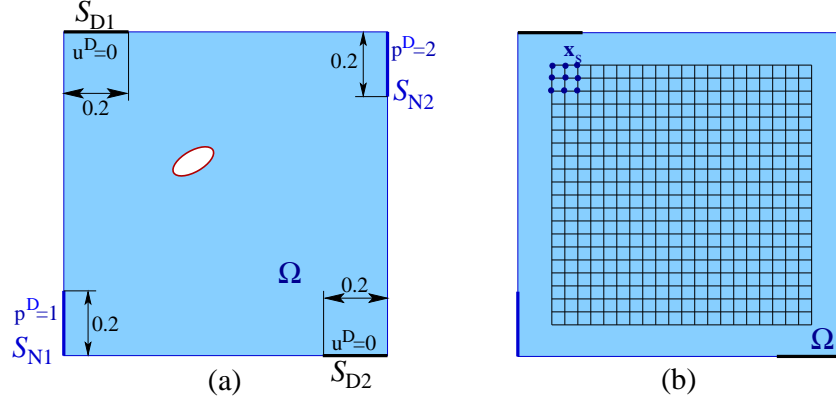
$$\mathbf{x}^{\text{est}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{G}} J^{\min}(\mathbf{a}), \quad R^{\text{est}} = R(\mathbf{x}^{\text{est}}), \quad (16)$$

où  $R(\mathbf{a})$  et la fonction  $J^{\min}(\mathbf{a})$  sont définis à travers une minimisation partielle de  $J_4(\varepsilon; \mathbf{a})$  par rapport à  $\varepsilon$ , soit :

$$J^{\min}(\mathbf{a}) = \min_{\varepsilon} J_4(\varepsilon; \mathbf{a}), \quad R(\mathbf{a}) = \arg \min_{\varepsilon} J_4(\varepsilon; \mathbf{a}). \quad (17)$$

L'estimation  $(\mathbf{x}^{\text{est}}, R^{\text{est}})$  peut alors être utilisée soit telle quelle, soit comme condition initiale pour une deuxième phase d'inversion, par exemple basée sur la minimisation de  $\mathcal{J}^{LS}$ .

**Résultats numériques.** Cette méthode de recherche globale approchée est maintenant appliquée, pour la configuration décrite par la figure 1a (le domaine de référence  $\Omega$  étant le carré unité  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ ), à l'identification (avec données simulées) d'une inclusion centrée en  $\mathbf{x}^{\text{vrai}} =$



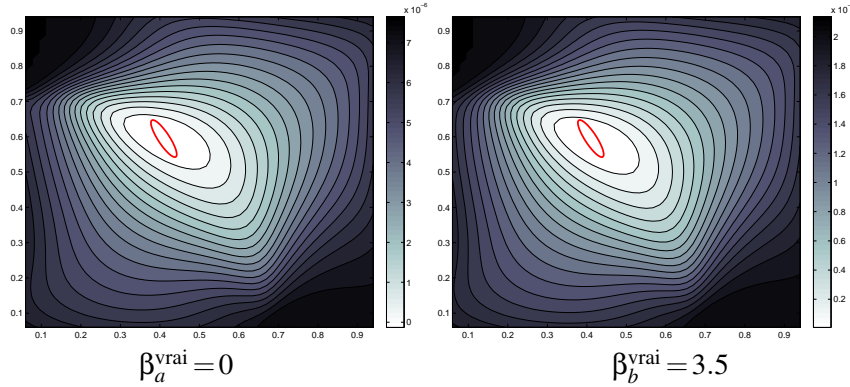
**Figure 1:** Exemple d'identification d'inclusion : (a) configuration et géométrie de l'inclusion à identifier, (b) grille d'échantillonnage.

(0.41, 0.595). A l'exception des deux zones  $S_{D1}$  et  $S_{D2}$  de la figure 1a, la frontière extérieure est une surface  $S_N$ , le flux imposé étant nul en-dehors des zones  $S_{N1}$  et  $S_{N2}$ . Trois géométries d'inclusion  $B^{vrai}$  sont considérées : une inclusion circulaire de rayon  $R^{vrai} = 0.06$  (inclusion 1), une inclusion elliptique de demi-axes principaux  $(A^{vrai}, B^{vrai}) = (0.06, 0.015)$  inclinés de  $\pi/6$  (inclusion 2, figure 1a) ou  $2\pi/3$  (inclusion 3). Trois possibilités de contraste  $\beta_a^{vrai} = 0$ ,  $\beta_b^{vrai} = 0.6$ ,  $\beta_c^{vrai} = 3.5$  sont considérées pour chaque inclusion, ce qui définit un total de neuf configurations (numérotées de 1a à 3c). Les données synthétiques sont calculées pour chaque configuration, au moyen d'une méthode d'éléments de frontière (100 éléments sur  $S$  et 100 sur  $\Gamma^{vrai}$ ). Une grille  $\mathbb{G}$  régulière de  $51 \times 51$  points échantillonne la région  $0.1 \leq x_1, x_2 \leq 0.9$ . Toutes les identifications qui suivent reposent sur  $\mathcal{J}_4^{LS}$  établi pour une inclusion circulaire et supposent connue la valeur correcte  $\beta^{vrai}$  de  $\beta$  (les inclusions 2 et 3 sont donc identifiées en termes de la « meilleure » inclusion circulaire).

**Identification avec données non bruitées.** Les résultats obtenus pour  $\mathbf{x}^{est}$  et  $R^{est}$  pour toutes les configurations 1a à 3c et des données simulées non bruitées sont donnés au tableau 1. Aux fins de comparaison, le rayon « vrai »  $R^{vrai}$  est défini comme celui du disque de même aire que  $B^{vrai}$ , soit  $R^{vrai} = 0.06$  (inclusion 1) ou  $R^{vrai} = 0.03$  (inclusions 2,3). Par ailleurs, la fonction  $\mathcal{J}^{min}(\mathbf{a})$ , représentée avec le contour de  $B^{vrai}$  en figure 2 pour l'inclusion 3, n'atteint des valeurs proches de son minimum global que dans un voisinage de l'emplacement correct de  $B^{vrai}$ .

inclusion 1		$\beta_a^{vrai} = 0$	$\beta_b^{vrai} = 0.6$	$\beta_c^{vrai} = 5$
	$\mathbf{x}^{est}$	(0.404, 0.596)	(0.404, 0.596)	(0.420, 0.596)
	$R^{est}$	6.15e-02	6.06e-02	5.89e-02
inclusion 2		$\beta_a^{vrai} = 0$	$\beta_b^{vrai} = 0.6$	$\beta_c^{vrai} = 5$
	$\mathbf{x}^{est}$	(0.404, 0.580)	(0.404, 0.596)	(0.420, 0.596)
	$R^{est}$	2.42e-02	2.82e-02	3.63e-02
inclusion 3		$\beta_a^{vrai} = 0$	$\beta_b^{vrai} = 0.6$	$\beta_c^{vrai} = 5$
	$\mathbf{x}^{est}$	(0.404, 0.596)	(0.420, 0.596)	(0.404, 0.596)
	$R^{est}$	4.80e-02	3.22e-02	2.61e-02
inclusion 3 (avec bruit 20 %)		$\beta_a^{vrai} = 0$	$\beta_b^{vrai} = 0.6$	$\beta_c^{vrai} = 5$
	$\mathbf{x}^{est}$	(0.404, 0.596)	(0.404, 0.612)	(0.404, 0.596)
	$R^{est}$	4.78e-02	3.28e-02	2.62e-02

**Tableau 1:** Identification d'une inclusion circulaire (1) ou elliptique (2,3) : emplacement  $\mathbf{x}^{est}$  et taille  $R^{est}$  estimés. Les valeurs de référence sont  $R^{vrai} = 0.06$  (inclusion 1),  $R^{vrai} = 0.03$  (inclusions 2,3) et  $\mathbf{x}^{vrai} = (0.41, 0.595)$ .



**Figure 2:** Identification de l'inclusion 3 (elliptique) : distribution de  $J^{\min}$  sur la grille  $\mathbb{G}$  ; contour de  $B^{\text{vrai}}$ .

**Identification avec données bruitées.** On simule des données bruitées pour l'inclusion 3 au moyen d'une version perturbée  $u_{\sigma}^{\text{obs}}$  de  $u^{\text{obs}}$  selon

$$u_{\sigma}^{\text{obs}} = u^{\text{obs}} + \sigma \chi \|u - u^{\text{obs}}\|_{L^2(S_N)}$$

où  $\chi$  est une variable aléatoire de moyenne nulle et écart-type unité, avec ici  $\sigma = 0, 2$ . Les résultats obtenus pour  $\mathbf{x}^{\text{est}}$  et  $R^{\text{est}}$  (tableau 1) sont similaires à ceux obtenus pour les données non bruitées. Cela suggère que les résultats fournis par la méthode proposée ne sont que modérément dégradés en présence de bruit de mesure.

## Conclusion

Les caractéristiques principales de l'approche présentée sont son caractère spatialement global (exploration exhaustive d'une région spatiale d'intérêt par grille d'échantillonnage) et sa rapidité numérique reposant sur le remplacement de la fonction-coût originelle par son approximant issu de l'analyse de sensibilité topologique étendue. Les résultats numériques présentés valident l'intérêt de la méthode et en particulier mettent en évidence une sensibilité modérée au bruit expérimental. La méthode est largement susceptible de généralisation (élasticité, 3D, fissures, dynamique...), et une approche similaire pour l'identification d'obstacles impénétrables est décrite dans [2].

## Références

- [1] Bellis, C., Bonnet, M. Identification non itérative de défauts par la méthode de sensibilité topologique en élastodynamique temporelle. 9<sup>e</sup> Colloque national en calcul des Structures.
- [2] Bonnet, M. Inverse acoustic scattering by small-obstacle expansion of misfit function. *Inverse Problems*, **24** :035022, 2008.
- [3] Bonnet, M. Higher-order topological sensitivity for 2-D potential problems. Application to fast identification of inclusions. *Int. J. Solids Struct.* (2009, à paraître).
- [4] Bonnet, M., Guzina, B. B. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **61** :2344–2373 (2004).
- [5] Feijóo, G. R. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems*, **20** :1819–1840 (2004).
- [6] Guzina, B. B., Bonnet, M. Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics. *Inverse Problems*, **22** :1761–1785 (2006).
- [7] Potthast, R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. *Inverse Problems*, **22** :R1–R47 (2006).
- [8] Sokolowski, J., Zochowski, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, **37** :1251–1272 (1999).