



**HAL**  
open science

## Un modèle cohésif de fissuration par fatigue

Jérôme Laverne, Jean-Jacques Marigo

► **To cite this version:**

Jérôme Laverne, Jean-Jacques Marigo. Un modèle cohésif de fissuration par fatigue. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01421856

**HAL Id: hal-01421856**

**<https://hal.science/hal-01421856v1>**

Submitted on 23 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Un modèle cohésif de fissuration par fatigue

J. Laverne<sup>1</sup>, J.-J. Marigo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EDF R&D département AMA et LaMSID (UMR EDF-CNRS 2832)  
1 avenue du général de Gaulle 92141 Clamart cedex  
jerome.laverne@edf.fr

<sup>2</sup> Université Pierre et Marie Curie, IJLRA (UMR 7190)  
4 place Jussieu 75005 Paris  
marigo@lmm.jussieu.fr

---

**Résumé** – On propose un modèle numérique de rupture permettant de rendre compte de la propagation de fissures en fatigue dans une structure bidimensionnelle élastique soumise à un chargement cyclique d’amplitude quelconque. Le modèle présenté est fondé sur un principe de minimisation d’énergie. Les résultats numériques corroborent les conclusions théoriques, ils permettent d’identifier des lois de propagation de fissure de type Paris sans hypothèses phénoménologiques *a priori* sur l’évolution de la fissuration.

**Mots clés** – fatigue, modèle cohésif, minimisation d’énergie, propagation.

---

## Introduction

La compréhension des phénomènes de fatigue et leurs impacts sur les composants en service du parc électro-nucléaire constitue un enjeu majeur pour la sûreté et la tenue des installations. C’est dans ce contexte que des recherches ont été entreprises pour mieux comprendre les phénomènes de faïençage thermique dans des circuits de refroidissement. Les travaux présentés ici constituent une étude amont à cette problématique industrielle. Ils ont pour objectif de se concentrer sur les aspects propagation sans prendre en compte, pour le moment, toute la complexité des phénomènes physiques en jeu tels que le chargement thermique ou le grand nombre de cycles.

La modélisation de la propagation de fissure par fatigue avec des modèles cohésifs a fait l’objet d’un certain nombre de travaux dans la littérature ces dernières années, citons en quelques uns. En 2001 Nguyen *et al.* [6] proposent un modèle avec une irréversibilité basée sur l’accumulation d’ouverture de la fissure au cours des cycles. En se basant sur la même idée Roe et Siegmund [7] modélisent la propagation d’une fissure à travers une interface. L’irréversibilité du processus est prise en compte en faisant dépendre le paramètre d’endommagement de l’histoire du chargement. En 2005, Maiti et Geubelle [5] proposent un modèle proche de [7]. L’enveloppe cohésive est bilinéaire et présente une hystérésis charge/décharge. Ils reproduisent l’évolution d’une fissure à travers une poutre de type DCB et obtiennent des valeurs de la puissance de la loi de Paris proche de celles obtenues pour rendre compte de la fatigue dans les polymères.

Un point commun à toutes ces approches est de rendre compte de l’irréversibilité de la fissuration par fatigue à partir d’une variable seuil basée sur le cumul d’endommagement au cours des cycles. Le modèle numérique proposé dans cet article possède le même type d’irréversibilité. Il se distingue des précédents par le fait qu’il s’appuie sur les résultats théoriques de l’approche variationnelle de la fatigue de Jaubert et Marigo [4] dont on donne les

éléments essentiels dans la première partie. Par la suite, les grandes lignes du modèle élément finis sont exposées ainsi que les premiers résultats numériques. Enfin, des perspectives et axes d'évolutions sont proposés en conclusion.

## 1 Approche variationnelle de la fatigue

La théorie de la rupture de Francfort et Marigo [1], permet de représenter l'amorçage et la propagation de fissures, sans hypothèses *a priori* sur leurs évolutions spatio-temporelles et ce quel que soit le chargement appliqué. On présente ici de manière succincte les grandes lignes de cette approche étendue à la problématique de la fatigue [4].

### 1.1 Principe général

Déterminer l'évolution de la fissuration consiste à rechercher le champ admissible  $\mathbf{u}$  qui minimise, à chaque instant et parmi tous les états de fissuration possible, l'énergie totale  $E$  d'une structure  $\Omega$ . Le *problème de minimisation* (locale) s'écrit formellement :

Trouver le champ de déplacement cinématiquement admissible,  $\mathbf{u} \in C$ , tel que

$$\exists \varepsilon > 0, \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \leq \varepsilon, \quad E(\mathbf{u}) \leq E(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in C$$

$$\text{avec } E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \phi(x, \varepsilon(\mathbf{u})) dx - W^{ext}(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma} \psi(\delta(\mathbf{n}, \mathbf{u})) dH^{N-1}(x)$$

Le premier terme de l'énergie totale désigne l'énergie élastique, le second le travail des efforts extérieurs (le cas échéant) et le dernier l'énergie de surface associée à une discontinuité  $\Gamma$ . La densité  $\psi$  dépend du saut de déplacement  $\delta$  entre les lèvres de la fissure (défini en mode I par  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n}$ ). La dérivée de  $\psi$  a la dimension d'une contrainte. On note  $\sigma_c = \psi'(0) \geq 0$  et  $\delta_c = 2G_c/\sigma_c$  où  $\delta_c$  est la longueur caractéristique du modèle cohésif,  $G_c$  le taux de restitution d'énergie critique et  $\sigma_c$  la contrainte à la rupture du matériau (voir Charlotte *et al.* [1]).

### 1.2 Evolution de la fissuration sous chargement cyclique

Pour rendre compte des phénomènes de fatigue, on adjoint au cadre précédent la prise en compte de l'irréversibilité de la fissuration. L'idée consiste à modifier l'expression de l'énergie de surface, en faisant dépendre cette dernière non plus du saut de déplacement entre les lèvres mais de son accumulation au cours du temps. Cette variable « *ouverture cumulée* » notée  $\kappa$  a un rôle de mémoire. Si on note  $i$  la discrétisation temporelle du problème, (paramètre des incréments du chargement en quasi-statique), le problème incrémentale en fatigue revient à la résolution successive de problèmes de minimisation :

Sachant  $\mathbf{u}_0 = \kappa_0 = 0$ , trouver  $\mathbf{u}_i \in C_i$  et  $\kappa_i$  tel que,

$$\exists \varepsilon > 0, \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_i\| \leq \varepsilon, \quad E_i(\mathbf{u}_i) \leq E_i(\mathbf{v}) \quad (1)$$

$$\text{avec } E_i(\mathbf{v}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \phi(x, \varepsilon(\mathbf{v})) dx - W^{ext}(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma} \psi(\kappa_i) dH^{N-1}(x)$$

$$\text{et } \kappa_i = \kappa_{i-1} + \langle \llbracket \mathbf{v}_i \rrbracket \cdot \mathbf{n} - \llbracket \mathbf{v}_{i-1} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in C_i \quad (2)$$

Dans la loi d'évolution du seuil (2), les crochets désignent la partie positive, en mode d'ouverture, on suppose que le processus de fissuration n'a lieu que lors des phases de charge. La résolution d'un tel problème rentre dans le cadre du calcul des variations et se prête bien à une résolution numérique par éléments finis.

### 1.3 Principaux résultats

Les auteurs [4] montrent qu'en adoptant le *principe de moindre énergie* (1), une *énergie de surface cohésive avec passage à la limite*  $\delta_c \rightarrow 0$  et la *condition d'irréversibilité de la*

fissuration (2), on obtient, sous chargement cyclique, une loi de propagation de fissure de type Paris lorsque  $G \ll G_c$ . Cette approche permet de construire *explicitement* des lois de fatigue à partir de lois de rupture plus générales et fait le lien entre la rupture « à court terme » (Griffith lorsque  $G \sim G_c$ ) et celle « à long terme » (Paris). Elle permet d'entrevoir des explications aux lois phénoménologiques en fatigue et de mieux comprendre l'influence des données du problème : matériau, géométrie, chargement ou forme de la loi cohésive, sur les paramètres la loi de Paris.

## 2 Modèle numérique

En s'appuyant sur les résultats théoriques précédents, on propose un modèle de rupture cohésive permettant de rendre compte de propagation de fissure par fatigue dans une structure élastique bidimensionnelle soumise à un chargement cyclique d'amplitude quelconque. La discrétisation élément fini de la fissure est assurée par un modèle à discontinuité interne. La déformation dans un tel élément possède une composante classique due au déplacement  $\mathbf{BU}$  (où  $\mathbf{B}$  matrice gradient des fonctions de forme et  $\mathbf{U}$  vecteur déplacement), ainsi qu'une déformation liée à la discontinuité  $\boldsymbol{\delta}$  dans l'élément :  $\mathbf{D}\boldsymbol{\delta}$  (où  $\mathbf{D}$  matrice gradient des fonctions de forme projetée sur la discontinuité). L'énergie volumique dans un élément  $\Omega_e$  est définie de la façon suivante :

$$\Phi(\mathbf{U}, \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\mathbf{BU} - \mathbf{D}\boldsymbol{\delta})^T \mathbf{A} (\mathbf{BU} - \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}) d\Omega \quad (3)$$

avec  $\mathbf{A}$  tenseur d'élasticité. La densité d'énergie de surface ainsi que la contrainte qui en découle s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\kappa) &= -\sigma_c^2 \kappa^2 / 4G_c + \sigma_c \kappa & \text{si } 0 \leq \kappa < \delta_c = 2G_c / \sigma_c \\ &= G_c & \text{si } \kappa \geq \delta_c \end{aligned} \quad (4)$$

En mode d'ouverture, la dérivée de  $\psi$  par rapport au saut de déplacement normal  $\delta_n$  fournit la loi cohésive entre la composante normale du vecteur contrainte  $\sigma_n$  et le saut normal  $\delta_n$  :

$$\sigma_n(\kappa) = \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \delta_n} \quad (5)$$

$$\text{avec } \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = \begin{cases} \sigma_c (1 - \kappa / \delta_c) & \text{si } 0 \leq \kappa \leq \delta_c \\ 0 & \text{si } \kappa > \delta_c \end{cases} \quad \text{et } \frac{\partial \kappa}{\partial \delta_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_n^i \geq \delta_n^{i-1} \\ 0 & \text{si } \delta_n^i < \delta_n^{i-1} \end{cases}$$

L'irréversibilité de la fissuration est gérée par le seuil  $\kappa$  dont l'évolution est donnée par :  $\kappa^i = \kappa^{i-1} + \langle \delta_n^i - \delta_n^{i-1} \rangle$ . Ce dernier n'évolue que dans les phases de montée en charge et reste constant dans les phases de décharge. On souligne que cet aspect de l'irréversibilité est fondamental pour rendre compte de la fatigue. La figure 1 illustre l'évolution de  $\sigma_n$  lors de la variation cyclique de l'ouverture  $\delta_n$ . La résolution du problème de minimisation revient à chercher un couple  $(U^*, \delta^*)$  minimum local de l'énergie totale. En faisant le choix d'un saut de déplacement indépendant d'un élément à l'autre, on *condense* la recherche d'un  $\delta^*(U)$  au niveau élémentaire. Cela permet de ne pas influencer la taille du problème global, la

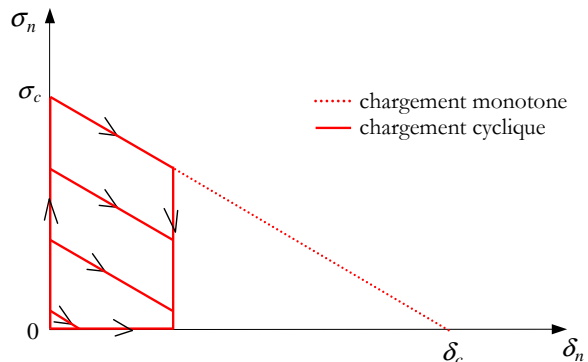


Figure 1 - Loi cohésive lors de l'évolution cyclique de l'ouverture.

recherche des champs de déplacement à l'équilibre  $U^*$  est ensuite effectuée de manière classique par un algorithme de Newton-Raphson.

### 3 Résultats de simulation

Un des principaux résultats porte sur la propagation d'une fissure par fatigue dans une poutre bidimensionnelle élastique de type Double Cantilever Beam (DCB), possédant une fissure initiale de longueur  $a_0$ , soumise à un déplacement imposé cyclique  $U$  avec rapport de charge nul et d'amplitude  $U_{\max}$  (voir figure 2).

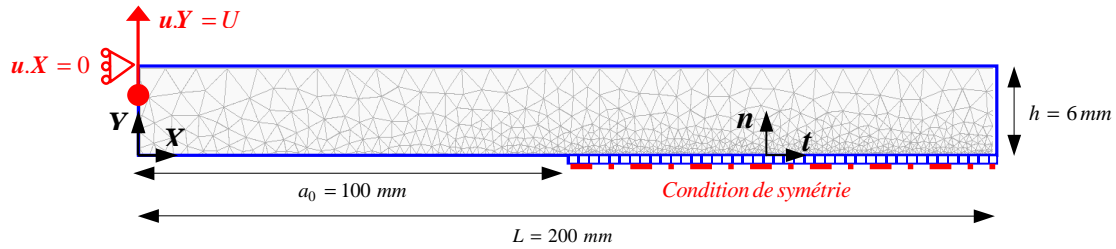


Figure 2 - Schéma de la poutre DCB, conditions aux limites et chargement.

Les éléments finis cohésifs à discontinuité interne sont disposés le long de l'axe de symétrie de la poutre dans le prolongement de la fissure initiale. La DCB est maillée avec des éléments triangulaires linéaires. La symétrie du problème permet d'effectuer les calculs sur la moitié de la poutre, la fissure est sollicitée en mode I pur. L'évolution de la fissuration (cf. figure 3), pour différentes valeurs de  $U_{\max}$ , suit une loi puissance dont on identifie les paramètres. Sans hypothèse phénoménologique *a priori*, le modèle conduit à une loi de type Paris dépendant des paramètres mécaniques du problème (dimensions, chargement, comportement). Pour des valeurs de  $G$  proches de  $G_c$ , l'avancée de fissure est gouvernée par un critère de type Griffith (branche verticale de la courbe). Ce résultat numérique corrobore les prédictions théoriques de l'approche variationnelle de la fatigue [4]. En revanche, le modèle tel qu'il est formulé ne tient pas compte d'un éventuel seuil de non propagation.

D'autres simulations sont réalisées avec des chargements d'amplitude variable. La figure 4 montre le résultat de l'avancée de la fissure

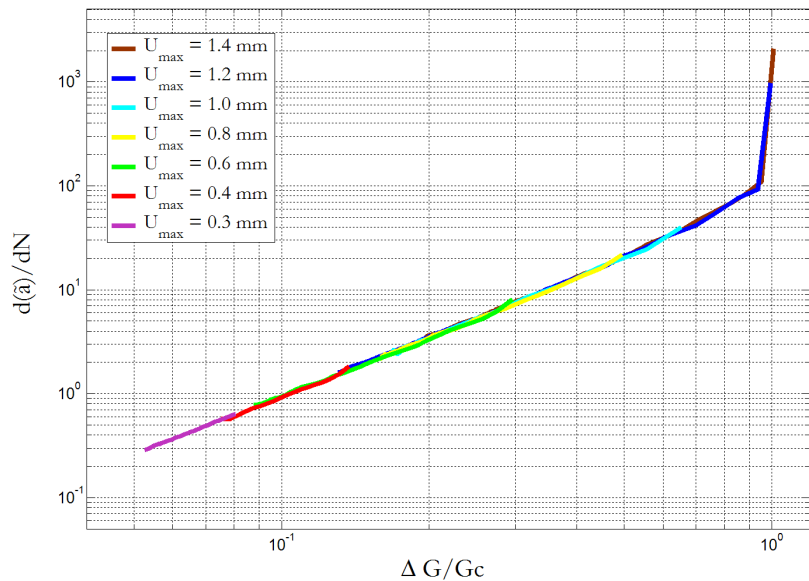


Figure 3 - Taux d'avancée de la fissure en fonction de la variation du taux de restitution d'énergie.

dans le cas d'une surcharge unique dans un bloc d'amplitude constante, on y superpose le cas sans surcharge. Durant les premiers cycles, l'amplitude est constante (0.6 mm), les pointes de fissure  $a$  et pointe cohésive  $a_e$  évoluent à la même vitesse. La taille de la zone cohésive  $l_{zc}$ , différence entre les positions des deux pointes, est sensiblement constante. La surcharge d'amplitude 1.0 mm est appliquée au cycle  $N=200$ . On observe que la pointe cohésive  $a_e$  se propage brutalement puis stoppe son évolution pendant un nombre de cycle transitoire. Ensuite,

la propagation de  $a_c$  s'effectue avec une vitesse identique à celle qu'elle avait sans la surcharge, avec une valeur faiblement supérieure. La pointe de fissure  $a$ , quant à elle, est peu perturbée. Elle accélère légèrement durant les cycles transitoires puis retrouve une vitesse identique à celle obtenue pour un chargement sans surcharge. La longueur de la zone cohésive  $l_{zc}$  augmente brutalement au moment de la surcharge puis décroît pendant le régime transitoire pour retrouver sa valeur initiale.

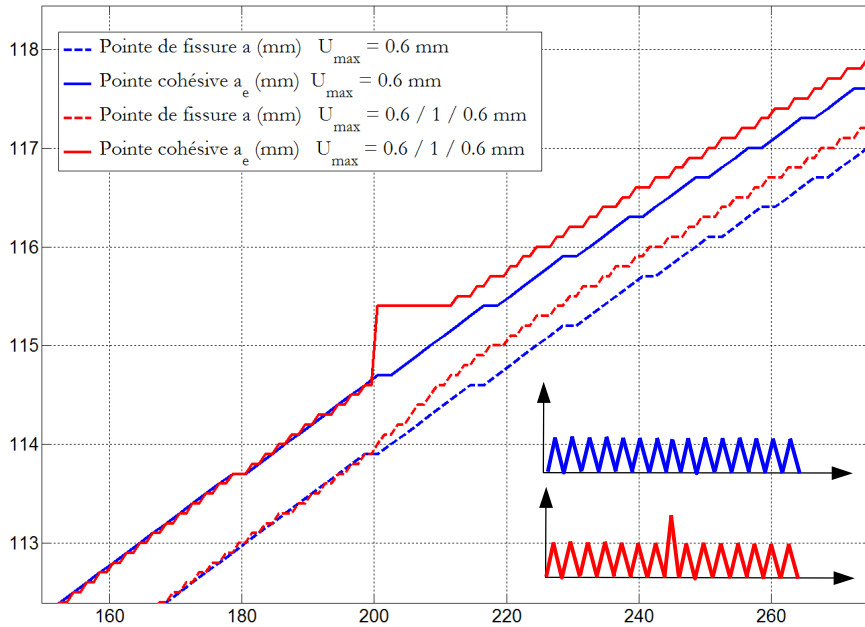


Figure 4 - Longueur de la fissure (mm) en fonction du nombre de cycles, zoom sur la surcharge.

Ces résultats sont également en accord avec [4]. Ce comportement de la fissuration par fatigue dans une structure fragile est par ailleurs obtenu numériquement par Siegmund [8]. Enfin, ces résultats sont reproduits expérimentalement par Choi [1] sur des céramiques fragiles. On remarque ici que la surcharge a une influence faible au niveau macroscopique. En effet, l'accroissement de 66.6 % du chargement ne fait augmenter l'avancée de la fissure (au cycle 500) que de 0.08 %. En fait la surcharge unique ne perturbe la propagation qu'au niveau microscopique (à l'échelle de la zone cohésive). Pour qu'une surcharge unique perturbe la solution au niveau macroscopique il faut qu'elle soit suffisamment importante pour imposer un taux de restitution d'énergie égal à la valeur critique  $G_c$ . Auquel cas, c'est le critère de Griffith qui gouverne la propagation et plus la loi de fatigue. Pour conclure, l'application d'une surcharge n'a pas pour effet d'augmenter la durée de vie de la structure pour des matériaux fragiles. Ceci tend à confirmer l'influence de la zone plastique devant la fissure pour expliquer l'effet retard observé expérimentalement sur les matériaux ductiles.

D'autres calculs sont réalisés avec deux amplitudes : l'une petite (P) de 0.4 mm et l'autre grande (G) de 0.6 mm. Le premier comporte deux blocs :  $2nG$  puis  $2nP$  cycles, le second alterne un petit et un grand cycle :  $2n(PG)$ , le troisième possède quatre blocs  $nP$ ,  $nG$ ,  $nP$  puis  $nG$  cycles, enfin le dernier comporte  $2nP$  puis  $2nG$  cycles. On représente sur la figure 5 l'évolution de la longueur de fissure  $a$  en fonction du nombre de cycles. Contrairement à la surcharge unique, une surcharge prolongée a un effet macroscopique sur l'évolution de la fissuration. On constate que le passage d'un bloc d'une amplitude donnée à un bloc d'amplitude plus importante accélère la propagation de la fissure et que l'inverse conduit à la ralentir. Par ailleurs, on observe l'absence d'effet de séquence. En effet, au cycle 500 l'avancée de la fissure pour les quatre chargements est identique. Cela signifie que l'ordre dans lequel on réalise les cycles d'amplitude variable n'a pas d'influence sur le résultat final de l'avancée de la fissure.

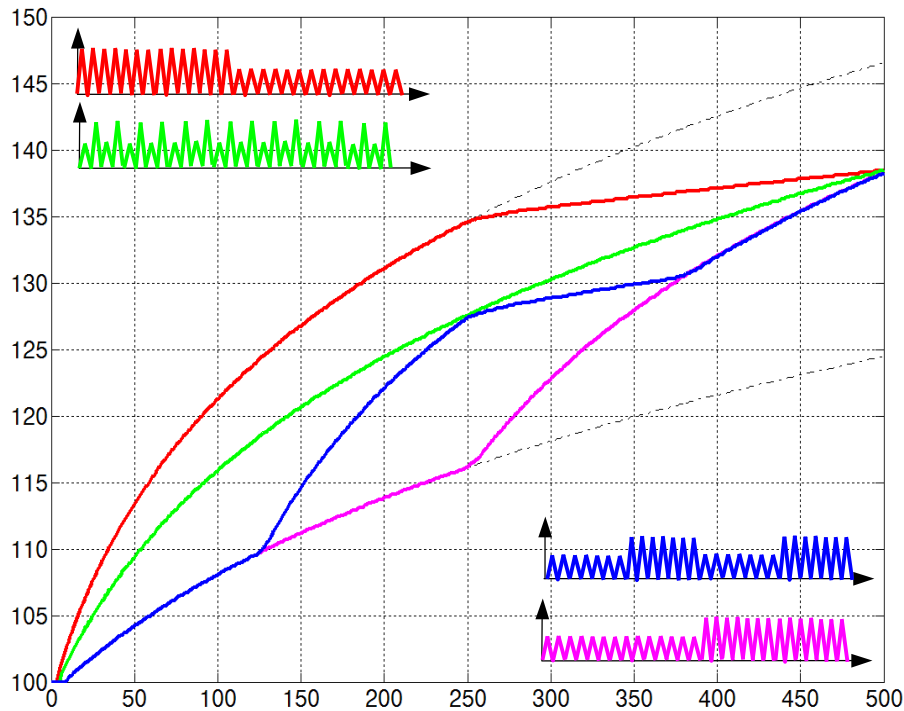


Figure 5 – Longueur de fissure (mm) en fonction du nombre de cycles pour des chargements d’amplitude variable.

## Conclusions et perspectives

Les résultats du modèle proposé sont encourageants, ils permettent à l’ingénieur faisant des calculs de fatigue de ne plus postuler la loi de propagation *a priori*, celle-ci découle des résultats numériques. Elle dépend des différents paramètres du calcul tel que la géométrie, le chargement ou le comportement matériau. On met également en évidence, dans le cas d’un matériau élastique, la faible influence sur l’avancée de la fissure d’une surcharge unique dans un bloc d’amplitude constante ainsi que l’absence d’effet de séquence pour des chargements d’amplitude variable.

Des travaux sont en cours pour coupler notre approche à la fissuration de matériaux ductiles afin de rendre compte d’un effet de surcharge qui tend à ralentir la fissuration et prolonger la durée de vie de la structure. L’objectif est de mieux appréhender la complexité de ce phénomène et de comparer les résultats à des données expérimentales. Par ailleurs l’extension du modèle au 3D (avec une formulation éléments finis différente) est en cours de validation. Elle permet de suivre des évolutions de front de fissure semi-elliptique.

## Références

- [1] Charlotte M., Laverne J. , Marigo J.-J, Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, v 25, n 4, July/August, 2006, p 649-669.
- [2] Choi G. Cyclic fatigue crack growth in silicon nitride : influence of stress ratio and crack closure. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43:1489-1494 (1995).
- [3] Francfort G. A. and Marigo J. - J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (8), pp. 1319-1342 (1998).
- [4] Jaubert A. et Marigo J.-J., Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Volume 18, pages 23-45 (2006).
- [5] Maiti S. and Geubelle P.H., A cohesive model for fatigue failure of polymers. *Eng. Frac. Mech.* 72 (2005) 691-708.
- [6] Nguyen O. et al. A cohesive model of fatigue crack growth. *Int. J. Fracture*. 351-369 , (2001).
- [7] Roe K.L. and Siegmund T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. *Eng. Frac. Mech.* 70 : 209-232 (2002).
- [8] Siegmund T., A numerical study of transient fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model, *Int. J. of Fat.* 26 : 929-939 (2004).